

文章编号: 1000-4750(2011)12-0087-05

刚性土壤上含有轴向力的悬跨管道的 静弯曲和固有频率

*邢静忠^{1,3}, 柳春图²

(1. 天津工业大学机械工程学院, 天津 300387; 2. 中国科学院力学研究所, 北京 100080;
3. 教育部先进纺织复合材料重点实验室, 天津 300160)

摘 要: 针对翘起情况的裸露悬跨管道, 建立考虑轴向力影响的刚性土壤支承的悬跨管道模型。利用小挠度梁理论, 推导出脱离土壤的翘起段和悬跨段管道在自重作用下的变形和内力公式。以静弯曲挠度为振型函数, 用能量法给出第 1 阶固有频率。对简支梁、固支梁和文本模型在含有轴向力情况下的静变形和第 1 阶振动频率进行了对比研究。研究表明: 该文模型与考虑土壤变形的裸露悬跨管道的变形偏差不大, 内力偏差很小。与现有规范推荐的简支梁和固支梁模型相比, 该文模型更能反映裸露悬跨管道的实际情况。该文提供的介于简支梁和固支梁中间的新模型可简化裸露悬跨管道的内力和固有频率计算, 弥补了现有推荐做法的不足。

关键词: 悬跨管道; 裸露悬跨; 小挠度理论; 自由振动; 固有频率

中图分类号: U175.5; TE832 **文献标志码:** A

STATIC BENDING AND FREE VIBRATION ANALYSIS OF SPANNING PIPELINE WITH AXIAL FORCE ON RIGID SOIL

*XING Jing-zhong^{1,3}, LIU Chun-tu²

(1. School of Mechanical Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin, 300387, China;
2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080, China;
3. Advanced Composite Key Laboratory of Tianjin Municipality and Education Ministry, Tianjin 300160, China)

Abstract: For a rising upward case of an unburied spanning pipeline, a new pipe model with an axial force on rigid soil is built. With small deflection beam theory, the deformations and internal forces formulae of the separated segment rising from supported soil and the spanning segment are derived under self-weight loading. Setting the static deflection as a modal function, the first order natural frequency formula is given by the energy balance method. The static deflections under self-weight and the first order natural frequency of a simply supported beam, a fixed-fixed supported beam and the presented model are compared under an axial force case. The research shows that the present model leads to a small difference in deflection and a very small difference in internal forces from the spanning pipeline model considering the soil deformation. Comparing with the simply-supported model and fixed-fixed model recommended in the present rules, the presented model is more reasonable both in static and free vibration characteristics for an unburied spanning pipeline. The recommended model and the formulae provide a calculation for the both internal force and natural frequency of the unburied spanning pipeline with the model as a simply-supported beam model or a fixed-fixed beam model, or in between them, and also complement the inadequacy in the present rules.

Key words: spanning pipeline; unburied spanning pipeline; small deflection theory; free vibration; natural frequency

收稿日期: 2010-03-22; 修改日期: 2010-05-13

基金项目: 天津工业大学科研开发基金项目(029519); 教育部先进纺织复合材料重点实验室开放基金项目(2007ATC001)

作者简介: *邢静忠(1966—), 男, 甘肃人, 教授, 博士, 主要从事海洋结构力学分析研究(E-mail: hxingjzh@tjpu.edu.cn);

柳春图(1935—), 男, 江苏人, 研究员, 学士, 长期从事断裂力学的理论和应用研究。

油气管道经常会铺设在复杂的陆地或海底环境,当管道裸露铺设在不平坦的地面或海床上时,将导致部分悬空^[1]。在深海或非常坚硬的海床环境,或由于海流淘蚀,悬跨情况有时很难避免^[2]。裸露管道的悬跨更多出现在服役过程中某段支承土壤的流失或塌陷、深海海域、或者挖沟埋设有困难的海域。对于海底管道,海流淘蚀造成的悬跨长度可以达到几十米^[3]。管道悬跨不仅造成了管道的受力复杂化,同时海流引起周期性涡流释放会引发悬跨海底管道的涡激振动,造成疲劳破坏。

