

DOI: 10.3969/j.issn1000-4874.2011.04.015

## 液滴冲击流动液膜的格子 Boltzmann 模拟\*

王小永<sup>1</sup>, 郭加宏<sup>1,2</sup>, 张崇明<sup>1</sup>

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072, Email: wangxiaoyong@163.com;  
2. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100191)

**摘要:** 采用单相格子 Boltzmann 方法模拟了二维液滴冲击流动液膜的含自由面的流动过程。由定义的质量与密度的比例系数来追踪气液自由面的变化。表面张力通过计算界面格点处作用在流体上的汽液相间作用力加入到模型中。数值模拟了速度比(液膜流动速度与液滴撞击速度的比值)和液膜相对厚度(液膜实际厚度与液滴直径的比值)不同时,液滴冲击流动液膜的过程。与液滴冲击静止液膜时的计算结果和理论分析结果进行对比,分析了液滴冲击流动液膜后产生的流动现象及其内在机理,产生的水花的铺展半径和溅起高度随时间的变化规律,并讨论了飞溅产生条件。

**关键词:** 格子 Boltzmann 方法; 单相; 液滴冲击; 液膜; 数值模拟

**中图分类号:** O357

**文献标识码:** A

## Lattice Boltzmann simulation of a droplet impact onto flowing liquid film

WANG Xiao-yong<sup>1</sup>, GUO Jia-hong<sup>1,2</sup>, ZHANG Chong-ming<sup>1</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China ;  
2. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100191, China)

**Abstract:** The Lattice Boltzmann based on single-phase method was used to simulate the free surface flow about the impingement of a liquid droplet onto a flowing liquid film. The fluid fraction, which equals to the mass divided by the density is used to tracking the movement of the free surface. The force induced by the phase interface between the gas and liquid acting on the liquid is added in the model for incorporating the surface tension. Numerical simulations were carried out for impingement of a droplet onto a moving liquid film with different velocity ratio (the velocity of the film divided by the velocity of the droplet) and the relative film thickness (the thickness of the film divided by the diameter of the droplet). By making a comparison between the theoretical and numerical result of a droplet impact onto a static liquid film, the flow phenomena and the intrinsic flow mechanism after a droplet impinging onto a flowing liquid film was analyzed. The rule of radial expansion and height variation of the crown's rim as a function of time were obtained. The splash condition was also discussed.

**Key words:** Lattice Boltzmann method; single phase; droplet impact; liquid film; numerical simulation

\* 收稿日期: 2011-05-06(2011-06-03 修改稿)

基金项目: 国家自然科学基金(10872123, 11032007)和非线性力学国家重点实验室开放基金资助项目

作者简介: 王小永(1985—), 男, 河北正定人, 硕士研究生。

通信作者: 郭加宏, E-mail: jhguo@staff.shu.edu.cn

## 1 引言

液滴撞击固体表面或液膜是日常生活和工业生产中常见的一种现象(如喷涂印刷、喷墨打印、喷雾冷却和雨水侵蚀等)。在冶金连铸喷雾冷却和燃油液滴冲击发动机汽缸壁等过程中,附着在固体表面的液体薄膜内的流体是流动着的,液滴撞击液膜的状况是影响机械性能的重要因素。因此,有必要对液滴撞击流动的液膜的复杂现象进行研究。

液滴撞击固体表面液体薄膜会产生铺展和飞溅等复杂现象。针对单个液滴或多个液滴撞击固体表面和液膜的现象,很多学者已进行了理论、实验和数值研究。Yarin等<sup>[1]</sup>认为在喷溅过程中重力可忽略,只有惯性和表面张力起主要作用。液滴的直径、速度和滴落频率,液膜的厚度、表面张力和运动粘性系数,以及固体表面的粗糙度等都对液滴撞击固体表面和液膜产生的流动现象有影响。他们还液滴撞击后毛细波和喷溅的产生原因进行了理论研究。Yarin<sup>[2]</sup>对皇冠状液膜环状边缘的第二液滴形成的原因进行了研究。Trujillo等<sup>[3]</sup>分析了液膜的厚度、液滴速度和壁面参数对皇冠状水花的影响,并对撞击产生的皇冠状液体薄片进行了理论研究。Mozes等<sup>[4]</sup>对液滴撞击不同厚度液膜的情况进行了实验研究。Wang等<sup>[5]</sup>认为当液膜实际厚度与液滴直径之比 $H < 0.1$ 时,产生喷溅的临界韦伯数与液膜厚度无关。Shi等<sup>[6]</sup>对三维液滴撞击液膜的现象进行了数值模拟。以上研究者研究的都是液滴冲击静止的液体薄膜,液滴撞击流动的液膜的研究还未见有相关文献报道。

