

# 光滑粒子动力学方法的发展与应用\*

刘谋斌<sup>1,2,†</sup> 宗智<sup>3</sup> 常建忠<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 中国科学院力学研究所水动力学与海洋工程重点实验室, 北京 100190

<sup>2</sup> 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100190

<sup>3</sup> 大连理工大学船舶工程学院, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024

<sup>4</sup> 中北大学机电工程学院, 太原 030051

**摘要** 光滑粒子动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 是一种拉格朗日型无网格粒子方法, 已经成功地应用到了工程和科学的众多领域. SPH 使用粒子离散及代表所模拟的介质, 并且基于粒子体系估算和近似介质运动的控制方程. 本文分析和综述了 SPH 模拟方法的发展历程、数值方法与应用进展. 介绍了 SPH 方法的基本思想; 从连续性、边界处理、稳定性和计算效率 4 个方面阐述了 SPH 方法的研究现状; 介绍了 SPH 方法近年来在可压缩流动、不可压缩流动以及弹塑性材料高速变形与失效方面的一些典型应用; 并对 SPH 方法的发展与应用进行了预测与展望.

**关键词** 光滑粒子动力学 (SPH), 无网格方法, 粒子方法, 连续性, 稳定性, 计算效率

## 1 引言

近年来, 无网格粒子方法逐渐成为解决工程科学问题的一个有效工具. 与传统的基于网格的数值方法, 如有限元、有限差分 and 有限容积等不同, 无网格粒子方法使用一套节点 (node) 或粒子 (particle) 对积分形式或微分形式的控制方程进行离散和近似. 这些节点可以任意分布, 而非由某种网格联系在一起. 这样就避免了因为网格存在而产生的一些可能的困难, 对很多问题, 如网格畸变、材料破坏和介质不连续 (如裂纹扩展) 等具有特殊的优势<sup>[1]</sup>.

光滑粒子动力学 (或光滑粒子水动力学和光滑粒子流体动力学) 方法<sup>[2-3]</sup> 通常被视为最早的现代无网格粒子方法. SPH 方法使用一组粒子离散和代表所模拟的介质 (流体或固体), 并且基于粒子体系近似和估算介质运动的控制方程, 具有无网格方法的明显特点. SPH 方法中每个粒子代表宏观连续领域的介质团, 伴随介质的运动以当地速度移动, 是一种拉格朗日方法. 不同于一般无网格方法, SPH 方法中粒子不仅用于估算场变

量与近似控制方程, 也代表介质系统, 具有诸如密度、压力、速度、内能等宏观物理量, 相当于物质点. SPH 方法因此既有了拉氏计算的描述物质界面准确的优势, 又兼备欧拉方法的长处, 因此引起了国内外众多学者的广泛关注.

与传统的网格方法相比, SPH 具有很多独特的优势: (1) SPH 作为一种粒子方法, 运动过程中粒子数量不变, 质量严格守恒; (2) SPH 方法应用粒子代表所模拟的介质系统, 避免大变形导致网格畸变, 适合模拟大变形问题; (3) SPH 是拉格朗日方法, 能够自然地描述介质运动的历史过程, 避免计算对流或输运项; (4) SPH 方法中, 可以在特定位置布置粒子, 通过跟踪粒子的运动确定物质的运动, 不需要复杂的算法来追踪诸如自由表面、移动边界及运动界面等运动特征; (5) SPH 方法用粒子而非网格单元代表所模拟的系统, 适合非连续介质的模拟. 因此, SPH 方法特别适合模拟涉及自由表面、运动界面、变形边界和大变形的问题.

SPH 方法最早应用于求解三维开放空间天体物理学问题, 其理论基础是概率论和统计力学<sup>[4]</sup>. 星体的群体运动与流体或气体的运动相似, 因此

收稿日期: 2010-07-20, 修回日期: 2011-01-29

\* 国家自然科学基金 (10942004), 创新研究群体科学基金 (50921001) 和国家重点基础研究发展计划 (2010CB83270) 项目资助

† E-mail: liumoubin@imech.ac.cn

可以用经典牛顿流体动力学的控制方程来模拟. 三维开放空间边界的影响可以不予考虑. 另外, 早期的 SPH 方法动量和角动量都不守恒, 然而能够定性甚至定量模拟许多天文物理学问题. 随着 SPH 方法的不断发展及广泛地应用于现代计算流体和固体力学等领域, 传统 SPH 方法的许多缺点和不足之处显现出来. 这些缺点主要包括: 计算精度相对较低; 边界区域计算不足, 边界条件不易实施; 对于某些应力状态出现数值不稳定性; 计算效率有待提高. 经过众多学者和研究人员的共同努力, SPH 已经形成了相对比较完整的方法和理论体系, 应用领域也不断拓广, 在很多科学和工程领域具有特殊的优势. 但是作为一类较新的计算方法, SPH 还有待进一步发展和完善.

本文综述了近年来光滑粒子动力学在数值方法及应用方面的研究进展. 数值方法方面主要集中在 SPH 的连续性、边界处理、稳定性和计算效率 4 个方面. 介绍了 SPH 方法在模拟可压缩流动、不可压缩流动以及弹塑性材料高速变形与失效等方面的一些典型应用. 最后指出了 SPH 方法中值得进一步探讨的问题, 并对 SPH 的发展与应用进行了预测与展望.

## 2 SPH 方法的基本思想

### 2.1 SPH 核近似与粒子近似

利用 SPH 方法近似偏微分方程的过程包括两步: 核近似和粒子近似. 对函数的核近似是通过对此函数及权函数进行积分来实现; 而粒子近似是在一个有限区域内对所有粒子进行加权求和. 对于传统的 (经典的)SPH 方法, 在某点 (或某个粒子)  $i$  上, 对任意函数  $f(\mathbf{x})$  的核近似 ( $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ ) 可由下式定义

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (1)$$

式中,  $f$  为三维坐标向量  $\mathbf{x}$  的函数,  $\Omega$  为包含  $\mathbf{x}$  的积分区域.  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  为  $\delta$  函数, 性质如下

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} \infty, & \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \end{cases} \quad (2)$$

式 (1) 表明任意函数可用积分的形式加以表述. 由于应用了  $\delta$  函数, 如果在  $\Omega$  内  $f(\mathbf{x})$  有定义且连续, 则式 (1) 所代表的积分表示式就是严格精确的.

若用一个权函数  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$  来取代  $\delta$  函数,

则  $f(\mathbf{x})$  的积分表示式可写为

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (3)$$

在许多与 SPH 相关的文献中,  $W$  通常被称为光滑函数 (smoothing function) 或者核函数 (kernel function).  $h$  定义了光滑函数  $W$  的影响区域, 称为光滑长度. 式 (3) 就是对任意场函数  $f(\mathbf{x})$  的积分表示, 即核近似.

SPH 方法对光滑函数有一系列要求, 例如

(1) 正则化条件

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1 \quad (4)$$

(2) 当光滑长度趋向于零时具有狄拉克函数性质

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (5)$$

(3) 对称性条件

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0 \quad (6)$$

(4) 紧支性条件

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \kappa h \quad (7)$$

式 (7) 中  $\kappa$  为点  $\mathbf{x}$  处光滑函数相关的常数,  $\kappa h$  确定了光滑函数的有效范围 (即支持域). Liu 等 [5,6] 综合研究了光滑函数不同的要求及特征, 并且提出了构造光滑函数的广义方式.

$f(\mathbf{x})$  的离散形式的粒子近似是对相关粒子  $i$  支持域内所有粒子进行加权求和 (见图 1)

$$\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j) W_{ij} \Delta v_j \quad (8)$$

式中,  $W_{ij} = W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, h)$ ,  $\Delta v_j$  是粒子  $j$  所对应的体积.  $N$  是计算区域所有的粒子数.  $\Delta v_j$  经常用质量-密度比  $m_j/\rho_j$  代替.

对导数的核近似可以通过用相应的导数替代式 (3) 中的函数, 分步积分, 并忽略边界项而得到

$$\langle f_{i,\alpha} \rangle = \int f(\mathbf{x}) W_{i,\alpha} d\mathbf{x} \quad (9)$$

式 (9) 中  $W_{i,\alpha}(\mathbf{x}) = \partial W_i(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}^\alpha$ ,  $f_{i,\alpha} = (\partial f / \partial \mathbf{x}^\alpha)_i$ ,  $\alpha$  是空间向量指标, 从 1 到  $d$  ( $d$  为空间维数). 导数的粒子近似为

$$\langle f_{i,\alpha} \rangle = \sum_{j=1}^N f_j W_{i,\alpha} \Delta v_j \quad (10)$$

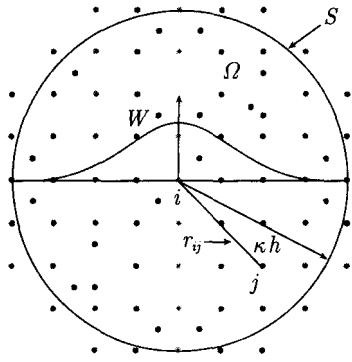


图 1 二维空间 SPH 粒子近似示意图.  $W$  为光滑函数, 支持域为  $\kappa h$ ,  $S$  为计算区域  $\Omega$  的表面

### 2.2 SPH 方法的精度

在早期的文献中, 就近似格式而言, SPH 通常被认为是二阶精度的方法 [7]. 对式 (3) 右边在  $x$  处进行泰勒展开, 仅保留一阶导数, 可以得到

$$\begin{aligned} \langle f(x) \rangle = & \int_{\Omega} [f(x) + f'(x)(x' - x) + \\ & r((x' - x)^2)] W(x - x', h) dx' = \\ & f(x) \int_{\Omega} W(x - x', h) dx' + f'(x) \cdot \\ & \int_{\Omega} (x' - x) W(x - x', h) dx' + r(h^2) \end{aligned} \quad (11)$$

式中,  $r$  为泰勒展开的余项. 因为光滑函数满足正则化条件和对称性条件, 式 (11) 可写成

$$\langle f(x) \rangle = f(x) + r(h^2) \quad (12)$$

因此就核近似而言, SPH 方法具有二阶精度.

然而, 式 (12) 未必对所有的情形都成立. 例如, 当某个粒子临近计算区域边界时, 粒子的支持域与计算区域相交, 支持域被边界截断 (见图 2), 正则化条件和对称性条件都不能满足, 因此函数的 SPH 核近似不具有二阶精度.

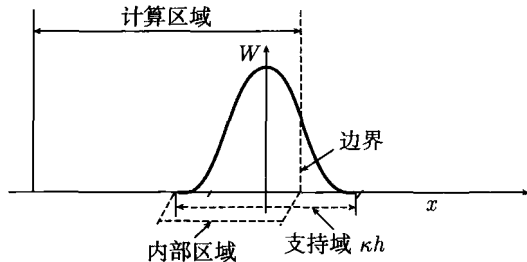


图 2 粒子的支持域与计算区域相交. 支持域被边界截断, 导致光滑函数的正则化条件被破坏. 函数的核近似不再具有二阶精度

利用 SPH 方法对偏微分方程进行近似, 其精度最终取决于离散形式的粒子近似, 而非连续形式的核近似. 当整个系统从连续的计算区域由离散的粒子代表时, 在数值计算方面又带来了更多的挑战. 除了与相关的核近似对应的粒子近似格式外, 粒子的分布形式、光滑函数的选取和光滑长度的范围等等对计算的精度可能有可观的影响. 这就涉及到了 SPH 方法的连续性. 另外, 除了近似格式的精度外, 边界处理方法也直接影响到 SPH 数值模拟的整体计算精度. 下面就 SPH 近似格式的精度 (连续性) 和边界处理方法进行阐述.