现有规范建议,可以按简支梁或者两端固支梁模型进行悬跨管道计算^[4-5]。许多悬跨管道研究采用简支梁模型^[6-10]或固支梁模型^[11]。通常,悬跨管道两端很长,当悬跨段弯曲变形时,两端管道会对悬跨段产生影响。不少研究者提出用弹性约束来反映两端管道对悬跨段管道的约束作用^[12-18]。因此,准确考虑两端管道对悬跨段管道的影响,对悬跨管道的强度分析和振动分析是非常必要的。

当裸露悬跨管道的悬跨段向下弯曲时可能引起两端管道从支承土壤上翘起。文献[19]分析发现:对于没有轴向力的悬跨管道,当无量纲量参数 $\lambda_0 > 3$ 时,管道两端将从两侧支承土壤上翘起。当 $\lambda_0 \gg 3$ 时,说明土壤的变形很小。工程上多数裸露悬跨是翘起情况,此时,土壤刚度对无量纲弯矩和变形的影响不很明显。而文献[19]的精确分析方法,计算复杂。为此,针对土壤变形较小情况,本文提出刚性土壤支承的含有轴向力的裸露悬跨管道模型,给出静弯曲变形和内力,以及在静平衡位置微幅自由振动的第1阶固有频率的计算方法。数值计算了不同轴向力作用下管道的离地点位置、最大变形和最大内力以及第1阶固有频率。考虑到裸露悬跨管道的轴向力较小和工程应用的方便性,本文对轴向力等于零的情况给出了变形和内力的解析公式,并比较了本文模型和现有规范推荐模型的差别。推荐使用本文模型及其简化分析方法进行裸露悬跨管道的静力分析和振动分析。

1 静弯曲挠度和弯矩

通常,悬跨长度 $2a$ 远大于管道直径,横向挠度和跨度相比较小。设悬跨管道两端很长,水平放置在刚性土壤上,有轴向力 T (拉力为正,压力为负)作用。假定管道弯曲刚度为 EI ,在均布自重 q 作用下发生小挠度弯曲。定义无量纲长度 $\xi = x/a$,无量

纲载荷 $q_0 = qa^3/(EI)$ 。变形后的无量纲挠度 $Y(\xi) = y(x)/a$ 关于跨中($\xi = 1$)位置左右对称(图1)。管道和土壤刚性接触,在翘起段管道与左侧无限长管道相接的离地点 $\xi = \xi_0$ 处有来源于左端的无量纲剪力 F_1 和无量纲轴向力 $S = Ta^2/(EI)$;设 $\xi = 0$ 处刚性支承点的无量纲支反力为 F_0 ;在 $\xi = 1$ 处有来自右端的无量纲轴向力 S 和弯矩 M 。

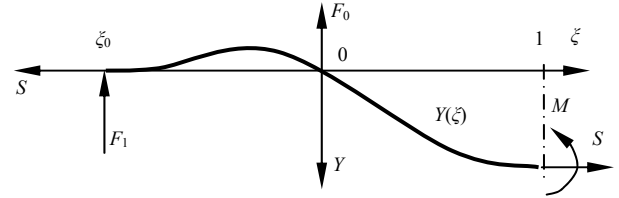


图1 刚性土壤上悬跨管道模型

Fig.1 Spanning pipeline model on stiff soil

1.1 控制方程及其解

介于 ξ_0 和0之间的翘起段和悬跨段挠度 $Y(\xi)$ 均满足小挠度梁的弯曲近似微分方程:

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} - SY(\xi) = -F_1(\xi - \xi_0) + q_0(\xi - \xi_0)^2/2 - F_0\langle\xi\rangle \quad (1)$$