格子Boltzmann方法(lattice Boltzmann method, LBM)<sup>[7]</sup>是一种模拟复杂边界和多相界面的有效方法。Gunstensen等<sup>[8]</sup>在处理不相容多相流体时,采用了颜色模型:不同的流体用不同的颜色来标记,并通过改变碰撞步来得到表面张力。曾建邦等<sup>[9]</sup>采用自由能模型模拟水以及氨的相变过程,石自媛等<sup>[10]</sup>也采用自由能模型研究了润湿性梯度驱动液滴运动现象。Xing等<sup>[11-13]</sup>和Körner等<sup>[14]</sup>采用单相自由面LBM,忽略气相只计算液相,从而提高了计算效率。汤波等<sup>[15]</sup>用单相自由面LBM计算了带有自由表面的圆柱绕流问题。严永华等<sup>[16]</sup>用单相自由面LBM计算了液滴冲击静止液膜问题。本文采用单相自由面LBM,数值模拟了速度比(液膜流动速度与液滴撞击速度的比值)和液膜相对厚度(液膜实际厚度与液滴直径的比值)不同时,液滴撞击液膜的情况。对比液滴冲击静止液膜的理论 and 计算结果,分析了液滴冲击流动液膜后产生的流动现象及其内在机理,以及产生的水花的铺展半径和溅起高度

随时间的变化规律,并讨论了飞溅产生条件。

## 2 LBM 的基础理论

格子Boltzmann方法的LBGK模型为

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \left[ f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{(eq)}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (1)$$

其中: $f_i(\mathbf{x}, t)$ 表示 $t$ 时刻 $\mathbf{x}$ 点处沿 $i$ 方向的粒子的速度分布函数, $\tau = \tau_0 / \Delta t$ 为无量纲松弛时间, $f_i^{(eq)}$ 为 $f_i(\mathbf{x}, t)$ 的平衡态分布函数。当流速较低时,平衡态分布函数可以表示为

$$f_i^{(eq)} = w_i \rho \left[ 1 + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2c_s^2} \right] + O(\mathbf{u}^3) \quad (2)$$

其中: $\mathbf{e}_i$ 和 $w_i$ 分别为离散速度和数值积分公式的权重系数。平衡态分布函数满足:

$$\sum_i f_i^{(eq)} = \rho, \quad \sum_i \mathbf{e}_i f_i^{(eq)} = \rho \mathbf{u} \quad (3)$$

单相自由面格子 Boltzmann 模型对两相流体流动进行了一些基本假设:气相的密度总是足够小,以至于其对液相的动力学影响可以忽略;气相自身会在界面变形后立刻达到平衡态;液相与气相不能直接接触,它们之间总隔着一层界面。相应的,计算中的格点被划归为三种不同类型:液相格点、气相格点和界面格点<sup>[12-14]</sup>。

由于忽略气相,在演化过程中,只有来自于液相格点和界面格点的分布函数能够被正常迁移。因缺失从气相格点至界面格点的分布函数,故需要构造这些分布函数。在不考虑表面张力的情况下,这些分布函数可以表达为<sup>[14]</sup>

$$f_i(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i, t) + \bar{f}_i(\mathbf{x}, t) = f_i^{(eq)}(\rho^G, \mathbf{u}) + \bar{f}_i^{(eq)}(\rho^G, \mathbf{u}) \quad (4)$$

其中 $\bar{i}$ 为 $i$ 的反向, $\rho^G$ 为气体的压力密度(对应于大气压的密度),速度 $\mathbf{u}$ 根据假设取当地界面流体

的速度。

为了实现界面的运动, 每个格点都定义了一个质量值 ( $m$ )。液相格点的质量值定义为当地的密度值; 气相格点质量定义为 0; 界面层的质量则介于 0 与液相密度之间。在每个格子内定义液体比例系数 ( $\varepsilon = m / \rho$ ),  $\varepsilon$  的取值范围在 0 到 1 之间。根据质量守恒定律, 每个界面格点的质量  $m(\mathbf{x})$  的增量都由碰撞后分布函数的迁移来决定<sup>[11-14]</sup>,

$$m(\mathbf{x}, t+1) = m(\mathbf{x}, t) + \sum_i \Delta m_i(\mathbf{x}, t+1) \quad (5)$$

$$\Delta m_i(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 \\ f_{\bar{i}}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t) - f_i(\mathbf{x}, t) \\ (\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t)) \cdot \\ (f_{\bar{i}}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t) - f_i(\mathbf{x}, t)) / 2 \end{cases}$$

$$\text{当 } \mathbf{x} + \mathbf{e}_i \in \begin{cases} \text{气相} \\ \text{液相} \\ \text{界面} \end{cases} \quad (6)$$

完成液体相流场计算后, 再根据质量进行界面的重构<sup>[11-14]</sup>。界面的重构以界面格点变为气相或者界面格点变为液相来进行。重构由质量与密度的关系来决定, 会出现下面两种情况:

$$\begin{cases} m(\mathbf{x}, t+1) > (1+k) \cdot \rho(\mathbf{x}, t+1), & \text{过满点} \\ m(\mathbf{x}, t+1) < -k \cdot \rho(\mathbf{x}, t+1), & \text{过空点} \end{cases} \quad (7)$$