### 3 SPH 方法的连续性

SPH 方法的精度由核近似和粒子近似不同格式所决定, 并受到众多因素的影响. 理论上, 任何数值格式都应该尽可能地逼近所近似的物理问题. SPH 等无网格粒子方法可以借鉴有限元方法中的连续性分析理论, 对连续及离散形式的数值格式进行分析. 如果一个无网格粒子方法的近似格式能够精确地再生 (或重构) 一个达到  $k$  阶的多项式, 那么这个近似格式具有  $k$  阶或  $C^k$  阶连续性 [8].

#### 3.1 核近似的连续性

应用 Taylor 展开, 可以对 SPH 的核近似进行广泛的分析. 在式 (11) 中, 如果右侧保留至  $n$  阶导数, 对展开式子加以整理可得

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{k=0}^n A_k f^{(k)}(x) + r_n \left( \frac{x - x'}{h} \right) \quad (13)$$

式 (13) 中  $A_k$  为系数

$$A_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\Omega} (x - x')^k W(x - x', h) dx' \quad (14)$$

如果 SPH 核近似要精确近似任意场函数到  $n$  阶 (即  $\langle f(x) \rangle = f(x)$ ), 比较  $f(x)$  与  $\langle f(x) \rangle$  (式 (13) 右侧), 可以得到

$$\begin{aligned} M_0 = & \int_{\Omega} W(x - x', h) dx' = 1 \\ M_1 = & \int_{\Omega} (x - x') W(x - x', h) dx' = 0 \\ M_2 = & \int_{\Omega} (x - x')^2 W(x - x', h) dx' = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\vdots$$

$$M_n = \int_{\Omega} (x - x')^n W(x - x', h) dx' = 0$$

式(15)中 $M_k$ 为第 $k$ 阶动量矩.因此,如果SPH核近似要近似任意场函数到阶精度,SPH光滑函数必须满足式(15)所表示的一系列积分形式的连续性条件.利用这些连续性条件并考虑到诸如边界条件、光滑性和分段等因素,可以构造特殊形式的光滑函数<sup>[5]</sup>.

在一般的无网格方法中,权函数可以为负<sup>[9-11]</sup>,而在流体动力学问题的研究中,传统的光滑函数一般取非负函数.因为负光滑函数可能导致计算过程之中出现负的物理参数如负能量、负质量、负密度等等,违背物理特性.如果光滑函数非负,式(15)中第3式(二阶动量矩)显然不能成立(除非 $W=0$ ).这样传统的采用非负光滑函数的SPH方法核近似最高就是二阶精度,具有一阶连续性.而二阶动量矩 $M_2$ 的大小在一定程度上代表了SPH核近似的精度. $M_2$ 越小,SPH核近似越精确.

式(15)中积分形式的连续性条件未必在任意场合下成立.如果粒子的支持域在计算区域内部,式(15)成立.相反,如果粒子的支持域与计算区域相交,支持域被边界截断(见图2),式(15)就不能成立.因此对于经典SPH方法而言,只有在计算区域内部,核近似才是二阶精度的.而对于边界区域,核近似只有一阶精度.

### 3.2 粒子近似的连续性

式(15)代表了核近似的连续性条件,而其对应的SPH粒子离散形式为

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta v_j &= 1 \\ \sum_{j=1}^N (x_i - x'_j) W_{ij} \Delta v_j &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^N (x_i - x'_j)^n W_{ij} \Delta v_j &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)代表了粒子近似的连续性条件.如果所构造的SPH粒子离散格式满足式(16),这一SPH粒子离散格式就能精确近似任意场函数到 $n+1$ 阶精度,即粒子近似具有 $n$ 阶连续性.

积分形式的连续性条件成立未必能保证对应的离散形式连续性条件也成立.除了与相关的核近似对应的粒子近似格式外,粒子的分布形式(位置及大小)、光滑函数的选取、光滑长度的范围等

等对计算的精度可能有可观的影响.式(16)中第一和第二式实际上是离散形式的正则化条件及对称性条件.对于简单的一维情形而言,如果粒子规则分布(粒子大小一致,位置规则分布),采用对称形式的光滑函数,光滑长度为粒子间距,对于内部粒子(支持域在计算区域中),离散形式的正则化条件 and 对称性条件成立<sup>[6,12]</sup>.因为正则化条件和对称性条件实际上反映了数值格式近似常数以及线性函数的能力,即零阶和一阶连续性.因此相关的SPH粒子近似具有二阶精度,或一阶连续性.相反,如果粒子不规则分布,粒子的支持域与计算区域交叉(见图3),离散形式的正则化条件和对称性条件未必成立.SPH粒子离散格式不满足正则化条件,那么此SPH粒子近似不具有零阶连续性.

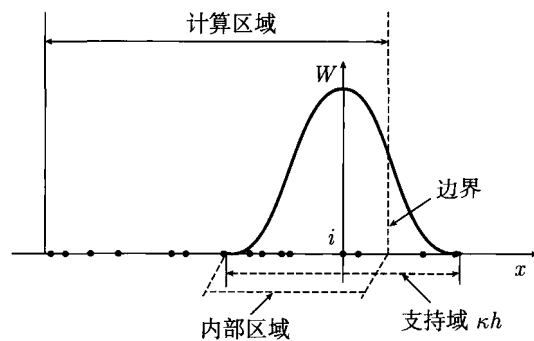


图3 SPH粒子近似不连续示意图

综上所述,SPH方法的精度由核近似和粒子近似不同格式所决定.满足核近似连续性未必满足粒子近似的连续性.相关的核近似及其对应的粒子近似格式,粒子的分布形式(位置及大小)、光滑函数的选取、光滑长度等都对SPH计算的精度有影响.只有在某些特殊的情形下,传统的SPH方法粒子近似才具有二阶精度.

### 3.3 恢复粒子近似连续性的数值方案

在传统的SPH计算中,初始的粒子一般规则分布,质量一致(粒子大小相等).随着计算的进行,粒子分布逐渐变得紊乱不规则,每个粒子的密度随压力应力变化逐渐演变,因而每个粒子的大小也逐渐不一.因此传统的SPH粒子近似格式很难保证一阶甚至是0阶连续性,从而不能精确再生线性函数甚至常数.这也是导致传统SPH方法粒子近似格式精度偏低的根本原因.随着SPH方法的不断发展和完善,各种粒子近似的格式不断涌现出来.这些改进格式大多着眼于恢复传统SPH方法粒子近似的连续性,从而改善其计算精度.一些改进方案中涉及逐点重新构造新的光

滑函数, 从而使其满足式 (16) 代表的粒子近似的连续性条件. 这些逐点重新构造新的光滑函数 (或权函数) 可能在局部区域为负, 也可能不满足对称性条件. 这些改进方案大多基于弱形式, 一般用于各类固体力学问题 [8,13]. 另外一类改进格式涉及在保留传统的光滑函数 (非负、对称、单调递减) 的前提下, 改造近似方式. 这类改进格式大多基于强形式, 近似偏微分方程, 一般用于各类流体动力学问题. 本文主要针对这类改进格式进行讨论.

早期的 SPH 文献中一般采用对称或者反对称形式的 SPH 近似格式 [7,14]. 考虑到传统光滑函数导数的反对称性, 即  $\sum_{j=1}^N W_{i,\alpha} \Delta v_j = 0$ , 式 (10) 可以

写成对称的形式

$$\langle f_{i,\alpha} \rangle = \sum_{j=1}^N (f_j + f_i) W_{i,\alpha} \Delta v_j \quad (17)$$

或者写成反对称的形式

$$\langle f_{i,\alpha} \rangle = \sum_{j=1}^N (f_j - f_i) W_{i,\alpha} \Delta v_j \quad (18)$$

典型的例子是在近似 N-S 方程压力梯度  $\Delta p$  时采用如下的对称形式

$$\langle \Delta p \rangle_i = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (19)$$

或者

$$\langle \Delta p \rangle_i = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (20)$$

值得注意的是,  $\sum_{j=1}^N W_{i,\alpha} \Delta v_j = 0$  未必严格成

立, 与光滑函数、光滑长度和粒子分布等因素密切相关, 这也正是传统的光滑函数不具备零阶连续性的表现. 因此式 (17) 及 (18) 实际上是以近似光滑函数时的粒子不连续性来抵消近似场函数时的粒子不连续性. 对于很多情形这种对称或反对称形式的改进方案能提高原始方案的精度, 并逐渐成为一种标准形式的改进格式. 然而 Ma 等 [15] 的研究表明, 这种标准形式的改进方案, 未必比最早方案更加精确 [16].

基于泰勒分析, Chen 等 [16] 提出了一种改进的 SPH 格式——CSPM (corrective smoothed particle method). 在 CSPM 中, 一维空间任意足够光滑

的场函数  $f(x)$  的核近似为

$$f_i = \frac{\int f(x) W_i(x) dx}{\int W_i(x) dx} \quad (21)$$

对于内部粒子, 因为光滑函数满足正则化条件, 分母为 1, 式 (21) 与式 (3) 一致. 泰勒展开分析式中一阶导数项因为光滑函数对称性条件为零, 所以式 (21) 具有一阶连续性, 二阶精度. 对于边界粒子, 正则化条件和对称性条件都不能满足, 式 (21) 保留了光滑函数积分项 (非 1), 忽略了导数项 (非零), 因此具有零阶连续性, 一阶精度. 而传统的 SPH 方法中, 不但忽略了导数项, 而且假设保留的光滑函数积分项为 1. 因此对于边界粒子, SPH 方法对函数的核近似 (见式 (3)), 不具有零阶连续性, 一阶精度. 很明显, 假设光滑函数在边界上和在内部区域一样都为 1 是传统 SPH 方法边界区域精度低的基本原因.

CSPM 方法对函数的粒子近似为  $f_i = \frac{\sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \Delta v_j}{\sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta v_j}$ . 同样, CSPM 中函数的粒子近似也考虑了光滑函数加权求和的影响, 提高了计算的精度. 对于正规分布的内部粒子, CSPM 方法对函数的粒子近似具有一阶连续性, 二阶精度. 而对于边界粒子和不规则分布的情形, 只有零阶连续性, 一阶精度.

CSPM 中对导数的近似可在函数的泰勒展开式两边同时乘以光滑函数的在各个空间方向的导数, 得到相应的核近似和粒子近似的式子, 联立求解, 可以得到多维空间 CSPM 方法中对函数各个方向的导数的核近似和粒子近似 [16]. 值得指出的是, CSPM 在提高了精度的同时, 需要更多的计算时间. 另外 CSPM 已被证实能在一定程度上改善传统 SPH 方法数值不稳定性 [17-18].