由铅垂方向力的平衡,得 $F_0 = q_0(1 - \xi_0) - F_1$ 。

式(1)在 $S = 0$, $S > 0$ 和 $S < 0$ 时的解答分别为:

$$\begin{cases} Y(\xi) = F_1\xi^2(3\xi_0 - \xi)/6 + q_0\xi^2(\xi^2 - 4\xi\xi_0 + 6\xi_0^2)/24 + C_1\xi + C_2 + (F_1 - q_0 + q_0\xi_0)\xi^3\langle\xi\rangle^0/6, & S = 0 \\ Y(\xi) = F_1(\xi - \xi_0)/S - q_0/S^2 - q_0(\xi - \xi_1)^2/(2S) + C_1 \cosh(\sqrt{S}\xi) + C_2 \sinh(\sqrt{S}\xi) - (F_1 - q_0 + q_0\xi_0) \times [\sqrt{S}\xi - \sinh(\sqrt{S}\xi)]\langle\xi\rangle^0/S^{3/2}, & S > 0 \\ Y(\xi) = -F_1(\xi - \xi_0)/S - q_0/S^2 + q_0(\xi - \xi_1)^2/(2S) + C_1 \cos(\sqrt{S}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{S}\xi) + (F_1 - q_0 + q_0\xi_0) \times [\sqrt{S}\xi - \sin(\sqrt{S}\xi)]\langle\xi\rangle^0/S^{3/2}, & S < 0 \end{cases} \quad (2)$$

1.2 连续条件和边界条件

管道挠度关于跨中左右对称,在 $\xi = 1$ 处,有:

$$Y'(1) = 0 \quad (3)$$

在 $\xi = 0$ 位置有:

$$Y(0) = 0 \quad (4)$$

在 $\xi = \xi_0$ 位置有2个接触条件^[20]:

$$Y(\xi_0) = 0, Y'(\xi_0) = 0 \quad (5)$$

1.3 确定积分常数

将式(2)代入式(3)、式(4)和式(5)第1式,获得求解 C_1 、 C_2 和 F_1 的方程组。对 $S = 0$ 情况有:

$$C_1 = -\frac{q_0 \xi_0}{24} \frac{3\xi_0^2 - 8}{\xi_0 - 3}, \quad C_2 = 0,$$

$$F_1 = -\frac{q_0}{8\xi_0} \frac{3\xi_0^3 - 12\xi_0^2 + 8}{\xi_0 - 3} \quad (6)$$

将式(6)代入式(2), 得无量纲挠度, 对式(2)求导两次可得无量纲弯矩。

1.4 确定离地点位置

根据 $\xi = \xi_0$ 处的接触条件, 即式(5)后一个方程, 可得确定离地点位置的方程。对 $S=0$ 情况可得:

$$Y_2'(\xi_0) = -\frac{q_0 \xi_0}{48} \frac{\xi_0^3 - 6\xi_0^2 + 8}{3 - \xi_0} = 0 \quad (7)$$

解出小于 0 的解, $\xi_0 = -1.06418$ 。

1.5 和考虑土壤变形的结果对比

对 $S=0$ 情况, 取 $q_0=5.4$, 得跨中最大无量纲挠度为 $-0.36(-0.37, -0.43)$, 支承点和跨中的最大无量纲弯矩分别为 $-1.53(-1.52, -1.52)$ 和 $1.17(1.17, 1.24)$ 。括号中的数据分别是文[19]考虑变形 $\lambda_0=21.21$ 和 $\lambda_0=7.61$ 的结果。考虑土壤变形时, 当 $\lambda_0 \gg 3$ 时, 本文模型的变形和内力误差很小。

2 用能量法计算第 1 阶固有频率

能量法需要设定振型, 设定振型的好坏影响计算结果。如设定振型是真实振型, 可得到频率的精确值。如设定振型满足所有边界条件, 可获得与实际频率接近的近似解。取自重作用下的变形为设定振型, 通常可得精度很好频率结果。