其中  $k$  为一个正的小量, 引入它的目的是为了不让界面点在相邻的时间步内变换过于剧烈。

对于过满界面格点, 则将其转化为液相格点, 并将其周围的气相节点变为界面格点; 对于过空界面格点, 则将其变为气相格点, 并将其周围的液相格点都转换为界面格点。上述转变全部完成后, 为了保持质量的守恒, 并给那些新的界面点分配质量, 需要将上述发生变换的过满和过空节点的质量进行重新分配, 而分配的对象是与其相邻的所有界面点。质量重新分配完成后界面将发生移动。界面重构完成后, 接着就可以进行下一步的流场计算<sup>[11-14]</sup>。

表面张力处理的基本思想是: 把表面张力看作是不同流体组分间相互作用的合力, 这种相互作用在单一流体内部由于各向同性而为零, 但是在界面处由于作用的不均衡导致有额外的作用力作用

于界面格点以及与界面格点相邻的流体格点<sup>[17]</sup>。

由于本文只计算液相, 所以不用考虑流体粒子之间的自相互作用。有效质量选择当地气相或液相的密度值。当格子之间的间隔是常数时, 这种作用力与密度值成正比。假设界面处的表面张力就是作用于每个流体质点和界面格点的这种外加作用力, 因此表面张力可表示为<sup>[17]</sup>

$$F(\mathbf{x}, t) = -\rho_l(\mathbf{x}, t) \beta \sum_i (1 - \varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t)) \cdot \mathbf{e}_i \cdot \rho_g \quad (8)$$

其中:  $\rho_l$  与  $\rho_g$  分别表示液相格点与气相格点的当地密度,  $\beta$  是一个表示表面张力系数大小的常数。

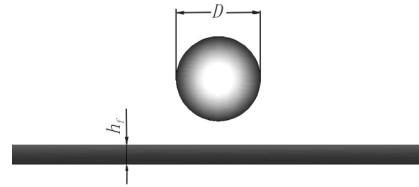


图 1 计算模型

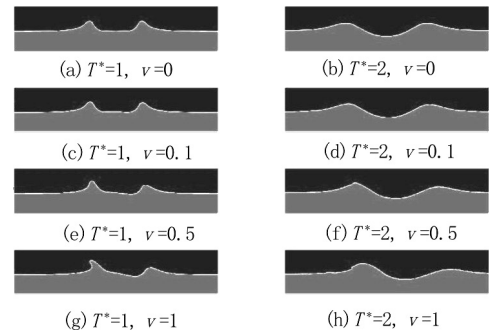


图 2  $h=1$  时液滴撞击液膜的剖面图

在单相流体计算的过程中, 气相格点完全被忽略, 所以碰撞过程中的动量变化可以表示为<sup>[17]</sup>

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{F} \Delta t}{\rho_l(\mathbf{x}, t) \omega} \quad (9)$$

### 3 计算模型及结果分析

#### 3.1 计算模型

本文的计算模型如图 1 所示。假设液滴为球形, 液膜为水平液膜, 液滴以垂直向下的速度撞击液膜。液滴与液膜为同种流体, 流体近似不可压缩。液滴刚接触到液膜时的速度定义为液滴撞击速度。

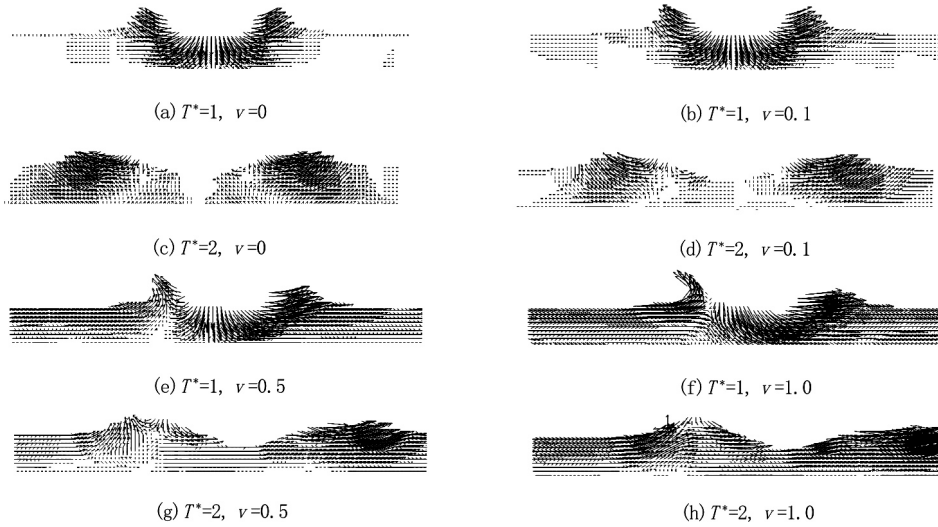


图3 h=1时液滴撞击液膜的速度剖面图

液膜内流体沿水平方向自左向右流动。考虑到壁面的影响，给定其速度剖面为抛物面，即在壁面处速度为零而在自由面处的速度最大。定义其最大速度为液膜流动速度。撞击过程中，表面张力和惯性力起主要作用，所以计算过程中可忽略重力<sup>[1]</sup>。本文采用二维九速度模型(D2Q9模型)，固体壁面边界条件采用标准反弹格式。