另外一种比较常见的恢复粒子近似连续性的方案是逐点构造光滑函数, 如 Liu 等 [19] 提出的再生核粒子方法 (reproducing kernel particle method, RKPM) [19] 和 Liu 等 [20] 提出的光滑函数构造及粒子近似方案. 其共同特点是, 对于确定的粒子及其临近相关粒子, 可以通过求解矩阵方程式重新构造一个与点的位置和方向有关的光滑函数, 使其满足离散格式的  $k$  阶连续性. 传统的光滑函数只取决于粒子间的距离, 而逐点构造的光滑函数取决于相互作用粒子之间的距离及其位置.

在传统的 SPH 方法中,对函数及其各方向的导数的核近似和粒子近似都是分别独立进行的。而在 CSPM 方法中,对函数的核近似和粒子近似与其导数的核近似和粒子近似是独立进行的,然而,各个空间方向的导数的核近似和粒子近似是耦合在一起,联立求解的。在泰勒展开分析过程中,如果把函数的核近似和粒子近似与其导数的核近似和粒子近似都耦合在一起,联立求解,可以得到一种新的核近似和粒子近似方案。基于这一思想,Liu 等<sup>[21]</sup>和 Zhang 等<sup>[22]</sup>分别提出了有限粒子法 (finite particle method, FPM) 和修正光滑粒子动力学 (modified smoothed particle hydrodynamics, MSPH),并分别把 FPM 和 MSPH 应用于计算流体力学与固体力学相关领域。在该方案中,如果泰勒展开忽略了二阶导数项,保留了一阶导数,所推导出来的核近似和粒子近似方案都具有一阶连续性和二阶精度,并且不受边界区域截断、粒子分布、光滑函数选择的影响,因为对于各种情形,场函数的一阶导数和光滑函数及其导数的积分及叠加求和的影响都已经被加以考虑。在方法的实施中,可以用一套非线性相关的基函数代替光滑函数  $W$  及其一阶导数,而光滑函数  $W$  及其一阶导数只是这种近似方案中一种可能的基函数选择而已。如果泰勒展开过程中保留至高阶的导数项,则需要更多的基函数来构造相关联的方程,从而具有更高的精度。相应的核近似和粒子近似公式更加复杂,并且需要更多的计算时间。

#### 4 SPH 方法边界处理

与有限元及有限差分等基于网格的方法类似,除了数值近似格式外,边界条件的处理也直接影响到 SPH 方法模拟实际问题的精度。不同于网格方法,SPH 使用可以移动的粒子系统代表所模拟的连续介质,给边界的处理和边界条件的实施带来了困难。长期以来,固壁边界与物质界面的边界处理方法已经成为 SPH 方法研究与应用中的难点与热点。

在固壁边界处理方面,目前还没有公认较好的通用方法。已有的方法一般缺乏严格的精度分析,并且很难兼顾计算的准确性、计算区域的复杂性和计算过程中固壁边界以及流动区域变化的灵活性。这些处理方法可大致分为 4 类:边界力法<sup>[23]</sup>、镜像法<sup>[24]</sup>、反射法<sup>[25]</sup>和耦合边界法<sup>[26-27]</sup>。在边界力法中,根据固壁边界的形状和

特点,可以在固壁边界上设置一系列相对位置固定的边界粒子,固定的边界粒子对流动粒子施加一个沿粒子中心线方向的作用力。这一作用力应该是纯排斥性的,并随粒子间距离的减小而增大,从而阻止流动粒子穿越固体壁面。边界力方法能够处理复杂的边界条件,但是作用力的选择往往依赖经验与实际的问题。边界力过小不能有效防止粒子穿透固壁边界,边界力过大在边界区域可能产生扰动,甚至导致流动粒子脱离固壁边界,形成空腔区域。在镜像法中,通过对边界区域流动粒子沿固壁边界进行镜像映射获取固体区域的固壁边界粒子。边界粒子具有与对应的流动粒子相同的质量和密度,大小相等方向相反的速度。镜像法具有较好的守恒性和计算精度,但是很难推广到复杂以及高度不规则的计算区域。在反射法中,当流动粒子抵达固壁边界区域一定范围内(边界反弹层)时反弹回内部流动区域,反弹后根据不同的假设(镜面反射、弹跳反射)可以实施滑移或无滑移等不同的边界条件。反射法简单灵活,适用于复杂的边界区域,但是计算精度不能严格保证,并且受到反弹层厚度的影响。在耦合边界法中,在固体障碍区域布置一系列边界粒子,这些粒子可以规则布置,也可以通过随机分布并进行 SPH 计算达到平衡状态而得到。具有与临近的流动粒子相同的属性(如密度、黏性)。边界粒子参与控制方程的求解,从而将边界条件耦合到控制方程的求解过程中。耦合边界法比较灵活,适用于复杂的边界形状。但是可能在局部区域个别流动粒子非物理性地穿透固体壁面,因此在一些具体问题中,耦合边界法往往可以与边界力法结合起来,一方面保证计算的精度,另一方面防止穿透。

当 SPH 计算涉及多种介质时,必须对介质交界面进行适当的处理,以确保 SPH 近似的精度并且实施交界面边界条件。这种多物质交界面的处理包括:固体-固体之间的接触和流体-流体之间的界面。作为不同物质间的间断面,两侧来自不同物质的粒子根据不同的情形应该满足相关的交界面条件,如速度和应力(或部分分量)的连续性。SPH 方法中物质交界面条件不能像有限差分等网格方法一样严格实施,而是基于物质界面两侧粒子的相互作用,通过引入合适的界面处理算法隐式地实施。因此需要对交界面进行有效的处理。

在 SPH 计算中,粒子的质量一般维持不变,而密度随系统的演变而变化,因此粒子的大小也不

断演变. SPH 粒子的不同形状及大小对交界面位置的精确确定和交界面条件的实施带来了一定的困难. 随着 SPH 方法的发展, 出现不同的物质界面处理算法<sup>[28-30]</sup>, 典型的 SPH 物质界面处理算法包括 3 个步骤: 确定物质界面位置; 确定不同介质临近粒子间的接触深度; 在接触的粒子间施加排斥力. SPH 方法中, 粒子跟随物质运动, 物质界面可方便确定. 而来自不同物质的粒子接触与否, 可以通过检查粒子间距离是否小于对应粒子的作用范围而判断. 两接触粒子间所施加的惩罚性排斥力与接触深度相关, 一般也取为纯排斥性的, 并随粒子间距离的减小而增大. 目前还没有比较通用的物质界面处理算法, 往往依赖经验与实际的问题.

另外, 界面两侧介质的特性如果差异比较大时, SPH 计算结果在界面附近会产生比较大的数值扰动. Colagrossi 和 Landrini<sup>[24]</sup> 认为大的密度差异是导致传统 SPH 方法数值结果扰动的主要因素, 因此提出了一些改进措施, 包括改进的 SPH 数值格式, 密度每隔适当步数重新初始化, 改进状态方程以进行界面尖锐度控制等等, 并就液气两相界面流动得到了比较好的结果. 因为密度在界面上不连续, 而传统 SPH 方法中密度的求解依赖于每个粒子支持域内的光滑近似过程. 界面附近支持域被截断导致虚假密度和虚假应力. Hu 等<sup>[31]</sup> 因此提出了一种模拟多相不可压流动的 SPH 格式, 应用粒子密度修正光滑函数, 临近粒子仅对考虑的粒子有体积贡献而没有密度贡献, 避免了密度差异导致的数值扰动.

## 5 SPH 方法的稳定性

### 5.1 张力不稳定

传统的 SPH 方法在计算过程中, 可能遇到数值稳定性问题. 一个比较突出的是模拟固体介质中 SPH 方法的拉伸不稳定性 (tensile instability)<sup>[17]</sup>. 典型的例子是如果在初始规则分布、应力一致的一组粒子上施加张力, 利用传统的 SPH 核近似与粒子近似的算法, 在极短的时间内会产生不符合物理规律的极大变形, 甚至导致粒子的飞散或聚集.

Swegle 等<sup>[17]</sup> 对传统 SPH 方法在一维情形下做了 von Neumann 稳定性分析. 结果表明, SPH 方法的稳定性与应力状态及光滑函数的二阶导数密切相关. 值得指出的是, 这一结论是针对一维

空间在粒子规则分布的情形下得到的. 空间的多维性, 粒子分布的无序性以及粒子随时间不断移动等等因素导致实际 SPH 方法中数值稳定性变得更为复杂, 还没有比较完善的稳定性分析结论. Morris<sup>[32]</sup> 最早提出合理选择光滑函数以改善数值不稳定, 这一方案虽然有时能缓解数值不稳定, 却并非经常有效. Liu 等<sup>[5]</sup> 构造出了一种四次光滑函数, 与三次样条光滑函数形状接近, 却具有更光滑的二阶导数和更小的二阶动量矩. 因此对于传统的 SPH 方法而言, 具有更好的稳定性和精度. CSPM 算法也能在一定程度上改善传统 SPH 方法的数值不稳定. Monaghan 在控制方程中添加了人工应力 (artificial stress) 项, 简洁易行, 能有效的消除数值不稳定. 典型的解决方案还包括拉格朗日型核函数法<sup>[33]</sup> 和守恒光滑法 (conservative smoothing)<sup>[34]</sup>. 傅学金等<sup>[35]</sup> 针对固体介质中 SPH 方法的拉伸不稳定性问题进行了比较系统的综述.

SPH 方法数值不稳定的根本原因在于其配点法的本质: 仅仅应用所代表介质的粒子系统进行估算和近似, 从而导致计算场函数时插值点严重不足. 这种情形与 EFG (element free Galerkin)<sup>[9]</sup> 方法中节点积分 (node integration) 的情形类似. 而在 EFG 方法中, 数值不稳定性可以通过在 Galerkin 弱形式上添加稳定性加以解决. 另外, SPH 配点方式也与有限差分方法中同节点差分类似. 在有限差分方法中, 如果在同一套网格系统对导数进行差分估算, 可能导致不真实的估算结果<sup>[36]</sup>. 典型的解决方案是使用另外一套或者多套网格与原有的网格交错求解. 并且不同的物理量 (如速度、压力等) 在不同的网格节点上进行估算和近似. 这一思想也可以推广到 SPH 方法中, 除了使用代表介质的粒子外, 可以引入另外一套粒子系统. 两套粒子系统求解不同的物理参数. Dyka 等<sup>[37]</sup> 和 Randles 等<sup>[38]</sup> 提出的应力点法正是基于这一思想. 一套速度粒子估算粒子速度, 另外一套应力粒子估算速度以外的物理量 (见图 4).

