

文章编号:1007-4708(2011)01-0020-05

修正算子 γB_0^0 的物理含义及精度分析

周正华^{*1,2}, 魏景芝¹, 王玉石¹, 王伟¹, 丁桦²

(1. 中国地震局工程力学研究所, 哈尔滨 150080; 2. 中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘要:多次透射公式是一种用于无限介质波动数值模拟中的局部人工边界条件, 飘移失稳是多次透射公式在时步积分数值模拟实现中出现的一种失稳现象, 可通过在多次透射公式算子中加上修正算子 γB_0^0 的简便处理方法消除。本文依据球面波传播原理和介质阻尼效应解释了修正算子 γB_0^0 的物理含义, 并在两种极限情形(理想暂态情形和理想稳态情形)下对加修正算子 γB_0^0 的多次透射公式的反射系数进行了推导, 分析了 γ 取值对多次透射公式反射系数的影响。结果表明:加修正算子 γB_0^0 的多次透射公式在波动数值模拟中考虑了介质的几何扩散特性, 或引入了介质的阻尼特性; 当 $\gamma \leq 0.02$ 时, 修正算子 γB_0^0 对多次透射公式反射系数的影响可忽略不计。

关键词:球面波; 阻尼效应; 修正算子; 多次透射公式; 反射系数

中图分类号: P315.3 文献标志码: A

1 引言

多次透射公式 MTF(Multi-Transmitting Formula)^[1] 是一种局部人工边界条件, 通过这一边界条件的引入可将一无限或半无限域问题变成一有限域问题。类似其他局部人工边界条件^[2,3], MTF 在时步积分数值模拟实现中可能出现数值失稳现象, 如高频振荡失稳和飘移失稳。文献^[4,5] 阐明了 MTF 的高频失稳机理, 并提出消除这类失稳的措施。对于飘移失稳, 文献^[6] 基于对双曲型偏微分方程数值解稳定性的 GKS(Gustafsson, Kreiss and Sundström) 准则的物理解释^[7,8], 结合波动的解耦数值模拟方法^[9,10], 从理论上详细阐明了多次透射公式飘移失稳的机理, 提出了在波动数值模拟中消除多次透射公式飘移失稳的一个简单措施, 即在 MTF 算子中加上修正算子 γB_0^0 的简便处理方法, 并用三维波源问题的数值试验检验了建议的稳定措施的有效性。数值试验结果表明, 这一简单措施能有效地抑制 MTF 在波动数值模拟中的飘移失稳。本文在文献^[6] 基础上, 以球面波传播原理和介质阻尼效应解

释了修正算子 γB_0^0 的物理含义, 并就其精度进行分析。结果表明, 加修正算子 γB_0^0 的 MTF 在波动数值模拟中考虑了介质的几何扩散特性, 或引入了介质的阻尼特性; 当系数 $\gamma \leq 0.02$ 时, 修正算子 γB_0^0 对 MTF 反射系数的影响可忽略不计。

2 修正算子 γB_0^0 的物理含义

考虑由点源 S 产生的球面波以波速 c 向外传播(如图 1 所示), 设有两观测点 A 和 o , 且观测点 A 距点源 S 的距离为 r_0 , 观测点 o 距点源 S 的距离为 $r_0 + \Delta r$, 若已知点 A 的位移为 $u_A(t)$, 则由球面波传播原理可得点 o 的位移为^[11]

$$u_o(t) = \alpha u_A(t - \Delta r/c) \quad (1)$$

式中 α 是介质几何扩散因子, 且 $\alpha = r_0 / (r_0 + \Delta r) = 1 / (1 + \Delta r / r_0)$; 令 $\bar{\gamma} = \Delta r / r_0$, 则 $\alpha = 1 / (1 + \bar{\gamma})$ 。