$h_f/D$ 、速度比  $v = V_f/V_d$ 、韦伯数  $We = \rho DV_d^2/\sigma$ 、雷诺数  $Re = DV_d/\nu$ 、Ohnesorge 数  $Oh = We^{0.5}/Re$ 、无量纲参数  $K = We \cdot Oh^{-2/5}$ 、临界参数<sup>[2]</sup>  $Ks = 2100 + 5880 \cdot h^{1.44}$ 。

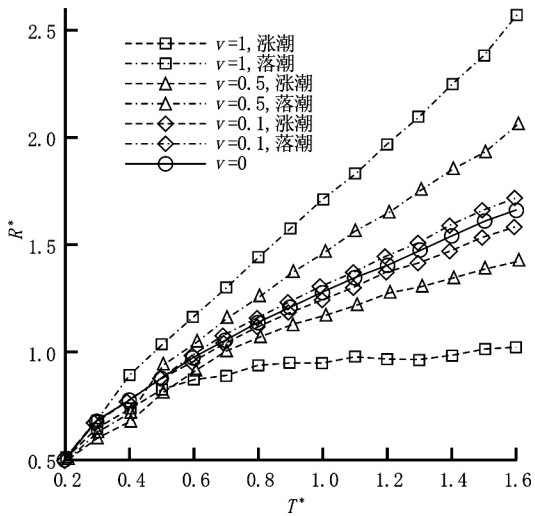


图4 h=1时相对铺展半径随时间的变化

主要物理参数为：液体密度  $\rho$ 、液滴直径  $D$ 、液滴撞击速度  $V_d$ 、液膜流动速度  $V_f$ 、液体运动粘性系数  $\nu$ 、表面张力系数  $\sigma$ 、液膜实际厚度  $h_f$ 、铺展半径  $R$ （撞击溅起的液体薄片根部的实际传播距离）、溅起高度  $H$ （撞击溅起的液体薄片的实际最大高度）、时间  $t$ 。无量纲时间  $T^* = t \cdot V_d/D$ 、相对铺展半径  $R^* = R/D$ 、相对溅起高度  $H^* = H/D$ 。