另外, 传统 SPH 方法的数值不稳定一般是潜在的, 不易察觉, 因为在很多的情形下, 固体力学模型中材料本身的不稳定 (破坏、裂纹扩展等) 比 SPH 方法数值不稳定发展得更快<sup>[38]</sup>. 另外, SPH 方法数值不稳定和材料本身没有绝对的关系, 不仅局限于含材料强度的固体力学问题, 在流动动力学问题中也存在<sup>[39]</sup>.

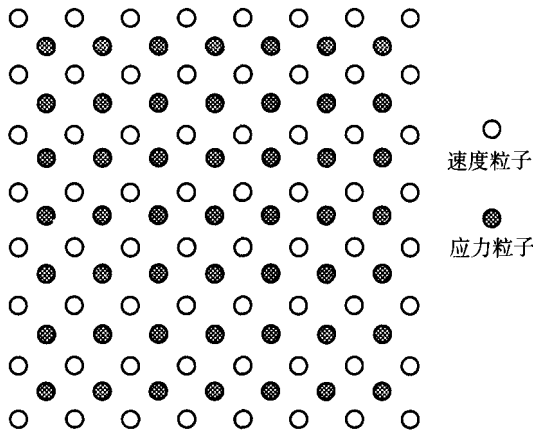


图4 一种可能的两套粒子布置方案

## 5.2 粒子分布与数值不稳定

粒子分布与传统 SPH 方法的精度密切相关。另外,粒子的无规则分布,甚至是局部区域的紊乱,可能导致可观的误差。误差在计算过程中逐渐传播放大,从而导致整个计算上的数值不稳定现象。

众多已有的研究表明,适当选择模拟参数,传统 SPH 方法能够比较准确地计算 Poiseuille 流动<sup>[6]</sup>。刘谋斌等<sup>[40]</sup>通过分析 Poiseuille 流动,揭示了传统 SPH 方法粒子分布与数值不稳定的关系。图5显示了利用传统 SPH 方法在粒子初始均匀分布时模拟 Poiseuille 流动所得到的流动截面上速度曲线。在  $t = 0.01\text{ s}$ ,  $0.1\text{ s}$  及  $1.0\text{ s}$  时,计算结果与解析解非常吻合。在  $1.0\text{ s}$  时,流动完全发展到稳定状态,计算结果达到稳定解。随后继续进行 SPH 计算,所得的结果大致围绕稳定解小幅度震荡。然而,当超过  $10.0\text{ s}$  以后,所得 SPH 计算结果逐渐偏离稳定解。随着计算时间延长,所得结果完全远离稳定解。显示传统的 SPH 方法即使在粒子初始规则分布时,长时间模拟 Poiseuille 流动会存在数值不稳定。

进一步的研究表明,采用不同的固体边界处理方式、以及选择不同的光滑函数和光滑长度并不能避免这种数值不稳定。通过观察各模拟阶段粒子分布情况,发现在  $10.0\text{ s}$  以后,粒子的分布逐渐紊乱,变得无规则。随后数值误差逐渐放大,最终产生数值不稳定。如果初始粒子无序分布,传统 SPH 方法所得的计算结果在早期模拟过程中就出现数值震荡,随后数值偏差越来越大,很快偏离了解析解,表现出数值不稳定。因此粒子的无序分布直接导致了传统 SPH 方法数值模拟的不稳定。如果应用上文所提及的有限粒子法,即使粒子分布高度无序,长时间模拟 Poiseuille 流动所得的流动

形态完全准确,计算结果均与解析解非常吻合,误差在  $1.0\%$  以内。如果增加粒子数目,计算精度还会进一步提高,而且计算稳定,没有因为粒子的无序分布而产生数值不稳定。

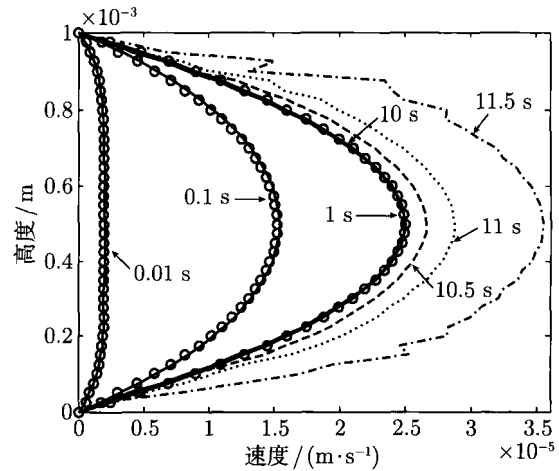


图5 传统 SPH 方法在粒子初始均匀分布时模拟 Poiseuille 流动得到不同时刻计算结果与对应时刻解析解(圆点)的比较

## 6 SPH 方法的计算效率

与分子动力学和耗散粒子动力学等其他粒子方法类似,SPH 模拟过程计算时间大部分消耗在计算粒子对间的相互作用。SPH 计算中一个重要的课题就是如何地缩短计算时间,提高计算效率,以进行大规模工程科学计算。改进 SPH 模拟计算效率可以从 3 方面着手:构造高效的临近粒子搜索算法;构造高效的并行算法;构造高效的 SPH 近似算法。

### 6.1 临近粒子搜索算法

在 SPH 方法中,光滑函数具有一个支持域。支持域一般取为以  $\kappa h$  为半径的圆形(或球形)。一般将包含在支持域中的粒子称为相关粒子的最近相邻粒子(nearest neighbor particle, NNP)。寻找最近相邻粒子的过程通常称为最近相邻粒子搜索。SPH 方法中给定粒子的最近相邻粒子是随时间的变化而改变的,因此在每一时间步都必须进行临近粒子搜索,然后才能确定并计算粒子对之间的相互作用。而粒子对及相互作用的信息可以存储在数据结构中,为下一步的运算备用。

最常用的临近粒子搜索算法有 3 种:全配对搜索法(all-pair search)、链表搜索法(linked-list search algorithm)和树形搜索法(tree search



algorithm). 全配对搜索法简单直接,但对相关粒子需要遍历计算区域所有的粒子,复杂度阶数为  $O(N^2)$ ,即耗时与粒子数平方成正比,增加粒子数会大幅度增加计算时间,非常不经济.一般只有在计算简单问题或者测试算法时使用,涉及较少的粒子数.链表搜索法将计算区域根据支持域大小平均分为一定数量的子区,粒子分布在相关的子区内,搜索临近粒子只需要在相关粒子所在的子域或者相邻的子区中进行.如果每个单元内的平均粒子数量足够小,则链表搜索法的复杂度阶数为  $O(N)^{[41]}$ ,即耗时与粒子数成正比.改进型的链表搜索法能使搜索的结果在 10 到 20 个时间步中保持大致有效<sup>[42]</sup>,能更进一步提高计算效率.链表搜索法存在的问题是,当光滑长度是可变的时候,网格空间就不能适应每一个粒子,此时若再应用链表搜索法搜索效率会很低<sup>[6]</sup>.树形搜索法非常适宜求解具有可变光滑长度的问题.这种算法是通过粒子的位置来构造有序树,并判断是否为临近粒子,其复杂度的阶数为  $O(N \lg N)$ .结合树形搜索法的 SPH 方法是非常健壮高效的,特别适用于求解具有可变光滑长度和粒子数量庞大的问题.

## 6.2 高效的并行算法

即使使用高效的临近粒子搜索算法,如果涉及的粒子数非常巨大,SPH 方法仍然非常耗时.现今在工作站(标量处理机)进行的模拟一般局限于百万个粒子左右,并且可能需要数天乃至数月的运算时间才能获得所模拟问题的具有意义的时间历程.对于千万或上亿级别粒子数的情形,计算时间更长.

在 SPH 方法提出后,已有许多不同的并行计算技术被用于提高 SPH 的计算性能<sup>[43-44]</sup>.并行程序的一个重要步骤是在多处理机中使用不同的方法来均分计算资源或分解串行程序.若分解是以粒子为基础的,则在模拟时给一群粒子甚至每个粒子分配一个特定的处理器,且这与粒子的空间位置无关.这种分配在概念上非常简单,但需要大量的连接来处理分配在每个独立处理器上的粒子间的相互作用.由于在 SPH 方法中相互作用过程的计算相当频繁,因此所需要的连接数量非常庞大,有可能成为局限整个问题计算效率的主要因素.

并行计算的分解算法大多在所模拟的问题域上进行.根据处理器的数量,可以把计算区域分

解为若干个子域.每个处理器对应于一个子域,分配大致平均数量的粒子,并且负责本子域内粒子的各种运算.当某粒子临近子域边界时,需要把相邻的子域内的临近粒子的信息从与相邻子域对应的处理器复制到负责本子域的处理器.当一个粒子从一个子域移动到另外一个子域时,粒子的相关信息也应当从一个处理器转移到另外一个处理器.增加处理器的数量,或者减少每个处理器对应的粒子数,会相应的降低每个处理器计算所需的 CPU 时间.粒子数增加也会导致处理器之间信息转移及通信所需要的时间,导致 CPU 时间增加.最终并行计算的效率由单个并行处理器最大 CPU 时间所决定.

由北京应用物理与计算数学研究所研制的并行自适应结构网格应用支撑软件框架(J adaptive structured mesh applications infrastructure, JASMIN)框架<sup>[45]</sup>为实施高效 SPH 并行算法提供了一个富有吸引力的选择. JASMIN 框架是一个并行应用支撑软件框架,使用者在无需了解高性能并行计算和共性数值算法细节的前提下,在个人电脑上,通过编写串行的数值计算子程序,实现物理模型和计算方法及问题相关的数值算法,可以研制高效使用大规模并行计算机数百至数千个处理器核的高效并行应用程序.另外也支持程序的高度模块化,通过重用和多人并行开发软件模块,降低程序的研制难度,缩短程序的研制周期.对于 SPH, DPD 及 MD 等粒子形式的离散模拟计算方法,粒子动态移动、粒子计算局部性, JASMIN 高性能计算框架具有比较明显的优势<sup>[46]</sup>.

## 6.3 高效的 SPH 算法

不同的 SPH 算法对应不同的近似格式.改进型的 SPH 算法一般都涉及逐点重新构造权函数,或者逐点通过矩阵转换估算近似场函数及其导数,这些改进型的 SPH 算法计算时间相应会大幅度增加.

例如,传统的 SPH 算法中,对函数及其各方向的导数的核近似和粒子近似都是分别独立进行的.而在 CSPM 方法中,对函数的核近似和粒子近似与其导数的核近似和粒子近似是独立进行的,然而,各个空间方向的导数的核近似和粒子近似是耦合在一起,联立求解的.在有限粒子法 FPM 中,函数的核近似和粒子近似与其导数的核近似和粒子近似都耦合在一起,联立求解.不同的算法复杂程度导致了 CPU 时间的不同.对于串行算法而

言, FPM 所需要的 CPU 时间多过 CSPM 所需要的 CPU 时间, 而传统的 SPH 算法所需时间最少. 因此, 构造合适的 SPH 算法对提高计算效率也是非常重要的.