由文献^[6] 可知, 加修正算子 γB_0^0 的 MTF 可表示为

$$((1 + \gamma) B_0^0 - B_1^1)^N u_0^{p+1} = 0 \quad (2)$$

式中 B_m^n (m, n 为任意整数) 为向后移动算子^[12], 其定义为 $B_m^n u_j^p = u_{j+m}^{p-n}$, 且这一移动算子满足运算规则 $B_m^n B_s^r = B_{m+s}^{n+r}$ 。

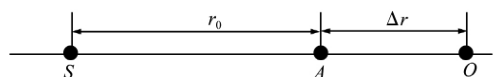


图 1 源点和观测点示意图

Fig.1 Schematic diagram of source point and observation point

收稿日期: 2009-02-23; 修改稿收到日期: 2010-05-24.

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划(90715038); 973 项目(2002CB412706); 中国地震局工程力学研究所中央级公益性研究所基本科研业务费专项(2006A02); 地震行业科研专项(200808019)资助项目.

作者简介: 周正华*(1962-), 男, 博士, 研究员
(E-mail: bjsmoc@163.com).

利用移动算子 B_m^n 的定义及其运算规则可将式

(2) 展开得

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N \frac{u_j^{p+1-j}}{(1+\gamma)^j} \quad (3)$$

式中 N 为透射阶数, $u_j^p = u(p\Delta t, -jc_a\Delta t)$ (p, j 为任意整数) 表示人工边界节点或内节点(图 2) 在 $p\Delta t$ 时刻的位移, Δt 为时间步距, c_a 为人工波速, $C_j^N = N! / [(N-j)! j!]$ 。

与 MTF 比较可知, 加修正算子 γB_0^0 的 MTF 在用内点位移外推人工边界点的位移时, 应将内点位移乘以相应的因子。

为讨论简便起见, 且不失一般性, 取式(3) 中的 $N = 2$, 则得

$$u_0^{p+1} = \frac{2}{1+\gamma} u_1^p - \frac{1}{(1+\gamma)^2} u_2^{p-1} \quad (4)$$

将式(4) 改写成

$$u_0^{p+1} = \frac{1}{1+\gamma} u_1^p + \frac{1}{1+\gamma} \left(u_1^p - \frac{1}{1+\gamma} u_2^{p-1} \right) \quad (5)$$

经简化, 式(5) 亦可表示成

$$u_0^{p+1} = \tilde{u}_1^p + \Delta \tilde{u}_0^{p+1} \quad (6)$$

式中 $\tilde{u}_1^p = \frac{1}{1+\gamma} u_1^p, \Delta \tilde{u}_0^{p+1} = \frac{1}{1+\gamma} \Delta \tilde{u}_1^p$

且 $\Delta \tilde{u}_1^p = u_1^p - \tilde{u}_2^{p-1}, \tilde{u}_2^{p-1} = \frac{1}{1+\gamma} u_2^{p-1}$ 。

式(6) 为加修正算子 γB_0^0 的二阶 MTF 另一表达形式, 与文献[1]P178 式(22) 等价。由此可以看出, 入射波和误差波以球面波形式传播, 其几何扩散因子 α 等于 $1/(1+\gamma)$ 。因此, 加修正算子 γB_0^0 的 MTF 在波动数值模拟中考虑了介质的几何扩散特性。

下面仍以二阶 MTF 为例, 给出加修正算子 γB_0^0 的 MTF 另一物理解释。取 MTF 中的 $N = 2$, 则^[1]

$$u_0^{p+1} = 2u_1^p - u_2^{p-1} \quad (7)$$

设

$$\tilde{u}_j^p = e^{-\mu p} u_j^p \quad (8)$$

式中 $e^{-\mu p}$ 为引进的阻尼因子。依据式(8) 的假设, 式(7) 可改写为

$$\tilde{u}_0^{p+1} = 2e^{-\mu} \tilde{u}_1^p - e^{-2\mu} \tilde{u}_2^{p-1} \quad (9)$$