主要的无量纲参数为：液膜相对厚度  $h =$

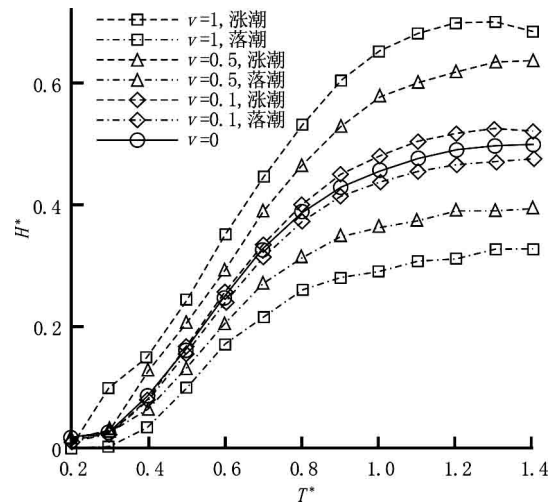


图5 h=1时相对溅起高度随时间的变化

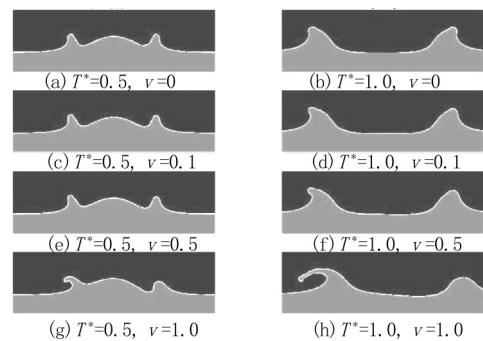


图6 h=0.5时液滴撞击液膜的剖面图

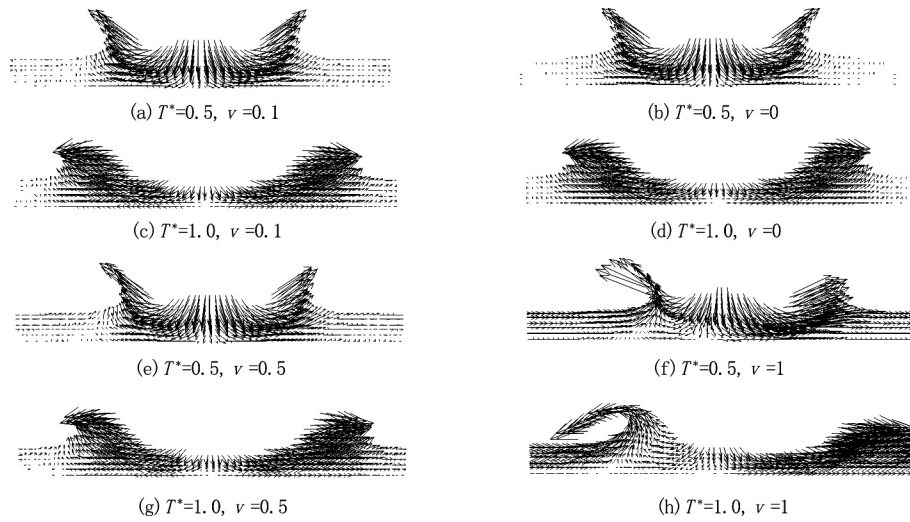


图 7  $h=0.5$  时液滴冲击液膜的速度剖面图

### 3.2 计算结果分析

首先计算液膜相对厚度  $h=1$  情形, 速度比不同的液滴冲击液膜的情况。图 2 是  $h=1$  情形,  $v$  不相同时的液膜形状计算结果, 其中的参数是:  $Re=24.6$ 、 $We=5.5$ 、 $K=13.7$ 、 $Ks=7980$ 。文献研究表明, 在液滴冲击静止液膜的情况, 当  $K$  小于  $Ks$  时液滴冲击液膜不会产生溅射现象<sup>[2]</sup>。图 2 显示在所有速度比情况下, 均没有溅射现象发生。可以看到: 当  $v=0$  和  $v=0.1$  时, 液滴冲击溅起的冠状水花形状左右基本对称; 当  $v=0.5$  和  $v=1$  时, 撞击溅起的水花左右两边形状明显不同, 其中左边的水花高度明显高于右边, 且其水花与液膜表面夹角及扩展速度均小于右边。

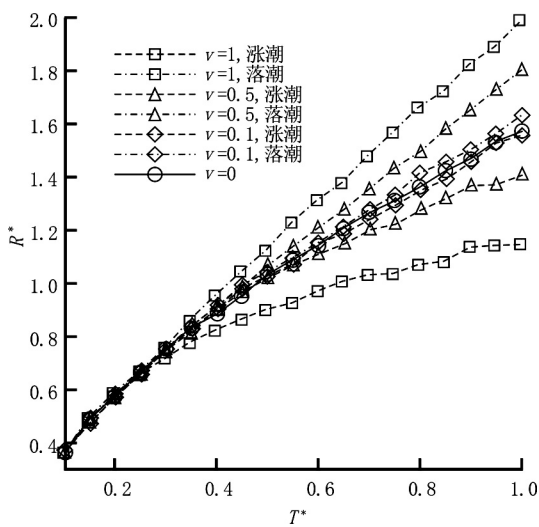


图 8  $h=0.5$  相对铺展半径随时间的变化

图 3 给出  $h=1$  情形, 速度比  $v$  不相同, 液滴冲击液膜后的速度矢量图。如图 3 所示, 液滴撞击

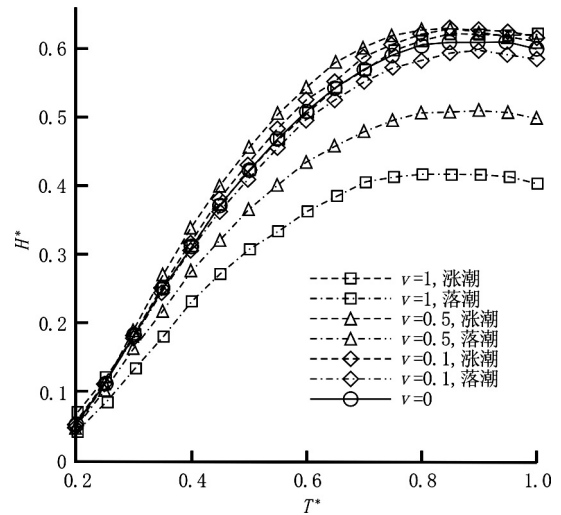


图 9  $h=0.5$  时相对溅起高度随时间的变化

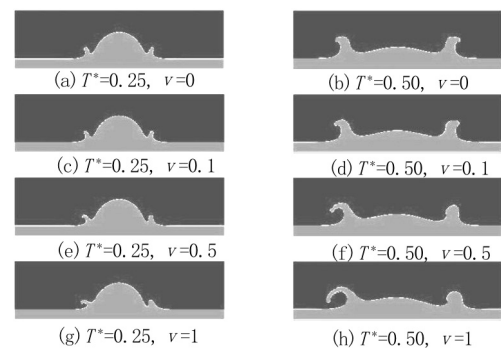


图 10  $h=0.25$  时液滴冲击液膜的剖面图

水平固体表面上的液膜形成一定厚度的冠状水花, 这是由于液滴冲击液膜后, 在液膜内产生了沿冲击方向向下的流体流动, 流体在向下流动时遇到固体壁面, 流动方向向水平方向偏转, 产生高速的水平