为了讨论方便, 引入无量纲的频率系数 ω_c :

$$\omega_c^2 = \frac{\int_{\xi_0}^1 Y''^2(\xi) d\xi + S \int_{\xi_0}^1 Y'^2(\xi) d\xi}{\int_{\xi_0}^1 Y^2(\xi) d\xi} \quad (8)$$

它与频率 ω 的关系为:

$$\omega = \omega_c \sqrt{EI / (\rho A a^4)} \quad (9)$$

以下讨论用频率系数进行比较。注意这里的长度 a 是悬跨管道的一半跨度。

选择 $S=0$ 情况的挠度曲线为设定振型, 考虑管道在平衡位置附近发生微幅振动, 悬跨段和翘起段同时振动, 支承点基本不变。用能量法, 得第 1 阶固有频率:

$$\omega = 4.23874 \sqrt{\frac{EI}{\rho A a^4}} \quad (10)$$

3 含轴力的梁的内力和频率

对含有轴向力的简支梁和固支梁在自重作用下的变形和内力计算, 可通过求解四阶弯曲微分方程, 得到无量纲挠度:

$$\begin{cases} Y(\xi) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \sinh(\sqrt{S}\xi) + C_4 \cosh(\sqrt{S}\xi) - q_0 \xi^2 / (2S), & 0 \leq \xi \leq 2, S > 0 \\ Y(\xi) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \sin(\sqrt{S}\xi) + C_4 \cos(\sqrt{S}\xi) + q_0 \xi^2 / (2S), & 0 \leq \xi \leq 2, S < 0 \end{cases} \quad (11)$$

按照简支梁和固支梁在 $\xi=0$ 和 $\xi=2$ 处的 4 个边界条件:

$$\begin{cases} Y(0) = 0, Y''(0) = 0, Y(2) = 0, Y''(2) = 0, & \text{简支梁} \\ Y(0) = 0, Y'(0) = 0, Y(2) = 0, Y'(2) = 0, & \text{固支梁} \end{cases} \quad (12)$$

可确定挠度曲线, 对其求导, 可得转角、无量纲剪力和弯矩。按照文[21]振动方程, 可得无量纲振型:

$$Y(\xi) = C_1 \sin r_1 \xi + C_2 \cos r_1 \xi + C_3 \sinh r_2 \xi + C_4 \cosh r_2 \xi, \quad 0 \leq \xi \leq 2 \quad (13)$$

其中:

$$r_1^2 = \sqrt{S^2/4 + \omega_c^2} + S/2, \quad r_2^2 = \sqrt{S^2/4 + \omega_c^2} - S/2$$

将式(13)代入式(12), 可得确定积分常数的方程组, 令其行列式等于 0, 可得含 ω_c 的频率方程。

4 数值计算结果

在不同轴向拉力和压力下的本文模型, 由式(3)、式(4)和式(5)组成的方程组, 求得积分常数和无量纲支反力 F_1 和离地点位置(表 1 中 ξ_0), 然后由式(2)确定无量纲挠度求出跨中最大挠度(表 1 中 $Y_{1\max}$)、支承点和跨中无量纲弯矩(表 1 中 M_0 和 M_1); 用式(2)挠度和式(8)定义可求得无量纲频率系数(表 1 中 ω_c)。计算发现, 当 $S > -3.718533$ 时确定离地点的方程有解, 故表 1 的 S 从 -3.7 开始。

由式(11)挠度可确定出轴向力作用下简支梁的跨中无量纲弯矩(表 1 中 M_1^s)和固支梁支承点弯矩(表 1 中 M_0^f); 由式(13)可求得简支梁和固支梁的无量纲频率系数(表 1 中 ω_c^s 和 ω_c^f)。简支梁在 $S < -\pi/4$ 时失稳, 故表 1 中只给出 $S > -2.5$ 的结果。

表 1 三种模型在不同轴向力系数时的静动态特性
Table 1 Static and dynamic characteristics of the three models