另外, 对于某些特定问题可以有针对性地提出高效的解决方案. 例如, 对于微管道流动, 物理参数在垂直流动方向的分布和变化规律非常重要, 而微管道流动中流动方向的尺度远大于垂直流动方向的空间尺度. 如果应用有限差分方法模拟类似问题, 可以根据流动的不同特性在不同区域使用疏密程度不同的网格 (流动方向网格可以较粗, 而垂直流动方向网格必须较密). 如果在整个区域使用与垂直流动方向相同的网格疏密程度, 计算时间无疑更长, 计算效率较低.

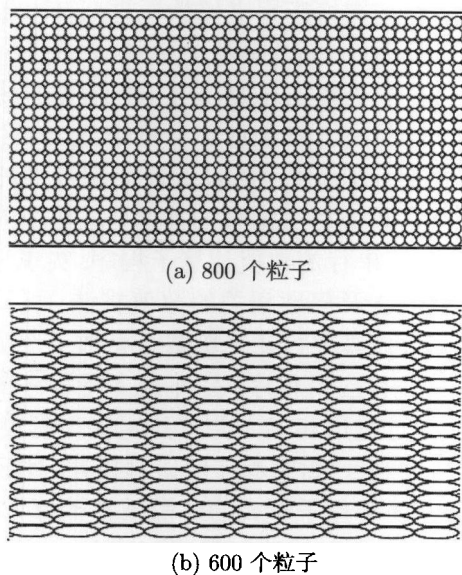


图 6 传统的 SPH 算法和 ASPH 算法模拟微管流动. ASPH 方法可以在流动方向设置更大的光滑长度, 可以使用较少的粒子数目达到传统 SPH 方法使用较多粒子数才能达到的计算精度

同理, 传统的 SPH 方法粒子在不同空间方向使用相同的光滑长度, 每个粒子的支持域为圆形, 因此在流动方向必须根据管道的长宽比设置与垂直流动方向粒子数相当的粒子数, 这样往往导致粒子数量非常多, 计算时间长. 对于这类问题, 可以使用自适应形式的 SPH (adaptive SPH, ASPH) 算法<sup>[47]</sup>, 在不同的方向上使用不同的光滑长度, 粒子的支持域就从圆形变成椭圆形, 对于微管流动问题, 可以在流动方向设置更大的光滑长度. 图 6 显示的是利用传统的 SPH 算法和 ASPH 算法模拟微管流动的一个实例. 在 ASPH 方法中, 流动方向的光滑长度是垂直流动方向的光滑长度的 4 倍,

因此可以仅使用 200 个粒子 (图 6(b)), 就能达到了传统 SPH 中使用 800 个粒子 (图 6(a)) 才能达到的计算精度. 因此计算时间大幅减少, 计算效率显著提高.

## 7 SPH 方法应用

应用 SPH 方法核近似和粒子近似的概念, 可以对计算域与运动的控制方程 (强形式或弱形式) 进行基于粒子体系的离散和近似. 例如, 对于拉格朗日形式的广义 Navier-Stokes (N-S) 方程

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} \\ \frac{Dv^\alpha}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \\ \frac{De}{Dt} &= \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \end{aligned} \quad (22)$$

其 SPH 离散形式可以为

$$\begin{aligned} \frac{D\rho_i}{Dt} &= \sum_{j=1}^N m_j v_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \\ \frac{Dv_i^\alpha}{Dt} &= - \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \\ \frac{De_i}{Dt} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) v_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \end{aligned} \quad (23)$$

上述两式中, 密度  $\rho$ , 速度分量  $v^\alpha$  和总应力张量  $\sigma^{\alpha\beta}$  都是因变量. 空间坐标  $x^\alpha$  和时间  $t$  为自变量.  $\alpha$  和  $\beta$  是方向下标, 从 1 到  $d$ , 利用指标重复进行求和, 而总的时间求导是在拉格朗日框架中进行. 总应力张量  $\sigma$  由两部分组成, 即各向同性压力  $p$  和剪切应力  $\tau$

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} \quad (24)$$

式 (23) 与 (24) 表明, SPH 方法中粒子的运动由压力与剪切应力梯度作用产生. 而压力与剪切应力的求解方式与计算模型对应于不同的问题, 如可压缩流动, 不可压缩流动, 以及弹塑性材料的变形与失效.

### 7.1 可压缩流动

在求解可压缩流体问题的标准 SPH 方法中, 粒子的压力通过状态方程由粒子自身的密度和內能来计算的. 例如, 空气的状态方程为

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (25)$$

式中  $\gamma$  为常数. 另外在高能炸药爆炸及水下爆炸模拟中, 必须考虑爆炸气体及水的可压缩性. 每个粒子的压力也因此通过相应的状态方程与密度和能量求解.

早期 SPH 应用于天文物理学, 因为天体的群体运动可以由可压缩流体近似. 随后 SPH 方法逐渐推广到其他可压缩流动领域, 如高能炸药爆炸及水下爆炸中模拟高温高压爆炸气体及周边水体的动力学特征. 高能炸药爆炸时发生的化学反应能迅速地将初始炸药转变为高压爆炸气体, 对周围的介质产生强烈的压缩. 在整个爆炸过程中, 存在极度大变形、材料高度不均匀性、运动物质交界面、可变形边界和自由表面. 传统的网格方法在爆轰、爆炸及水下爆炸等现象方面存在很多困难. 例如, 可以用有限元等网格方法模拟水下爆炸过程中所产生的爆炸气泡的前期的运动特征, 目前还难以模拟气泡的坍塌、破碎、融合、界面不稳定性等复杂的非线性过程.

而 SPH 方法兼具无网格方法与粒子动力学方法的优点, 方便地引入起爆等复杂的物理现象. Swegle 等<sup>[48]</sup>首次利用 SPH 方法结合有限元对水下爆炸进行了数值模拟, 主要研究了所产生的气泡的脉动特征. Alia 等<sup>[49]</sup>使用多物质 SPH 方程对爆炸过程进行了模拟研究. Liu 等利用 SPH 方法对高性能炸药的爆轰<sup>[50]</sup>、爆炸气体膨胀<sup>[51]</sup>、水下爆炸以及爆炸效果的增强及减弱<sup>[52-53]</sup>等等开展了一系列研究. 研究范围包括爆轰波、爆炸激波、爆炸气体所产生的气泡在水中的脉动特征、含水层与炸药的接触及非接触型方式减爆(水介质减爆). 研究结果表明, 对于一维 TNT 药条的爆轰, SPH 计算爆轰压力与实验确定的爆轰压力非常吻合. 对于水下爆炸问题, SPH 计算所得一次冲击波幅值和位置与实验结果或基于网格方法的计算结果基本一致, 误差 5%~15%.

目前 SPH 方法在爆轰、爆炸及水下爆炸方面的工作基本上还局限在比较简单的情形(简单的几何区域, 不涉及化学反应以及与外部环境的热量传递). 与基于网格的计算方法相比, SPH 计算结果往往有一定的数值波动, 但是能够方便模拟水下爆炸气泡的坍塌、破碎、融合等网格方法很难模拟的复杂非线性过程. 另外, 水下爆炸与水介质减爆等问题涉及爆炸气体与水的运动界面, 爆炸产生的巨大动能促使爆炸气体强烈压缩周围的水介质. 而在 SPH 计算中, 爆炸气体粒子可能非物理性地穿透水介质. 类似弹塑性材料高速变

形与失效 SPH 数值模拟中的接触算法, SPH 模拟水下爆炸也需要有效的界面处理方法, 可以根据爆炸气体与水介质两种临近粒子间的接触深度对相互作用的粒子对施加沿中心线的排斥力. 一方面保证计算的精度, 另一方面防止非物理性的穿透<sup>[6]</sup>.

## 7.2 不可压缩流动

对于不可压缩流动, 与网格方法中压力求解算法类似, SPH 方法中粒子上的压力可以通过求解压力泊松方程得到. 但是由于 SPH 公式包含定常密度的约束条件, 故而导致最终的方程式过于繁琐. 虽然也有研究人员进行基于求解压力泊松方程从而严格模拟不可压流体流动的研究, 但目前更多的研究倾向于应用人工可压缩性 (artificially compressibility) 模型, 该模型认为任何一种不可压缩流体理论上都可以被视为是轻微的可压缩流体. 因此可以选择一个合适的准可压缩或弱可压缩流体 (weakly compressible fluid) 的状态方程来模拟不可压缩流体的行为. 例如, 在模拟诸如 Poiseuille 问题等低雷诺数流动时, 通常可以使用下列状态方程

$$p = c^2 \rho \quad (26)$$

式中,  $c$  为声速. 在人工压缩率理论中, 声速是一个需要慎重考虑的因素. 若引用实际的声速(例如在标准气压和温度下, 水中的声速为 1480 m/s), 则可用理想不可压缩的人工流体来近似真实的流体. 考虑流体的相对密度变化率  $\delta$

$$\delta = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{|\rho - \rho_0|}{\rho_0} = \frac{V_b^2}{c^2} = M^2 \quad (27)$$

式中  $V_b$  和  $M$  分别是流体整体速度和马赫数. 由于真实的声速相当大, 故相应得到的马赫数非常小, 相对密度差  $\delta$  几乎可忽略. 因此, 为了应用人工可压缩流体近似真实流体, 必须使用比真实值要小很多的声速. 所以对声速的选择一方面要求足够大从而使人工可压缩流体的特性与真实流体充分接近, 另一方面应足够小, 从而使时间步的增量在容许范围内. 一个可行的方案是声速选为流体整体流速的 10 倍左右, 这样流体的相对密度变化率  $\delta$  相应应在 1% 以内.

应用 SPH 方法模拟不可压缩流动一个典型的例子是 Poiseuille 流动. 经典 Poiseuille 流动问题涉及两无限长平板间流体流动现象. 因为该流动问题具有理论解, 所以通常被用来检验新的数值模型. 在 Poiseuille 流动模型中, 流体在分别位

于  $y = 0$  和  $y = l$  的两块平行且无限长的固定平板间流动. 初始静止的流体由于受到体力 (如压力梯度或外力) 的作用而在两平板间逐渐流动, 最终达到稳定状态. 在模拟过程中, 取平板间距离  $l = 10^{-3}$  m,  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 运动黏度系数  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, 单位质量的体积力  $F = 2 \times 10^{-2}$  m/s<sup>2</sup>. 流动达到平衡状态时流体前沿速度为  $V_0 = 2.5 \times 10^{-5}$  m/s. 对应的雷诺数为  $Re = 2.5 \times 10^{-2}$ . 计算区域是  $0.0005$  m  $\times$   $0.001$  m 的矩形. 在粒子规则分布的情形下, 传统的 SPH 方法能得到很好的数值结果. 而对于改进的 SPH 方法 (有限粒子法 FPM) 在粒子规则分布时, 计算所得到的稳定状态最大流速与理论解误差不超过 0.1%. 而当粒子无序分布时, 其计算误差也小于 1% (图 7)<sup>[40]</sup>.