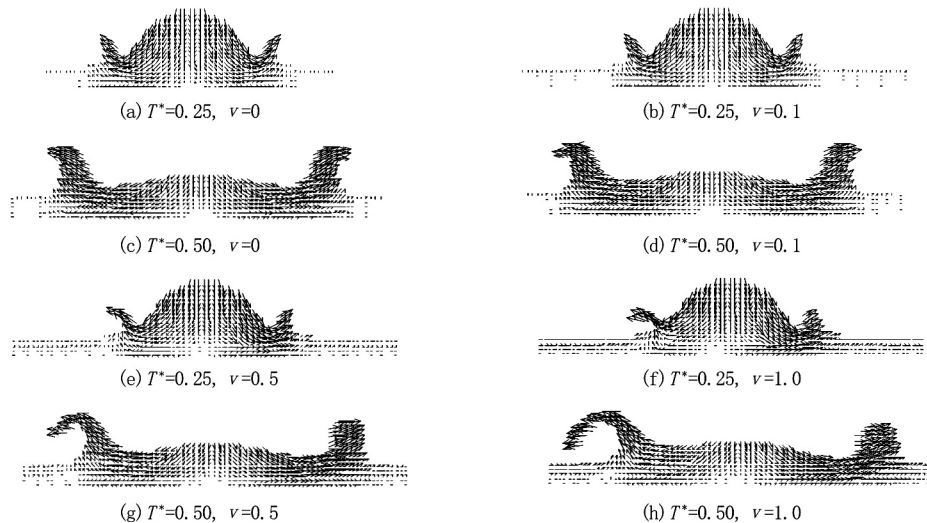


图 11  $h=0.25$  时液滴冲击液膜的速度剖面图

方向的流动。沿水平方向流动的流体，冲击周围液膜中原先静止的液体，推动它们向外流动。由于两股流体的撞击作用，在撞击位置，产生平行于撞击面向上的流体流动，当这部分流体足以克服表面张力跃出液膜表面时，就形成了冠状水花。由于液滴中液体持续冲击进入撞击区域内的液膜，其产生的水平方向高速流动使得冠状水花向液滴冲击区域外不断扩展<sup>[1-3]</sup>。

当液膜内流体以一定速度流动时，在逆流区，铺展方向与液膜初始速度方向相反，液滴冲击后形成的水平方向流动的流体与液膜内流动流体的撞击加剧，而在顺流区，铺展方向与液膜初始速度方向相同，撞击有所减弱。所以，与液滴撞击静止的液膜相比较，在逆流区，溅起水花的高度增高，水花扩展速度降低，而在顺流区溅起水花的高度有所降低，水花扩展速度增大。如图 3 所示，当速度比较小时，水花铺展速度较大，而向上的溅起速度较小；当速度比较大时，在逆流区，向上的溅起速度更大，在顺流区，铺展速度更大。

图 4 给出左右两边水花的相对铺展半径随时间的变化。图 5 显示左右两边水花的相对溅起高度随时间的变化。由于液滴较小，液膜相对厚度  $h$  较大，液滴撞击液膜产生的水平方向的流动速度较小<sup>[2]</sup>，因此，液膜的流动对水花半径以及高度的影响较大。图 4 显示，当  $v=0.5$  和  $v=1$  时，在顺流区和逆流区，水花的相对铺展半径随时间的变化偏离  $v=0$  时结果的程度都很大。在顺流区水花的相对铺展半径随时间的变化近似一条直线。图 5 显示  $v=1$  时，在逆流区水花相对溅起高度达到  $v=0$  时的 1.2 倍，而在顺流区水花相对溅起高度仅为  $v=0$  时的 80%。

图 6 给出液膜相对厚度  $h=0.5$  情形，速度比  $v$  不相同时的液膜形状的计算结果，其中的参数为： $Re=49$ 、 $We=10.9$ 、 $K=32.2$ 、 $Ks=4267$ 。由于

$K$  远小于  $Ks$ ，液滴冲击静止液膜时不会产生溅射现象<sup>[2]</sup>。图中显示，当  $v=0$  和  $v=0.1$  时，撞击溅起的水花左右形状相同，没有产生溅射；当  $v=0.5$  和  $v=1$  时，撞击溅起的水花左右形状明显不同。在逆流区，由于液滴冲击在液膜内产生水平方向的流体流动，与液膜流动方向相反，两股流体的撞击作用加强，已有溅射现象发生，而在顺流区仍旧没有产生溅射。图 7 给出液膜相对厚度  $h=0.5$  情形，速度比  $v$  不相同，液滴冲击液膜后的速度矢量图。如图 7 所示，随着速度比的增大，在顺流区，向上溅起的速度逐渐减小；在逆流区，向上溅起的速度逐渐增大。当  $v=1$  时，在逆流区水花的顶部的速度较大，有类似溅射现象的发生。