无量纲 轴向力 S	离地点位置 ξ_0	跨中最大挠度 $Y_{1\max}$	支承点无量纲 弯矩 M_0	跨中无量纲 弯矩 M_1	频率系数 ω_c	简支梁跨中 无量纲弯矩 M_1^s	简支梁频率系数 ω_c^s	固支梁支承点 弯矩 M_0^f	固支梁频率 系数 ω_c^f
-3.7	-1.8866	0.26920	-0.65427	0.84130	1.0738	/	/	-0.11542	2.8323
-3.5	-1.6539	0.19910	-0.55870	0.63795	1.3844	/	/	-0.11277	2.8769
-3.0	-1.4452	0.14455	-0.46250	0.47112	1.7252	/	/	-0.10682	2.9851
-2.5	-1.3312	0.11831	-0.40813	0.38749	1.9531	/	0	-0.10164	3.0892
-2.0	-1.2515	0.10143	-0.37015	0.33263	2.1382	0.67656	0.68379	-0.09709	3.1896
-1.5	-1.1903	0.08935	-0.34126	0.29270	2.2987	0.32467	0.98383	-0.09307	3.2867
-1.0	-1.1408	0.08000	-0.31818	0.26191	2.4429	0.21271	1.2119	-0.08948	3.3808
-0.5	-1.0995	0.07266	-0.29909	0.23722	2.5753	0.15768	1.4026	-0.08625	3.4721
-0.1	-1.0708	0.07240	-0.28599	0.22068	2.6745	0.13040	1.5386	-0.08380	3.5433
0	-1.0642	0.06477	-0.28312	0.21688	2.6985	0.12500	1.5708	-0.08333	3.5608
0.1	-1.0577	0.06026	-0.27999	0.21324	2.7221	0.12000	1.6023	-0.08280	3.5783
0.5	-1.0334	0.06177	-0.26939	0.19981	2.8140	0.10335	1.7226	-0.08070	3.6472
1.0	-1.0062	0.05740	-0.25729	0.18520	2.9237	0.08798	1.8621	-0.07825	3.7314
1.5	-0.98189	0.05377	-0.24664	0.17257	3.0282	0.07648	1.9919	-0.07603	3.8135
2.0	-0.95999	0.05060	-0.23725	0.16152	3.1285	0.06760	2.1136	-0.07398	3.8937
2.5	-0.94009	0.04773	-0.22878	0.15176	3.2239	0.06052	2.2287	-0.07209	3.9721
3.0	-0.92189	0.04524	-0.22120	0.14307	3.3170	0.054755	2.3382	-0.07034	4.0488
3.5	-0.90514	0.04300	-0.21420	0.13530	3.4062	0.049920	2.4428	-0.06869	4.1240
4.0	-0.88966	0.04091	-0.20783	0.12829	3.4935	0.045880	2.5431	-0.06716	4.1977
4.5	-0.87528	0.03911	-0.20199	0.12195	3.5774	0.042415	2.6396	-0.06573	4.2699
5.0	-0.86188	0.03744	-0.19661	0.11619	3.6585	0.039430	2.7326	-0.06439	4.3409

从表 1 中结果看出, 增大轴向压力使本文模型的离地点变远, 跨中最大挠度增大, 支承点和跨中的弯矩增大, 第一阶固有频率下降; 轴向拉力的作用正好相反。与简支梁和固支梁模型相比, 本文模型的静态和动态特性与简支梁和固支梁均不相同。

5 与规范模型的比较

由式(10)看出, 本文模型在 $S=0$ 时的固有频率系数、跨中的无量纲挠度、支承点处和跨中的无量纲弯矩分别为:

$$C_1 = 4 \times 4.23874 / (2\pi) \approx 2.70,$$

$$Y_{1\max} = Y_1(\xi)|_{\xi=1} \approx 0.066774q_0,$$

$$M_{1\max} = M_1(\xi)|_{\xi=0} \approx -0.28312q_0,$$

$$M_{2\max} = M_1(\xi)|_{\xi=1} \approx 0.21688q_0.$$

表 2 给出 $S=0$ 时, 简支梁、固支梁和本文模型, 在均布载荷作用下的跨中挠度系数、支承点和跨中的弯矩系数以及第 1 阶固有频率系数。挠度系数^[5]