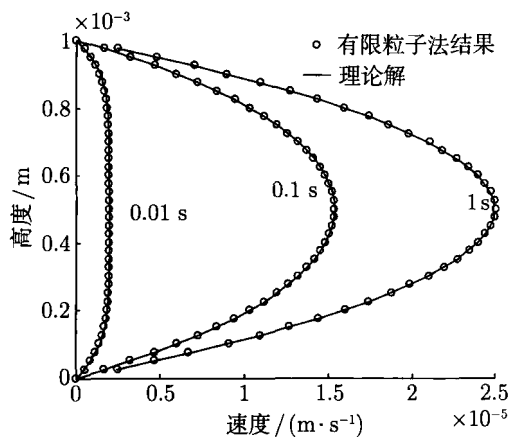


图 7 Poiseuille 流动有限粒子法数值模拟结果与理论解<sup>[40]</sup>

基于人工可压缩的 SPH 模型目前在模拟海洋、海岸及河流水动力学领域水体的运动规律及其与结构的相互作用方面得到了很好的发展. 因为海洋、海岸及河流水动力学涉及比较复杂的特征, 导致相关流动的数值模拟非常困难. 例如, 水波在向岸床传播的过程中不断受到沿途岸基形状的影响, 水波的位置、高度、形状都可能发生变化. 当波浪抵达并且冲击岸床时, 波浪破碎并向内陆迁移从而对内陆可能造成财产破坏和人员损失. 近年来, 光滑粒子动力学 SPH 方法逐渐应用于海洋、海岸及河流水动力学中各类问题的研究, 包括: 波浪力学 (波浪的产生、传播、碎波)、波浪冲击岸床及岸边结构、波浪与河流及海洋结构 (船只、海上平台等) 的相互作用、溃坝、蓄水、泄洪, 以及船体及其他海洋结构中液体的晃荡及其导致的翻覆.

溃坝是 SPH 方法在水动力学方面的最早的应

用领域. 1994 年 Monaghan 就此问题开创了模拟不可压缩流动的 SPH 模型, 通过合理选择状态方程, 将不可压缩流动转化为弱可压缩流动, 从而避免求解压力泊松方程的复杂性, 得到了令人鼓舞的结果<sup>[23]</sup>. Monaghan 随后也研究了方盒从高处跌落水中所导致的孤立波的产生及传播过程, 根据跌落高度的不同, 计算结果与实验观察误差在 3%~18%<sup>[55-56]</sup>. 其他众多的研究人员就溃坝问题进行了更加深入的研究, 其中 Colagrossi 和 Landrini 对 Monaghan 的 SPH 模型进行了改进, 光滑函数正则化, 状态方程考虑了背景压力, 密度每隔适当步数应用移动最小二乘法修正, 所得的波前位置结果与实验观察以及层面设置法 Level-Set 和边界元 BEM 的计算结果高度一致, 并逐渐趋近简化模型分析解 (ritter solution)(见图 8)<sup>[24]</sup>. 与层面设置法及边界元方法不同的是, SPH 方法也能够模拟波前撞击前面水体 (或墙体), 发生翻卷, 产生空穴 (单相) 或气垫 (两相, 水中包裹空气泡), 并导致碎波的各种现象. SPH 模拟所得到的撞击、翻卷、空穴及碎波的形态、大小和位置都与实验观察吻合 (图 9)<sup>[54]</sup>.

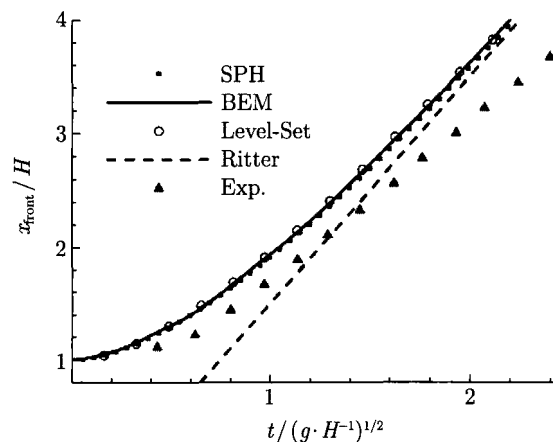


图 8 溃坝问题波前位置 SPH 结果与其他数值结果 (BEM 及 Level-Set)、实验观察 (Exp.) 及简化模型理论解 (Ritter) 的比较<sup>[24]</sup>

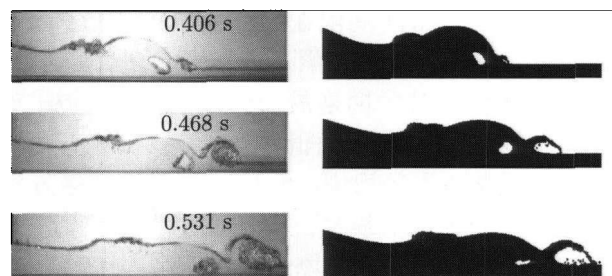


图 9 二维泄水流动水体冲向浅水区, SPH 模拟所得到的撞击、翻卷、空穴及碎波的形态、大小和位置 (右) 都与实验观察 (左) 吻合<sup>[54]</sup>

近年来,应用 SPH 方法模拟波浪力学成为一个研究的热点,涉及波浪的产生、传播、碎波;波浪冲击岸床及岸边结构;以及波浪与河流及海洋结构(船只、海上平台等)的相互作用. Shao 等<sup>[57]</sup>发展了一种适于不可压缩流体的 SPH 模型,并且模拟了近岸孤波的动力学特征. 随后他们引入了湍流模型,进行了碎波及翻覆的模拟<sup>[58]</sup>. Gomez-Gesteira 等<sup>[59]</sup>研究了水波冲击高层建筑<sup>[26]</sup>以及碎波现象. Gotoh 等<sup>[60]</sup>开发了 SPH 湍流模型用以模拟波浪的相互作用<sup>[60]</sup>,以及波浪与悬浮物之间的耦合作用<sup>[61]</sup>. Crespo 等<sup>[62]</sup>进行了利用障碍物减弱水波冲击影响的三维 SPH 研究. Yim<sup>[63]</sup>则研究了垂直柱塞引起的水波问题,并考虑到紊流模型的影响. Cleary 等<sup>[64]</sup>探讨了应用 SPH 方法模拟海啸的可行性.

船体及其他海洋结构在飓风及海浪的环境中产生的晃荡与翻覆(sloshing and overtopping)也可以用 SPH 方法进行模拟. Iglesias 等<sup>[65]</sup>模拟了罐体的翻滚与晃荡. Rhee<sup>[66]</sup>研究了载有液体的容器的晃荡问题,并且考虑了湍流效应. Souto-Iglesias 等<sup>[67]</sup>应用 SPH 模拟评估了液体晃荡的幅度. Anghileri<sup>[68]</sup>研究了储水罐与地面碰撞后涉及流固耦合的晃荡现象. 国内研究人员也在相关领域开展了一些研究工作<sup>[69-70]</sup>,展现了 SPH 方法在液体晃荡研究方面的广阔前景. Vesenjak 与 Ren 应用软件 LS-DYNA 模拟储油箱中液体的晃荡行为,对该软件中拉格朗日网格求解器,欧拉网格求解器, ALE(arbitrary Lagrange Euler)求解器及 SPH 求解器模拟液体晃荡中自由表面位置及某观察点压力计算结果与实验观察进行了比较研究<sup>[71]</sup>. 结果显示, SPH 方法与试验结果最接近,能够模拟整个液体晃荡的全过程,并且计算效率最高. 值得指出的是,软件 LS-DYNA 中 SPH 求解器目前还基于传统的 SPH 方法,其计算精度与改进的 SPH 模型相比还有较大的差距.

基于拉格朗日、无网格粒子方法的内在特征, SPH 在模拟水动力学相关领域具有很大的优势,近年来取得了较大的进展,但还有一系列问题有待进一步研究. 首先是压力的求解. 目前大部分 SPH 模型采用弱可压缩流动模型,通过状态方程联系压力和密度,将不可压流动视为弱可压流动. 状态方程及其相关参数的选择往往依赖经验甚至具体的问题. SPH 弱可压流动模型简单快捷,所得到的压力值往往比较粗糙. 小部分 SPH 文献严格模拟不可压缩流动,能够得到准确的压力分布. 但

是即使应用最简单的 SPH 近似格式求解压力泊松方程仍然需要大量的计算时间. 如何准确有效地求解压力是应用 SPH 方法模拟水动力学问题的一个重要课题. 其次是合理的紊流模型. 在水动力学众多问题中往往需要考虑紊流效应. 直接数值求解(direct numerical simulation, DNS)对于大尺度计算不太现实,目前一些 SPH 文献已经开始引入大涡模拟(large eddy simulation, LES)及雷诺平均法(Reynolds averaged Navier-Stokes simulation, RANS),但是 SPH 方法中关于紊流模型的研究在这一方面的工作还处于起步的阶段,目前还缺乏相应的文献研究紊流效应与粒子速度的时空脉动之间的关系.

### 7.3 弹塑性材料高速变形与失效

对于牛顿流体,剪切应力与应变率成正比. 而对于非牛顿流体与弹塑性固体材料,剪切应力与应变及应变率相关(介质本构方程). 通过实现对应的弹塑性材料的本构方程并考虑到合适的状态方程与温度变化模型及失效准则,可以应用 SPH 方法对弹塑性材料的高速变形与失效进行分析<sup>[6]</sup>.

弹塑性材料高速变形与失效的情形在工程科学领域普遍存在,典型的例子包括:国防工业中子弹或导弹对军事目标的穿透(穿甲)与反穿透;汽车工业中汽车的碰撞及安全性防护;航空工业中飞机机身、机翼和发动机针对鸟击、冰雹等的安全防护及航天工业中航天空间设备(航天飞机飞船、卫星、空间站等)针对空间碎片的安全防护.

弹塑性材料受到冲击载荷作用时,在极短时间内局部区域产生急剧的变形及响应,并产生激波. 典型的弹塑性材料高速变形与失效学问题包括高速冲击(high velocity impact, HVI)和穿透(penetration). 在高速冲击过程中,巨大的动能迫使固体材料发生极度变形,材料实际上是在“流动”. 在穿透过程中,固体材料甚至能被破坏变成碎片四处“飞溅”. 高速冲击和穿透问题都涉及了移动的边界和运动的物质界面. 传统的拉格朗日网格方法(如有限元)很难处理大变形导致的网格畸变,传统的欧拉网格方法(如有限差分/有限容积)不易处理高速运动的物质界面. 目前,基于网格的计算方法对弹塑性材料中低速变形比较可靠,当涉及高速变形与失效问题时,需要特殊的算法不断重新调整网格,产生可观的数值误差. 如果涉及层裂、剥落或碎片时,计算过程往往产生中断.

