

文章编号: 录用定稿 (2011) XX-XXXX-XX

# 任意多面体网格上的欧拉方程数值算法研究

李书杰<sup>1,\*</sup>, 杨国伟<sup>1</sup>

1. 中国科学院力学研究所 高温气体动力学重点实验室, 北京 100190

**摘要:** 本文发展并验证了一种新的支持多面体网格的欧拉方程离散算法, 采用Fortran95编写了支持任意网格拓扑及三维复杂外形的通用求解器。在空间离散上, 基于径向基函数理论提出了一种新的梯度计算方法, 并采用动能通量分裂格式来得到准确并且稳定的二阶精度重构。该方法不依赖于网格几何形状, 因此对网格质量不敏感。由于在时间方向采用了点隐松弛推进方法, 使得该求解器在大时间步长上仍能保持稳定。最后通过若干数值算例对本文所发展的算法进行了验证, 证明了本文的算法及求解器具有稳定、准确的特性及宽广的网格类型适应性。

**关键词:** 多面体网格; 蜂窝网格; 径向基函数; 动能通量分裂; 非结构; 复杂外形; 可压缩流动;

中图分类号: V211.3 文献标识码: A

基于非结构网格的有限体积法具有灵活的复杂外形适应性并在国内外得到了广泛的应用。一些先锋性的工作包括 Jameson<sup>[1]</sup>, Barth<sup>[2]</sup>, Löhrner<sup>[3]</sup>, Mavplis<sup>[4]</sup>, Frink<sup>[5]</sup>, Venkatakrishnan<sup>[6]</sup>等。然而大部分基于非结构的网格求解器只能支持四面体, 六面体, 金字塔, 三棱柱, 共四种网格类型。Los Alamos National Laboratory 的 Ahn 和 Carey<sup>[7]</sup>对二维多边形有限体法进行了系统研究, 其结论表明基于多边形网格的格心型有限体积法相比传统节点型有限体积法具有更强的抗网格扭曲能力。

本文将 Ahn 和 Carey<sup>[7]</sup>的工作推广到了三维任意多面体网格来求解包含激波间断的高速流场问题, 并成功发展了一个新的支持任意网格的流场求解程序 *XPOLY* (*X-POLY*hedral Euler/Navier-Stokes Solver)。由于多面体网格包含了经典类型

的网格, 每个网格单元面的数量可以是任意的, 那么支持任意多面体网格的求解程序将具有宽广的网格普适性与灵活的易用性。网格普适性为计算者提供了可选择空间, 供计算者根据需求灵活选择网格类型, 摆脱了网格类型对计算的约束。为了达到对网格类型的普适性和高速流场计算的特殊需要, 在离散算法角度上要求求解器在强激波流场计算中仍能够保证准确性和稳定性, 并且最小程度地降低计算对网格几何外形的依赖; 在代码结构上则需要发展有效的动态数据结构。基于以上问题, 本文发展了一种新的支持任意网格拓扑的二阶精度重构方法, 研制了相应的通用求解程序, 最后从基本问题到复杂问题对求解器进行了一系列验证。

## 1 任意网格上的重构算法

收稿日期: 2010-11-30; 退修日期: 2010-12-26; 录用日期: 2011-01-06; 网络出版时间: 2011-1-20 17:32  
网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.v.20110120.1732.007.htm> DOI:  
基金项目: 受中国科学院研究生科技创新与实践资助专项资助 (2009)  
\*通讯作者. Tel.: 010-82544010 E-mail: xpoly.sj@gmail.com

引用格式: 李书杰, 杨国伟. 任意多面体网格上的欧拉方程数值算法研究[J]. 航空学报, 2011, 32(x): xxx-xxx. Li Shujie, Yang Guowei. Research on Numerical Algorithm of Euler Equations on Arbitrary Polyhedral Grids[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(x): xxx-xxx.

### 1.1 动能通量分裂格式

动能通量分裂格式(Kinetic Flux Vector Splitting scheme, KFVS)<sup>[8]</sup>是一种基于物理的格式。KFVS 格式消除了其他黎曼解(如 Roe 格式)的非物理现象<sup>[9]</sup>, 格式的迎风性质从物理角度得到自然的体现。在分子动理学理论中, 无碰撞的 Boltzmann 方程与 Euler 方程有如下对应关系:

$$\langle \psi, \partial_t f + v \cdot \bar{\nabla} f \rangle = \partial_t U + \nabla \cdot F = 0 \quad (1)$$

定义内积  $\langle \psi, f \rangle$  为

$$\langle \psi, f \rangle = \int \psi f d u d v d w d \xi \quad (2)$$

那么守恒量  $U = \langle \psi, f \rangle$ , 通量  $F = \langle \psi, v f \rangle$  其中矩矢量  $\psi$  为

$$\psi = (1, u, v, w, \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 + \xi^2))^T \quad (3)$$