表 2 与规范推荐模型的静动态特性比较

Table 2 Static and dynamic characteristics comparison with the recommended model

	挠度系数	弯矩系数		第 1 阶频率系数
		支座处	跨中	
简支梁	5/384	0	1/8	1.57
固支梁	1/384	1/12	1/24	3.56
本文模型	1/240	1/14.13	1/18.44	2.70

和弯矩系数^[5]分别度量均布载荷下管道的最大挠度和最大弯矩, 用于对管道静动态性能的评价。

可见, 本文模型在 $S=0$ 时的静态特性和振动特性介于简支梁和固支梁之间, 既不同于简支梁, 也不同于两端固支梁。

6 结论

针对裸露悬跨管道的翘起情况, 本文推荐适用于土壤变形较小的刚性土壤支承的含有轴向力的悬跨管道模型, 给出自重作用下静变形和内力以及第 1 阶固有频率的计算方法; 推导给出 $S=0$ 的挠度和弯矩的解析公式以及第 1 阶固有频率公式, 简化了裸露悬跨管道的变形和内力、及固有频率计算。提供了介于简支梁和固支梁中间的悬跨管道新模型, 弥补了现有推荐做法的不足。

参考文献:

- [1] 王利金, 刘锦昆. 埕岛油田海底管道冲刷悬空机理及对策[J]. 油气储运, 2004, 23(1): 44-48.
Wang Lijin, Liu Jinkun. Scour spanning principle and counter measure for submarine pipeline in Cheng island oil field [J]. Oil Gas Storage and Transportation, 2004, 23(1): 44-48. (in Chinese)
- [2] Park H I, Kim C H. Analytical methods for the determination of allowable free span lengths [C]. Proceedings of the 7th International Offshore and Polar