对于  $h=0.5$  情形，图 8 和图 9 分别给出了左右两边水花的相对铺展半径和相对溅起高度随时间的变化。由于液膜相对厚度减小，液滴撞击液膜产生的水平方向的流动速度增大<sup>[2]</sup>，因此，液滴撞击速度对水花相对铺展半径以及相对溅起高度的影响增大，液膜的流动对相对铺展半径以及相对溅起高度的影响减小。图 8 显示， $v=0.5$  和  $v=1$  时，在顺流区和逆流区，水花相对铺展半径随时间的变化偏离  $v=0$  时的结果的程度都减小。图 9 显示，液滴以不同速度撞击液膜时，在逆流区水花相对溅起高度与  $v=0$  时的结果已很接近，只有在顺流区，当液滴冲击速度较大时，水花相对溅起高度与  $v=0$  时的结果有一定差距。

图 10 给出液膜相对厚度  $h=0.25$  情形，速度比  $v$  不相同液膜形状的计算结果，其中： $Re=98.2$ 、 $We=21.9$ 、 $K=73.9$ 、 $Ks=2899$ 。由于  $K$  远小于  $Ks$ ，液滴冲击静止液膜时不会产生溅射现象<sup>[2]</sup>。图中显示，当  $v=0$  和  $v=0.1$  时，撞击溅起的水花左右形状相同，没有产生溅射；当  $v=0.5$  和  $v=1$  时，撞击溅起的水花左右形状明显不同。在逆流区，由于

液滴冲击在液膜内流体产生水平方向的流动与液膜内运动流体的撞击作用加强, 已有明显的溅射现象发生, 而在顺流区仍然没有产生溅射。图 11 给出液膜相对厚度  $h=0.25$  情形, 速度比  $v$  不相同, 液滴冲击液膜后的速度矢量图。由于液膜相对厚度进一步减小, 液滴撞击液膜产生的水平方向的流动速度进一步增大<sup>[2]</sup>, 此时, 液滴撞击速度是影响水花铺展半径以及溅起高度的主要因素, 液膜的流动对水花铺展半径以及溅起高度的影响大大减小。可以看到: 当  $v=0.5$  和  $v=1$  时, 在逆流区的速度与  $v=0$  有所不同, 但区别不大, 相对速度对撞击影响较小。

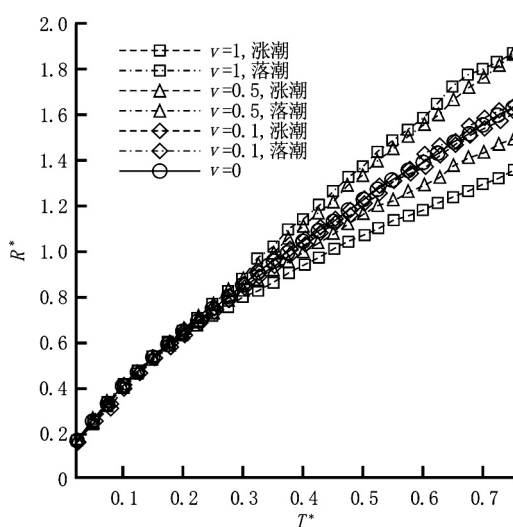


图 12  $h=0.25$  相对铺展半径随时间的变化

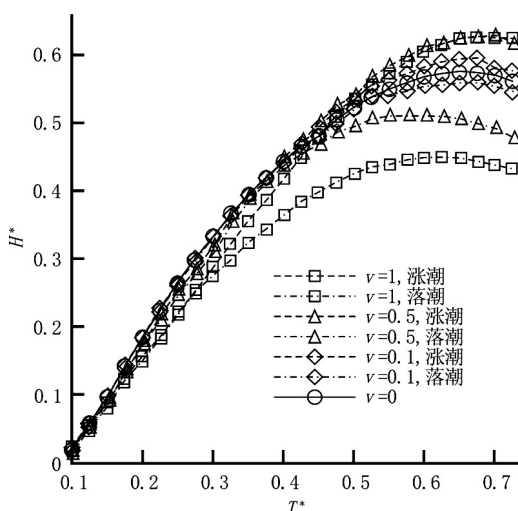


图 13  $h=0.25$  时相对溅起高度随时间的变

对于  $h=0.25$  情形, 图 12 和图 13 分别给出了左右两边水花的相对铺展半径和相对溅起高度随时间的变化。图 12 显示, 当  $v=0.5$  和  $v=1$  时, 在

顺流区和逆流区, 水花相对铺展半径随时间都已很接近  $v=0$  时的结果。图 13 显示, 液滴以不同速度撞击液膜时, 左右两边水花相对溅起高度与  $v=0$  时的结果都已很接近。