SPH 等无网格粒子方法能够模拟穿透、层裂、剥落及碎片等现象,为弹塑性材料高速变形与失效的有效模拟提供了一个可行的选择。

Libersky 与 Randles 等<sup>[14,72]</sup>最早应用 SPH 方法对高速冲击和穿透等问题进行了研究,其中包括 HVI、断裂和裂解等问题。Attaway 等<sup>[28,73]</sup>将 SPH 方法与瞬态动力学 FEM 程序 PRONTO 耦合起来进行冲击和穿甲的研究。即对于造成有限元网格典型混乱和破坏的高应变区域应用 SPH 方法来求解。Johnson 等也在应用 SPH 方法研究冲击问题方面作出了突出的贡献。他们针对均匀应变率条件下的轴对称问题提出了正则化光滑函数<sup>[74]</sup>,并把 SPH 方法和有限元结合在 EPIC 软件中<sup>[75]</sup>。其他的应用还包括飞机机身撞击硬体目标<sup>[43]</sup>、飞鸟撞击机翼<sup>[76]</sup>、甚至 911 恐怖袭击中飞机撞击世贸中心大厦<sup>[77]</sup>。

铁棒撞击固体壁面 (Taylor 棒问题) 与球形弹体撞击/穿透薄板问题具有比较丰富的实验数据,是模拟弹塑性材料变形与失效的两个常用验证算例。Libersky 等<sup>[14,72]</sup>的工作表明,对于撞击速度为 221 m/s 的 Taylor 棒以及撞击速度为 5.55 km/s 的铜球撞击穿透铝板问题,SPH 方法计算结果与实验观察吻合良好。Zhou 等<sup>[78]</sup>应用三维 SPH 程序对铝球以 6.18 km/s 的初速度撞击乃至穿透铝板问题进行了定量的分析和比较研究,所得到的穿透碎片云形状分布与大小与实验观察基本一致,SPH 计算结果中碎片云长宽比为 1.36,而实验观察为 1.39。值得指出的是,基于网格的计算方法模拟穿过程中碎片飞溅等过程存在较大的难度。

毛益明等<sup>[79]</sup>利用 SPH 方法对正碰撞和斜碰撞问题进行了探讨。宋顺成等<sup>[80]</sup>对弹丸侵彻混凝土进行了 SPH 数值模拟,并且研究了弹、塑性弹丸冲击混凝土的滑移面算法及其损伤演化<sup>[81]</sup>。张刚明等<sup>[82]</sup>给出了二维轴对称问题中连续介质力学守恒方程的离散过程及 SPH 离散格式,并进行了一系列高速碰撞的模拟。王芳等<sup>[83]</sup>应用 SPH 方法对空间碎片的超高速碰撞问题进行模拟。

应用 SPH 方法模拟弹塑性材料高速变形与失效虽然取得了较大的进展,依旧存在一系列问题值得进一步研究或完善。首先,目前还缺乏有效及通用的方法去除弹塑性材料高速变形与失效 SPH 计算中所涉及的张力不稳定现象。其次,需要建立有效的 SPH 算法模拟物质交界处粒子的接触与相互作用。正如 Johnson 等<sup>[74]</sup>指出,物质交界面区域来自不同材料的粒子相互作用,可能产生虚

假剪切应力和张力,导致界面粒子产生虚假滑移和脱离。另外,现有的 SPH 算法模拟穿透等问题时,粒子数量一般保持不变,而发生穿透并产生碎片云后局部区域粒子数量稀少,产生数值空洞,影响计算的精度。在这一方面,卞梁等<sup>[84]</sup>进行了有益的尝试,通过对粒子进行添加和删除,实现粒子分布的自适应,能够有效去除传统 SPH 方法计算中出现的数值空洞。

值得指出的是,国内外一些研究机构也应用改进的网格方法 (欧拉型或拉格朗日型) 模拟涉及多种材料的高速碰撞问题并取得了相当好的结果。其中一个典型的发展方向是 ALE 方法,与拉格朗日网格重新分区法紧密相关,目的是使网格的运动独立于物质,以令网格的畸变达到最小化。ALE 方法中,在每个时间步的初始时刻都要计算拉格朗日运动,随后进行网格重新划分,即在未划分网格的区域划分网格 (纯粹的拉格朗日描述),或将网格按初始形状划分 (欧拉描述),或划分为其他有利于计算的形状 (介于拉格朗日描述和欧拉描述之间)。已有研究表明,ALE 及网格方法的其他处理方式 (如单元侵蚀算法) 对于中低速的冲击问题 (200 m/s 以下),效果很好。对于高速和超高速 (200 m/s 以上) 的碰撞及侵彻问题,SPH 方法有明显的优势<sup>[85]</sup>。而包括 SPH 等粒子方法也逐渐引入网格方法或其中的一些技术,通过与网格方法耦合或使用背景网格,提高计算精度与计算效率<sup>[84,86]</sup>。

## 8 前景与展望

与有限元和有限差分等网格方法相比,SPH 发展时间较短,还有很多数值问题有待进一步研究,包括计算的精度 (含近似格式的连续性与边界处理的准确性)、数值计算的稳定性以及计算的效率。SPH 等粒子方法中连续性、稳定性和计算效率往往很难兼顾。传统的 SPH 方法简单灵活,计算时间短,应用范围广,但精度较低,并涉及拉伸不稳定及因粒子分布不均导致的数值不稳定等不稳定性。而众多改进型的粒子方法往往涉及构造新的光滑函数,或者对场变量及其导数耦合计算,需要求解矩阵方程。这些方法在精度或者稳定性方面有所提高,然而系数矩阵非负的条件则对粒子的分布又提出了额外的要求。另外,改进型的粒子近似方案需要逐点构造光滑函数或者求解矩阵方程,计算效率大大低于传统的 SPH 方法。因此在

传统的 SPH 方法和众多改进型粒子近似方案中,需要寻找一种最优化的平衡,在确保计算精度和稳定性的同时提高计算的效率,增加计算的灵活性和适应性。

计算的精度、稳定性及计算效率都必须融合在实际的 SPH 算法中,才能解决工程和科学中的实际问题。好的算法应该在发挥传统 SPH 优点的同时,去除其缺点。目前有 3 个方面的工作值得进一步开展:

(1) 自适应光滑长度:根据时间、空间和方位调整光滑长度以适应不同的要求。

(2) 自适应粒子分布:根据不同的情形分裂、合并或调整粒子。

(3) 连续性恢复:构造满足不同阶次连续性并且能够有效处理或去除奇异矩阵的粒子近似方案。

自适应光滑长度使计算更接近系统演变的物理特性,而自适应粒子分布可能在局部或者整体上提高计算的精度。然而,如何合理有效地调整光滑长度和粒子分布,还需要进一步研究,并建立相关的准则。恢复连续性的 SPH 改进型方案在数学上更能合理地描述粒子近似的精确性,也更加可靠。另外,光滑长度和粒子分布也是影响连续性的因素,可以在连续性分析中一起考虑。

目前 SPH 方法的应用范围日趋广泛。一个重要的研究趋势是针对特定的问题耦合 SPH 方法与其他计算方法:在不同的计算区域,不同的研究对象,不同的物理问题,或不同的时空尺度使用不同的计算方法,从而充分发挥各自的优势。这些耦合的算法包括:

(1) 与网格方法耦合:SPH 与 FEM 的耦合已经有比较多的文献,大多见于弹塑性材料高速变形与失效领域,在大变形区域应用 SPH,而在小变形区域应用 FEM。SPH 与 FDM/FVM 等欧拉网格方法的结合在水动力学等领域有较好的前景,主流区域应用 FDM/FVM,涉及空化、碎波等复杂现象的局部区域应用 SPH。另外,SPH 也可以适当引入网格方法的某些特点,甚至在局部乃至全部计算区域应用背景网格。

(2) 与离散元方法耦合:模拟流体流动与固体粒子的复杂相互作用,如化学工程中颗粒的合成,环境工程中山体滑坡和泥石流。

(3) 与其他粒子方法的耦合:SPH 与分子动力学 (molecular dynamics, MD)<sup>[41]</sup> 和耗散粒子动力学 (dissipative particle dynamics, DPD)<sup>[87-88]</sup> 具有

共同的特点,都是拉格朗日型粒子动力学方法。能够把 SPH, DPD 和 MD 桥联起来,从微观 (MD) 到介观 (DPD) 乃至宏观 (SPH) 进行多尺度计算,包括微纳米流动,小尺度环境与地质流动问题,生物与化学工程中的多尺度流动问题。

(4) 多场耦合:在 SPH 方法中引入电、磁、化学反应、相变等多种物理和化学过程,开展微流体复杂流动现象的数值模拟。

## 参考文献

- 1 Liu G R. Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. Boca Raton, Florida 33431, USA: CRC Press, 2002
- 2 Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, 181: 375-389
- 3 Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 1977, 82(12): 1013-1024
- 4 Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress In Physics*, 2005, 68(8): 1703-1759
- 5 Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Constructing smoothing functions in smoothed particle hydrodynamics with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, 155(2): 263-284.
- 6 Liu G R, Liu M B. Smoothed Particle Hydrodynamics: a Meshfree Particle Method. Singapore: World Scientific, 2003
- 7 Monaghan J J. Smooth particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 1992, 30: 543-574
- 8 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 1996, 139(1-4): 3-47
- 9 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229-256
- 10 Liu W K, Jun S, Li S, et al. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 38(10): 1655-1679
- 11 Liu G R, Gu Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(4): 937-951
- 12 Liu M B, Liu G R. Restoring particle consistency in smoothed particle hydrodynamics. *Applied Numerical Mathematics*, 2006, 56(1): 19-36
- 13 Li S, Liu W K. Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, 55(1): 1-34
- 14 Libersky L D, Petschek A G, Carney T C, et al. High strain Lagrangian hydrodynamics: a three-dimensional SPH code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 1993, 109(1): 67-75
- 15 Ma J S, Ge W. Is standard symmetric formulation always better for smoothed particle hydrodynamics? *Computers & Mathematics with Applications*, 2008, 55(7): 1503-1513