令 $\mu = \ln(1+\gamma)$, 则有

$$\tilde{u}_0^{p+1} = 2 \frac{1}{1+\gamma} \tilde{u}_1^p - \frac{1}{(1+\gamma)^2} \tilde{u}_2^{p-1} \quad (10)$$

比较式(10) 与式(4), 不难看出两者是等价的。据此可解释为加修正算子 γB_0^0 的 MTF 在波动数值模拟中亦引入了介质的阻尼特征。

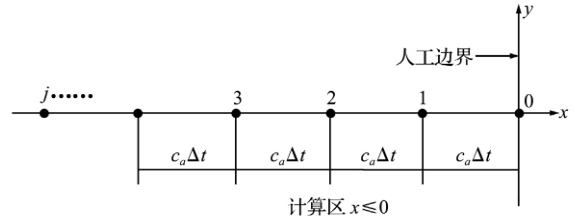


图 2 人工边界节点 o 及 MTF 中计算点位置示意图
Fig. 2 Schematic diagram of artificial boundary node o and calculation points in MTF

3 修正算子 γB_0^0 的精度分析

人工边界的精度通常用反射系数来表示。在稳态情形下, 人工边界的反射系数一般定义为^[1,12]

$$R = \left| \frac{U_0^R}{U_0^I} \right| \quad (11)$$

式中 U_0^I 和 U_0^R 分别为入射平面谐波和反射平面谐波在边界点的振幅。若将边界点的全位移 U_0 表示为 $U_0 = U_0^I + U_0^R$, 则

$$R = \left| \frac{U_0}{U_0^I} - 1 \right| \quad (12)$$

下面将分别就两种极限情形下加修正算子 γB_0^0 的 MTF 的反射系数进行讨论, 其中情形 A 为全波场仅由入射波构成, 情形 B 为全波场由入射波和充分发育的反射波构成。

3.1 情形 A

对于稳态波动, 式(3) 可表示为

$$U_0 = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N a^{-j} U_j / (1+\gamma)^j \quad (13)$$

式中 U_j ($j = 0, 1, 2, 3, \dots$) 表示计算点 j (图 2) 振动的幅值, $a = \exp(i\omega \Delta t), i = \sqrt{-1}, \omega$ 为圆频率。

设入射平面谐波的离散形式为(略去时间因子 $\exp(i\omega p \Delta t)$, 下同)

$$U_j^I = U_0^I a_x^j \quad (14)$$

式中 U_j^I 和 U_0^I 分别为入射谐波在离散点 $x = -jc_a\Delta t$ 和人工边界点 $x = 0$ 处的振幅,

$$a_x = \exp(i\omega c_a \Delta t / c_x) \quad (15)$$

式中 c_x 为沿 x 轴传播的视波速, a_x 表示当入射平面波在 x 轴上传播距离 $c_a\Delta t$ 时位移相位的变化。若入射平面波的波速为 c , 入射角为 θ , 则 $c_x = c / \cos\theta$, 设 $c_a = c$, 则得

$$a_x = \exp(i\omega \Delta t \cos\theta) \quad (16)$$

在这一情形下, $U_j = U_j^I$, 则由式(14) 可知

$$U_j = U_0^I a_x^j \quad (17)$$

将式(17) 代入式(13) 得

$$U_0 = \theta_r U_0^I \quad (18)$$

式中 $b_l = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N a^{-j} a_x^j / (1+\gamma)^j$, 利用二项

式 $(1+x)^N = 1 + \sum_{j=1}^N C_j^N x^j$, 可将 b_l 表示为

$$b_l = 1 - (1 - a^{-1} a_x / (1 + \gamma))^N \quad (19)$$

将式(18)代入式(12)得

$$R = |1 - a^{-1} a_x / (1 + \gamma)|^N \quad (20)$$

将 a 和 a_x 代入式(20)得

$$R = \left| 1 - \frac{\exp[i2\pi \frac{\Delta t}{T} (\cos \theta - 1)]}{1 + \gamma} \right|^N \quad (21)$$