- Engineering Conference. Honolulu, USA, 1997: 377—342.
- [3] 唐友刚, 李长升, 项忠权. 加固前后输油管道固有频率计算[J]. 石油学报, 1997, 18(2): 128—133.
Tang Yougang, Li Changsheng, Xiang Zhongquan. Natural frequency calculation of oil pipe before and after reinforcement [J]. Acta Petrolei Sinica, 1997, 18(2): 128—133. (in Chinese)
- [4] Det Norske Veritas (DnV). Submarine pipeline systems [M]. Norway: Offshore Standard, OS-F101, 2000.
- [5] Det Norske Veritas (DnV). Free spanning pipeline [M]. Norway: Recommended Practice, RP-F105, 2002.
- [6] Angus R, Grytten T, Nystrom P R. Case studies in pipeline free span fatigue [C]. Proceedings of the 10th (2000) International Offshore and Polar Engineering Conference, 2000: 275—284.
- [7] Furnes G K, Berntsen J. On the response of a free span pipeline subjected to ocean currents [J]. Ocean Engineering, 2003, 30: 1553—1577.
- [8] 余建星, 俞永清, 李洪涛, 吴海欣. 海底管跨涡激振动疲劳可靠性研究[J]. 船舶力学, 2005, 9(2): 109—114.
Yu Jianxing, Yu Yongqing, Li Hongtao, Wu Haixin. Reliability research on fatigue caused by vortex induced vibration of submarine pipeline span [J]. Journal of Ship Mechanics, 2005, 9(2): 109—114. (in Chinese)
- [9] 杨兵, 高福平, 吴应湘. 海流-管道-海床之间动力相互作用的量纲分析及实验模拟装置研制[J]. 船舶力学, 2006, 10(3): 130—141.
Yang Bing, Gao Fuping, Wu Yingxiang. Dimensional analysis and experimental apparatus on interaction between ocean current-pipeline and seabed [J]. Journal of Ship Mechanics, 2006, 10(3): 130—141. (in Chinese)
- [10] 杨新华, 郭海燕, 娄敏, 傅强. 考虑阻尼海底悬跨段管道的动力特性及允许悬空长度[J]. 海洋工程, 2005, 23(1): 1—5.
Yang Xinhua, Guo Haiyan, Lou Min, Fu Qiang. Allowable span length of submarine pipeline considering damping [J]. The Ocean Engineering, 2005, 23(1): 1—5. (in Chinese)
- [11] 董丽丽, 徐慧, 郭振邦. 海底管道悬跨长度的计算[J]. 中国海上油气(工程), 2003, 15(16): 16—23.
Dong Lili, Xu Hui, Guo Zhenbang. The calculation of the spanning length of submarine pipeline [J]. China Offshore Oil and Gas (Engineering), 2003, 15(16): 16—23. (in Chinese)
- [12] Wang X Q, So R M C, Liu Y. Flow-induced vibration of an Euler-Bernoulli beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 243(2): 241—268.
- [13] Yu Jianxing, Xi Zhaosheng, Li Hongtao. Research on fatigue invalidation of a submarine pipeline span subjected to waves and currents [J]. China Ocean Engineering, 2006, 20(4): 595—604.
- [14] Xu Tao, Bo Lauridsen, Bai Yong. Wave-induced fatigue of multi-span pipelines [J]. Marine Structures, 1999, 12: 83—106.
- [15] 唐友刚, 项忠权, 李长升. 悬空管线涡激振动强度分析[J]. 天津大学学报, 1996, 29(2): 247—252.
Tang Yougang, Xiang Zhongquan, Li Changsheng. Analysis for vortex-excited vibration strength of suspended pipelines [J]. Journal of Tianjin University, 1996, 29(2): 247—252. (in Chinese)
- [16] Kapuria S, Salpekar V Y, Sengupta S. Fatigue due to vortex-induced oscillations in free spanning pipelines supported on elastic soil bed [C]. Proceedings of the 9th International Offshore and Polar Engineering Conference. Brest, France, 1999: 197—203.
- [17] 署恒木. 海底悬空管道弹性约束静态分析[J]. 石油大学学报(自然科学版), 2005, 29(6): 94—97, 101.
Shu Hengmu. Static analysis of hanging submarine pipeline with elastic constraint [J]. Journal of the University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2005, 29(6): 94—97, 101. (in Chinese)
- [18] 邢静忠, 柳春图. 线弹性土壤中埋设悬跨管道的弯曲和振动特性[J]. 海洋工程, 2008, 26(2): 78—82.
Xing Jingzhong, Liu Chuntu. Bending and vibration characteristic of spanning pipe buried in linear elastic soil [J]. The Ocean Engineering, 2008, 26(2): 78—82. (in Chinese)
- [19] 邢静忠, 柳春图. 考虑海床变形的裸露悬跨海底管道静力分析[J]. 海洋工程, 2007, 25(4): 21—26, 38.
Xing Jingzhong, Liu Chuntu. Static analysis of unburied spanning submarine pipeline on linear elastic seabed [J]. The Ocean Engineering, 2007, 25(4): 21—26, 38. (in Chinese)
- [20] 邢静忠. 海底管道离地点的接触条件探讨[J]. 力学与实践, 2005, 27(5): 57—60.
Xing Jingzhong. An investigation on contact condition at separation point of submarine pipeline [J]. Mechanics and Engineering, 2005, 27(5): 57—60. (in Chinese)
- [21] 邢静忠, 柳春图. 轴向力作用下埋设于线弹性土壤中的悬跨管道振动分析[J]. 工程力学, 2010, 27(3): 193—197.
Xing Jingzhong, Liu Chuntu. Vibration characteristic of spanning pipe buried in linear elastic soil [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(3): 193—197. (in Chinese)