- 16 Chen J K, Beraun J E, Carney T C. A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 1999, 46: 231–252
- 17 Swegle J W, Hicks D L, Attaway S W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of Computational Physics*, 1995, 116(1): 123–134
- 18 Chen J K, Beraun J E, Jih C J. An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics. *Computational Mechanics*, 1999, 23(4): 279–287
- 19 Liu W K, Chen Y, Jun S, et al. Overview and applications of the reproducing kernel particle methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 1996, 3(1): 3–80
- 20 Atluri S N, Han Z D, Rajendran A M. A new implementation of the meshless finite volume method, through the MLPG mixed approach. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 6(6): 491–514
- 21 Liu M B, Xie W P, Liu G R. Modeling incompressible flows using a finite particle method. *Applied Mathematical Modelling*, 2005, 29(12): 1252–1270
- 22 Zhang G M, Batra R C. Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems. *Computational Mechanics*, 2004, 34(2): 137–146
- 23 Monaghan J J. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 1994, 110(2): 399–406
- 24 Colagrossi A, Landrini M. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 2003, 191(2): 448–475
- 25 Tartakovsky A M, Meakin P. A smoothed particle hydrodynamics model for miscible flow in three-dimensional fractures and the two-dimensional Rayleigh Taylor instability. *Journal of Computational Physics*, 2005, 207(2): 610–624
- 26 Gomez-Gesteira M, Dalrymple R A. Using a three-dimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering-ASCE*, 2004, 130(2): 63–69
- 27 Liu M B, Liu G R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2010, 17(1): 25–76
- 28 Attaway S W, Hendrickson B A, Plimpton S J, et al. A parallel contact detection algorithm for transient solid dynamics simulations using Pronto3D. *Computational Mechanics*, 1998, 22(2): 143–159
- 29 Campbell J, Vignjevic R, Libersky L. A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 184(1): 49–65
- 30 Vignjevic R, De Vuyst T, Campbell J C, et al. A frictionless contact algorithm for meshless methods. *CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2006, 13(1): 35–48
- 31 Hu X Y, Adams N A. A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows. *Journal of Computational Physics*, 2006, 213(2): 844–861
- 32 Morris J P. Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics with Applications. Australia: Monash University, 1996
- 33 Xiao S P, Belytschko T. Material stability analysis of particle methods. *Advances in Computational Mathematics*, 2005, 23(1): 171–190
- 34 Hicks D L, Liebrock L M. Conservative smoothing with B-splines stabilizes SPH material dynamics in both tension and compression. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 150(1): 213–234
- 35 傅学金, 强洪夫, 杨月诚. 固体介质中 SPH 方法的拉伸不稳定性问题研究进展. *力学进展*, 2007, 37(3): 375–388
- 36 Ferziger J H, Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. New York: Springer, 2002
- 37 Dyka C T, Randles P W, Ingel R P. Stress points for tension instability in SPH. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(13): 2325–2341
- 38 Randles P W, Libersky L D. Normalized SPH with stress points. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 2000, 48(10): 1445–1462
- 39 Melean Y, Sigalotti L D G, Hasmy A. On the SPH tensile instability in forming viscous liquid drops. *Computer Physics Communications*, 2004, 157(3): 191–200
- 40 Liu M B, Chang J Z. Particle distribution and numerical stability in the SPH method. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(6): 3654–3662
- 41 Allen M P, Tildesley D J. Computer Simulation of Liquids. Oxford: Oxford University Press, 1987
- 42 Rapaport D C. The Art of Molecular Dynamics Simulation. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 43 Brown K, Attaway S, Plimpton S, et al. Parallel strategies for crash and impact simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 184: 375–390
- 44 Hipp M, Rosenstiel W. Parallel hybrid particle simulations using MPI and openMP. *Lecture Notes in Computer Science*, 2004, 3149: 189–197
- 45 莫则尧, 张爱清. JASMIN 框架用户指南 (1.5 版), 技术报告 T09-JMJL-01. 北京应用物理与计算数学研究所, 2009
- 46 曹小林, 张爱清, 莫则尧. 基于面向对象的粒子类模拟并行计算研究. *计算机研究与发展*, 2007, 44(010): 1647–1651
- 47 Liu M B, Liu G R. Meshfree particle simulation of micro channel flows with surface tension. *Computational Mechanics*, 2005, 35(5): 332–341
- 48 Swegle J W, Attaway S W. On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion calculations. *Computational Mechanics*, 1995, 17(3): 151–168
- 49 Alia A, Souli M. High explosive simulation using multi-material formulations. *Applied Thermal Engineering*, 2006, 26(10): 1032–1042
- 50 Liu M B, Liu G R, Lam K Y, et al. Meshfree particle simulation of the detonation process for high explosives in shaped charge unlined cavity configurations. *Shock Waves*, 2003, 12(6): 509–520
- 51 Liu M B, Liu G R, Zong Z, et al. Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology. *Computers & Fluids*, 2003, 32(3): 305–322
- 52 Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Investigations into water mitigation using a meshless particle method. *Shock Waves*, 2002, 12(3): 181–195
- 53 Liu M B, Liu G R, Lam K Y, et al. Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of underwater explosion. *Computational Mechanics*, 2003, 30(2): 106–118
- 54 Shao J R, Liu M B, Yang X F, et al. Improved smoothed particle hydrodynamics with RANS for free surface flow problems. International Conference on Computational Methods, Zhangjiajie, November, 2010.16
- 55 Monaghan J J, Kos A. Scott Russell's wave generator. *Physics of Fluids*, 2000, 12: 622–630



- 56 Monaghan J J. New developments in smoothed particle hydrodynamics. In: *Meshfree Methods for Partial Differential Equations II: Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. New York: Springer, 2003
- 57 Lo Y M E, Shao S. Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method. *Applied Ocean Research*, 2002, 24(5): 275-286
- 58 Shao S. Incompressible SPH simulation of wave breaking and overtopping with turbulence modelling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2006, 50(5): 597-621
- 59 Dalrymple R A, Rogers B D. Numerical modeling of water waves with the SPH method. *Coastal Engineering*, 2006, 53(2-3): 141-147
- 60 Gotoh H, Shao S D, Memita T. SPH-LES model for numerical investigation of wave interaction with partially immersed breakwater. *Coastal Engineering*, 2004, 46(1): 39-63
- 61 Shao S D, Gotoh H. Simulating coupled motion of progressive wave and floating curtain wall by SPH-LES model. *Coastal Engineering Journal*, 2004, 46(2): 171-202
- 62 Crespo A J C, Gomez-Gesteira M, Dalrymple R A. 3D SPH simulation of large waves mitigation with a dike. *Journal of Hydraulic Research*, 2007, 45(5): 631-642
- 63 Yim S C, Yuk D, Panizzo A, et al. Numerical simulations of wave generation by a vertical plunger using RANS and SPH models. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering-ASCE*, 2008, 134(3): 143-159
- 64 Cleary P W, Prakash M, Ha J, et al. Smooth particle hydrodynamics: status and future potential. *Progress In Computational Fluid Dynamics*, 2007, 7(2-4): 70-90
- 65 Iglesias A S, Rojas L P, Rodriguez R Z. Simulation of anti-roll tanks and sloshing type problems with smoothed particle hydrodynamics. *Ocean Engineering*, 2004, 31(8-9): 1169-1192
- 66 Rhee S H, Engineer L. Unstructured grid based Reynolds-averaged Navier-Stokes method for liquid tank sloshing. *Journal of Fluids Engineering*, 2005, 127: 572
- 67 Souto-Iglesias A, Delorme L, Perez-Rojas L, et al. Liquid moment amplitude assessment in sloshing type problems with smooth particle hydrodynamics. *Ocean Engineering*, 2006, 33(11-12): 1462-1484
- 68 Anghileri M, Castelletti L M L, Tirelli M. Fluid structure interaction of water filled tanks during the impact with the ground. *International Journal of Impact Engineering*, 2005, 31(3): 235-254
- 69 崔岩, 吴卫, 龚凯, 等. 二维矩形水槽晃荡过程的 SPH 方法模拟. *水动力学研究与进展: A 辑*, 2008, 32(6): 618-624
- 70 陈正云, 朱仁庆, 祁江涛. 基于 SPH 法的二维液体大幅晃荡数值模拟. *船海工程*, 2008, 37(002): 44-47
- 71 Vesenjak M, Ren Z. Application aspects of the meshless SPH method. *Journal of Serbian Society for Computational Mechanics*, 2007, 1(1): 74-86
- 72 Randles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1): 375-408
- 73 Brown K, Attaway S, Plimpton S, et al. Parallel strategies for crash and impact simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 184(2): 375-390
- 74 Johnson G R, Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39(16): 2725-2741
- 75 Johnson G R. Linking of Lagrangian particle methods to standard finite element methods for high velocity impact computations. *Nuclear Engineering and Design*, 1994, 150(2-3): 265-274
- 76 McCarthy M A, Xiao J R, Petrinic N, et al. Modelling of bird strike on an aircraft wing leading edge made from fibre metal laminates, Part 1: material modelling. *Applied Composite Materials*, 2004, 11(5): 295-315
- 77 Rosen P, Popescu V, Hoffmann C, et al. A high-quality high-fidelity visualization of the September 11 attack on the World Trade Center. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2008, 14(4): 937-947
- 78 Zhou C E, Liu G R, Lou K Y. Three-dimensional penetration simulation using smoothed particle hydrodynamics. *International Journal of Computational Methods*, 2007, 4(4): 671-691
- 79 毛益明, 武文远, 陈广林, 等. 高速碰撞问题的 SPH 方法模拟. *解放军理工大学学报: 自然科学版*, 2003, 4(5): 84-87
- 80 宋顺成, 才鸿年. 弹丸侵彻混凝土的 SPH 算法. *爆炸与冲击*, 2003, 23(1): 56-60
- 81 宋顺成, 才鸿年, 王富耻. 弹、塑性弹丸冲击混凝土的滑移面算法及其损伤演化. *爆炸与冲击*, 2006, 26(2): 163-168
- 82 张刚明, 王肖钧, 王元博, 等. 高速碰撞数值计算中的光滑粒子法. *计算物理*, 2003, 20(5): 447-454
- 83 王芳, 李磊, 金俊, 等. 空间碎片超高速碰撞的数值方法研究. *中国安全科学学报*, 2006, 16(5): 26-30
- 84 卞梁, 王肖钧, 章杰. 高速碰撞数值计算中的 SPH 自适应粒子分布法. *爆炸与冲击*, 2009, 29(006): 607-612
- 85 Swaddiwudhiponga S, Islamb M J, Liu, Z S. High velocity penetration/perforation using coupled smooth particle hydrodynamics-finite element method. *International Journal of Protective Structures*, 2011, 1(4): 489-506
- 86 Zhang X, Sze K Y, Ma S. An explicit material point finite element method for hyper-velocity impact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 66(4): 689-706
- 87 Hoogerbrugge P J, Koelman J. Simulating microscopic hydrodynamic phenomena with dissipative particle dynamics. *Europhysics Letters*, 1992, 19: 155-160
- 88 Liu M B, Meakin P, Huang H. Dissipative particle dynamics with attractive and repulsive particle-particle interactions. *Physics of Fluids*, 2006, 18(1): 017101

## DEVELOPMENTS AND APPLICATIONS OF SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS\*

LIU Moubin<sup>1,2,†</sup> ZONG Zhi<sup>3</sup> CHANG Jianzhong<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Key Laboratory of Hydrodynamics and Ocean Engineering, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China

<sup>2</sup> The State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China

<sup>3</sup> The State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, School of Naval Architecture, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

<sup>4</sup> School of Mechatronic Engineering, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China

**Abstract** Smoothed particle hydrodynamics (SPH) is a Lagrangian meshfree particle method, and has been widely applied to different areas in engineering and science. SPH method uses a set of particles to discretize the computational domain and to represent the state of the system being modeled, and approximates the governing equations based on the set of particles. This paper provides an overview on the development, numerical aspects, and applications of the SPH method. The basic concepts, consistency, boundary treatment, stability and computational efficiency of the SPH method have been discussed. Applications of the SPH method to compressible and incompressible fluid flows as well as to rapid deformation and failure of elastic-plastic materials have been addressed. Finally the paper concludes with remarks of the merits and defects of the SPH methods, and with some predictions of numerical method development and application areas.

**Keywords** smoothed particle hydrodynamics (SPH), meshfree method, particle method, consistency, stability, computational efficiency

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10942004), the Funds for Creative Research Groups (50921001) and the National Basic Research Program of China (2010CB83270)

† E-mail: liumoubin@imech.ac.cn