式中, 周期 $T = 2\pi/\omega$ 。

3.2 情形 B

对于情形 B, 这里将就平面标量波入射情形进行推导。亦假定 c_a 等于标量波波速 c , 入射角为 θ , 则 $c_x = c/\cos \theta$ 。由于在 x 轴离散计算点 $x = -jc_a \Delta t$ 上的全位移包括入射波和充分发育的反射波, 因而

$$U_j = U_j^I + U_j^R \quad (22)$$

式中 U_j^I 为入射波位移, 由式(14)给出。反射波位移 U_j^R 根据下式确定。

$$U_j^R = U_0^R a_x^{-j} \quad (23)$$

将式(22), 式(14) 及式(23) 代入式(13) 得

$$U_0 = b_l U_0^I + b_R U_0^R \quad (24)$$

式中 b_l 由式(19) 给出, b_R 由下式给出:

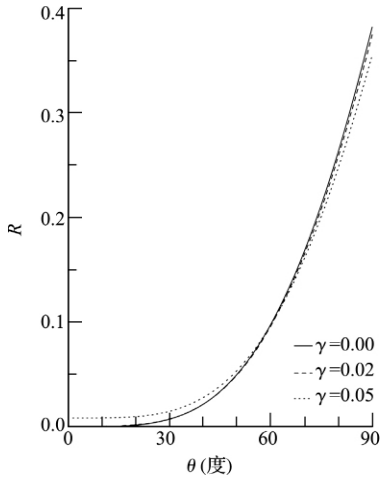
$$b_R = 1 - (1 - a^{-1} a_x^{-1} / (1 + \gamma))^N$$

将 $U_0 = U_0^I + U_0^R$ 代入式(24) 得

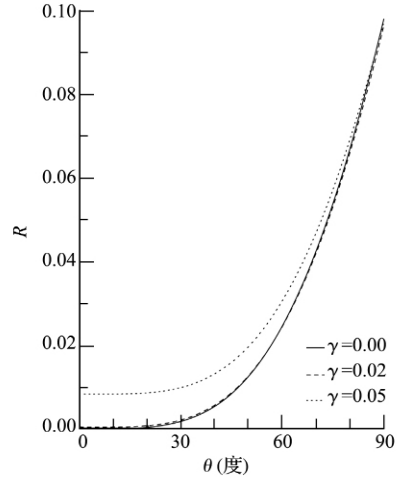
$$\frac{U_0^R}{U_0^I} = -\frac{1 - b_l}{1 - b_R} \quad (25)$$

将 b_l 和 b_R 代入式(25), 且由反射系数定义式(11) 可得

$$R = \left| \frac{1 - \frac{a^{-1} a_x}{(1 + \gamma)}}{1 - \frac{a^{-1} a_x^{-1}}{(1 + \gamma)}} \right|^N \quad (26)$$