## 4 结论

本文采用单相格子 Boltzmann 方法模拟了二维液滴撞击流动液膜的过程, 并且考察了液膜流动对铺展半径和溅起高度的影响。结果表明, 当液滴直径较小, 液膜相对较厚时, 液膜的流动对水花的铺展半径和溅起高度的影响较明显; 当液滴直径较大, 液膜相对较薄时, 液膜的流动对铺展半径和溅起高度的影响减小, 液滴冲击速度成为主要影响因素。与液滴冲击静止液膜相比, 液滴冲击流动液膜后, 溅起水花高度在顺流区减小, 在逆流区增加, 而水花铺展半径在顺流区增加, 在逆流区减小。液滴冲击静止液膜时是否产生溅射现象<sup>[1]</sup>的判断准则对于流动液膜不能适用, 当液膜流动速度较大时, 液滴冲击流动液膜时产生溅射现象的准则数  $Ks$  将会明显减小。

## 参 考 文 献:

- [1] YARIN A L, WEISS D A. Impact of drops on solid surfaces: self-similar capillary waves, and splashing as a new type of kinematic discontinuity[J]. *J. Fluid Mech.*, 1995, 283: 141-173.
- [2] YARIN A L. Drop impact dynamics: splashing, spreading, receding, bounding[J]. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2006, 38: 159-192.
- [3] TRUJILLO M F, LEE C F. Modeling crown formation due to the splashing of a droplet[J]. *Physics of Fluids*, 2001, 13(9): 2503-2516.
- [4] VANDER R L, GORDON W, BERGER M, et al. Droplets splashing upon films of the same fluid of various depths[J]. *Experiments in Fluids*, 2006, 40(1): 33-52.
- [5] WANG A B, CHEN C C. Splashing impact of a single drop onto very thin liquid films[J]. *Physics of Fluids*, 2000, 12(9): 2155-2158.
- [6] SHI Zi-yuan, YAN Yong-hua, YANG Fan, et al. A lattice Boltzmann method for simulation of a three dimensional drop impact on a liquid film[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2008, 20(3): 267-272.
- [7] CHEN S, DOOLEN G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1998, 30: 329-364.

- [8] GUNSTENSEN A K, ROTHMAN D H. Lattice Boltzmann model of immiscible fluids[J]. *Physical Review A*, 1991, 43(8): 15-4320-4327.
- [9] 曾建邦, 李隆键, 廖全, 等. 格子 Boltzmann 方法在相变过程中的应用[J]. *物理学报*, 2010, 59(1): 178-185.  
ZENG Jian-bang, LI Long-jian, LIAO QUAN, et al. Application of lattice Boltzmann method to phase transition process[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(1): 178-185.
- [10] 石自媛, 胡国辉, 周哲玮. 润湿性梯度驱动液滴运动的格子 Boltzmann 模拟[J]. *物理学报*, 2010, 59(4): 2595-2600.  
SHI Zi-yuan, HU Guo-hui, ZHOU Zhe-wei. Lattice Boltzmann simulation of droplet motion driven by gradient of wettability[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(4): 2595-2600.
- [11] XING X Q, BUTLER D L, NG S H, et al. Simulation of droplet formation and coalescence using lattice Boltzmann-based single-phase model[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2007, 311(2): 609-618.
- [12] XING X Q, BUTLER D L, YANG C. Lattice Boltzmann-based single-phase method for free surface tracking of droplet motions[J]. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2007, 53(2): 333-351.
- [13] XING X Q, BUTLER D L, YANG C. A lattice Boltzmann based single-phase method for modelling surface tension and wetting[J]. *Computational Materials Science*, 2007, 39(2): 282-290.
- [14] KÖRNER C, THIES M, HOFMANN T, et al. Lattice Boltzmann model for free surface flow for modelling foaming[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2005, 121(1-2): 179-196.
- [15] 汤波, 李俊峰, 王天舒. 带自由面流体运动的单相格子 Boltzmann 方法模拟[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2008, 48(11): 1841-1844.  
TANG Bo, LI Jun-feng, WANG Tian-shu. Single-phase lattice Boltzmann model for free-surface flow[J]. *J. Tsinghua Univ. (Sci. and Tech.)*, 2008, 48(11): 1841-1844.
- [16] 严永华, 石自媛, 杨帆, 等. 液滴撞击液膜喷溅过程的 LBM 模拟[J]. *上海大学学报(自然科学版)*, 2008, 14(4): 399-404.  
YAN Yong-hua, SHI Zi-yuan, YANG Fan, et al. Simulation of drop impact on liquid film using LBM[J]. *Journal of Shanghai University (Natural Science)*, 2008, 14(4): 399-404.
- [17] YAN Yong-hua, YANG Fan, QIAN Zhong-dong, et al. Modified surface tension model for free surface flow with single-phase lattice Boltzmann method[J]. *J. Shanghai University*, 2010, 14(2): 145-149.