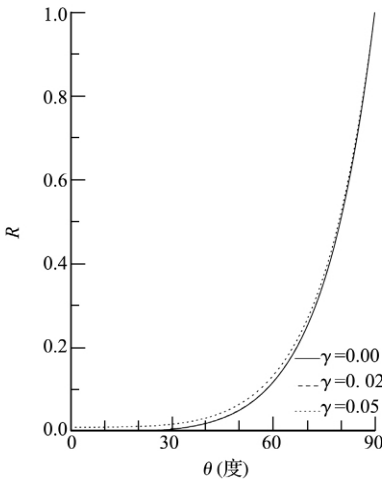
(a) $\Delta t/T = 1/10$



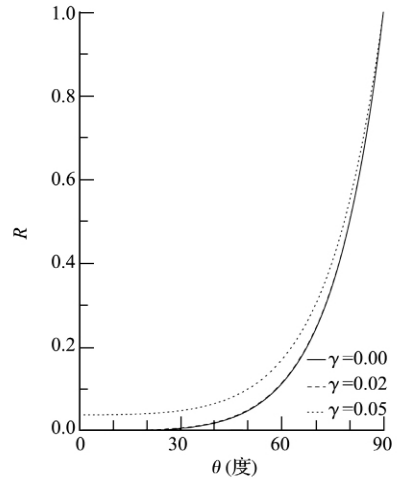
(b) $\Delta t/T = 1/20$

图 3 情形 A 的反射系数

Fig. 3 Reflection coefficient in case A



(a) $\Delta t/T = 1/10$



(b) $\Delta t/T = 1/20$

图 4 情形 B 的反射系数

Fig. 4 Reflection coefficient in case B

将 a 和 a_x 代入式(26)得

$$R = \left| \frac{1 - \frac{\exp[i2\pi \frac{\Delta t}{T}(\cos\theta - 1)]}{1 + \gamma}}{1 - \frac{\exp[-i2\pi \frac{\Delta t}{T}(\cos\theta + 1)]}{1 + \gamma}} \right|^N \quad (27)$$

为了更直观地说明修正算子 γB_0^0 对 MTF 反射系数的影响,根据式(21,27),取 $N = 2$,并在 $\Delta t/T$ 分别等于 $1/10$ 和 $1/20$ 两种情形下,给出不同 γ 值所对应的反射系数与入射角 θ 的关系曲线,如图 3 和图 4 所示。由此可以看出,在任何一种情形下,随 $\Delta t/T$ 减小、 γ 增加, γ 对反射系数的影响越明显。但当 γ 不大于 0.02 时,加修正算子 γB_0^0 的 MTF 反射系数与不加修正算子 γB_0^0 的 MTF 反射系数基本一致。文献[6]三维波源问题的数值试验结果亦表明,取 $\gamma = 0.02$ 时,修正算子 γB_0^0 对数值计算精度仅产生微小影响。

4 结 语

修正算子 γB_0^0 的物理含义解释表明,加修正算子 γB_0^0 的 MTF 在波动数值模拟中引入了介质对波的吸收机制。此外,第二种含义解释给笔者以启发,能否通过适当的引入与质点运动速度成比例的阻尼来消除多次透射公式的飘移失稳。对于这一问题有待以后研究。

在理论上, γ 可以取任意小的正数,但考虑到数值计算中误差噪声的存在, γ 值不宜过小。当然, γ 值亦不宜过大。加修正算子 γB_0^0 的 MTF 反射系数分析表明,当 γ 值不大于 0.02 时,加修正算子 γB_0^0 的 MTF 与不加修正算子 γB_0^0 的 MTF 具有相同的精度。

尽管本文的讨论仅局限于一维问题,但不难推广至二维和三维情形,亦可得出相同的结论。

参考文献(References):

- [1] 廖振鹏. 工程波动理论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1996. (LIAO Zhen-peng. *An Introduction to Wave Motion theory in Engineering* [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese))
- [2] 钱莹, 杨军. 数值流形方法的粘性边界问题初探[J]. 计算力学学报, 2009, 26(5): 147-150. (QIAN Ying, YANG Jun. Primary study on viscous bounda-

ry in numerical manifold method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, 26(5): 147-150. (in Chinese))

- [3] 王兵见, 刘天云. 通用有限元系统实现无限域波动仿真方法[J]. 计算力学学报, 2007, 24(5): 89-93. (WANG Bing-jian, LIU Tian-yun. Simulation of wave problem in unbounded domains by commercial FEA software[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, 24(5): 89-93. (in Chinese))
- [4] 廖振鹏, 周正华, 张艳红. 波动数值模拟中透射边界的稳定实现[J]. 地球物理学报, 2002, 45(4): 533-545. (LIAO Zhen-peng, ZHOU Zheng-hua, ZHANG Yan-hong. Stable implementation of transmitting boundary in numerical simulation of wave motion[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2002, 45(4): 533-545. (in Chinese))
- [5] Xie Zhi-nan, Liao Zhen-peng. A note for the mechanism of high-frequency oscillation instability resulted from absorbing boundary conditions [J]. *Acta Seismologica Sinica*, 2008, 21(3): 306-310.
- [6] 周正华, 廖振鹏. 消除多次透射公式飘移失稳的措施[J]. 力学学报, 2001, 33(4): 550-554. (ZHOU Zheng-hua, LIAO Zhen-peng. A measure for eliminating drift instability of the multi-transmitting formula[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(4): 550-554. (in Chinese))
- [7] Gustafsson B, Kreiss H O, Sundström A. Stability theory of difference approximation for mixed initial boundary value problems II [J]. *Mathematics of Computation*, 1972, 26(119): 649-686.
- [8] Higdon R L. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equations [J]. *Mathematics of Computation*, 1987, 49(179): 65-90.
- [9] Liao Z P. A decoupling numerical simulation of wave motion [A]. *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Elsevier, Amsterdam, 1998, 125-140.
- [10] 廖振鹏. 近场波动问题的有限元解法[J]. 地震工程与工程振动, 1984, 4(2): 1-14. (LIAO Zhen-peng. Finite element simulation of near-field wave motion[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1984, 4(2): 1-14. (in Chinese))
- [11] Aki K, Richard P G. *Quantitative Seismology, Theory and Methods* [M]. Vol. I, W. H. Freeman and Company, 1980.
- [12] Liao Z P. Extrapolation non-reflecting boundary conditions[J]. *Wave Motion*, 1996, 24: 117-138.

The physical implication and the precision analysis of modified operator γB_0^0

ZHOU Zheng-hua^{*1,2}, WEI Jing-zhi¹, WANG Yu-shi¹, WANG Wei¹, DING Hua²

(1. Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin 150080, China;

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: The Multi-Transmitting Formula (MTF) is a local artificial boundary condition used for numerical simulation of the wave motion in infinite media. The drift instability is one type of the numerical instabilities in implementation of MTF into the numerical simulation by time-step integration, and may be eliminated by a simple measure, namely, adding a modified operator γB_0^0 into the operator of MTF. The physical implication on modified operator γB_0^0 of MTF is interpreted based on the theory of spherical wave propagation and damping effect of medium. In addition, the reflection coefficient of MTF added modified operator γB_0^0 in two limit cases (ideal transient case and ideal steady-state case) is derived, and the influence of γ -value on this is analyzed. Results show that MTF added modified operator γB_0^0 used for numerical simulation of the wave motion takes geometric decay effect of medium into account, or introduces damping effect of medium, and if $\gamma \leq 0.02$, the effect of modified operator γB_0^0 on the reflection coefficient of MTF may be ignored.

Key words: spherical wave; damping effect; modified operator; multi-transmitting formula; reflection coefficient

~~~~~  
(上接第 19 页)

## Application of adaptive Kriging approximation model in two dimensional diffuser aerodynamic optimization design

WANG Hong-tao, ZHU Xiao-cheng, DU Zhao-hui<sup>\*</sup>

(School of Mechanical and Power Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** An adaptive global optimization method was developed coupled with uniform experimental design, CFD analysis, Kriging approximation model and niching micro genetic algorithm. In the optimization procedure, EI function was introduced to identify the next sampled point by considering the prediction and mean squared error of Kriging model to decrease the risk of trapping into the local optimum when the optimal strategy was used. The proposed method and niching micro genetic algorithm have been applied to the diffuser optimization design respectively, average static pressure recovery coefficient is selected as objective function and Nurbs curve is used to parameterize the geometric model. 8.5% improvement of average static pressure recovery coefficient is obtained and the result shows that the method is more effective than stochastic optimization algorithm.

**Key words:** diffuser; global optimization; kriging model; experimental design method