(1), (2), (3) 式中的  $f$  为 Maxwellian-Boltzmann 分布函数, 具有如下形式

$$f = \rho \frac{\lambda^{3/2}}{\pi} e^{-\lambda[\|u-v\|^2 + \xi^2]} \quad (4)$$

这里  $v = (u, v, w)$  为微观速度向量;  $u$  为宏观速度向量;  $\lambda = 0.5\rho/p$ ; 变量  $\xi$  表示内自由度。考虑如下形式的格心型 Euler 方程:

$$\int_V \partial_t U dV + \int_{\partial V} F \cdot dS = 0 \quad (5)$$

其中, 通量  $F$  在分子动理学理论中代表了分子随机运动的宏观物理量。在多面体单元的每个面上, 通量是由于分子的穿透而引起的。分子从左向右(从本单元向相邻网格运动)穿透时的物理量为  $U_L$ , 法向速度  $V_n > 0$ , 从右向左穿透时正相反。那么我们可以按正负速度两部份利用麦克斯韦分布来计算最后的通量。

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} F \cdot dS &= F^+ + F^- \\ F^+ &= \int_{\partial V} \int_0^\infty v f \psi dV_n d\xi dS \\ F^- &= \int_{\partial V} \int_{-\infty}^0 v f \psi dV_n d\xi dS \end{aligned} \quad (6)$$

这正是 KFVS 动能格式<sup>[10]</sup>。该通量在多面体的多个面上累积得到空间残差, 形成带时间项的半离散方程组。最后, 时间推进采用了 Gnoffo 的点弛松方法<sup>[11]</sup>。

### 1.2 基于径向基函数的梯度公式

二阶精度的网格中心型有限体积法需要在网格的面心上得到二阶精度的物理量。面心物理量需要利用网格中心处的梯度量然后通过 Taylor 插值得到。然而, 梯度计算的准确性决定了二阶精度求解器的性能, 错误的大梯度量在高超声速计算中将直接导致程序发散。针对任意网格周围相邻网格的散乱分布特性, 我们需要一种不依赖于几何外形, 只与相邻点几何坐标有关并且是一种非平均拟合的梯度计算方法。

其中, 径向基函数方法(Radial Basis Function, RBF)<sup>[12]</sup>是一种灵活和准确的多维插值方法, 广泛应用在图像处理, 神经网络等领域, 还有众多学者将其应用到了偏微分方程的求解中<sup>[12]</sup>。Shu 将其应用到无网格方法中, 发展了 RBF-DQ 方法<sup>[13]</sup>。本文将 RBF 方法应用到格心型多面体有限体积法中, 来准确的求解高速流场问题。详细的方法介绍如下:

假设在局部单元模板  $X = \{x_k\}_{k=1,N}$  上的待求函数为  $T(x)$ 。设  $\phi$  为径向基函数, 那么在该局部模板区域的重构函数有以下形式

$$S(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi(\|x - x_k\|) + \sum_{k=1}^4 \beta_k d_k(x) \quad (7)$$

其中,  $\|\cdot\|$  代表了标准的欧氏空间模,  $d_k(x) = \{1, x, y, z / 1 \leq k \leq 4\}$  是一阶自由度多项式基。系数  $\alpha_k$  和  $\beta_k$  为待定系数, 需要满足以下几个条件: 首先, 需要保证待插函数能够精确等于原数据

$$S(x_k) = T(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

另外  $\beta_k$  必须满足以下条件来保证线性系统非奇异

$$\sum_{k=1}^4 \beta_k d_k(x_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

我们选择  $\phi$  为 Multiquadrics (MQ) 基, 通常认为该基函数具有较好的性能

$$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}, \quad c > 0 \quad (10)$$

本文给出自由参数  $c$  为以下形式, 它表示任意多面体网格局部的平均尺度

$$c = \frac{N}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{r_k}} \quad (11)$$

根据径向基函数基本理论, 我们得到如下线性方程组

$$\begin{matrix} A & B & a & T \\ B^T & 0 & \beta & 0 \end{matrix} = 0 \quad (12)$$

其中  $A$  为径向基矩阵,  $B$  为一阶自由度矩阵

$$A_{ij} = \phi(\|x_i - x_j\|); \quad B_{ij} = d_i(x_j) \quad (13)$$

在 (8), (9) 条件的约束下, 该线性系统是非奇异有唯一解的。求解该系统后, 我们得到了  $S(x)$  的表达式。注意  $S(x)$  是可微的, 那么我们可以得到  $S(x)$  的梯度表达式如下

$$\nabla q(x_c) = \sum_{i=1}^N \alpha_k \nabla \phi(\|x_c - x_i\|) + \sum_{i=1}^4 \beta_i \nabla d_i(x_c) \quad (14)$$

最后, 空间二阶精度采用 Van Leer 的 MUSCL 方法<sup>[14]</sup>由梯度插值获得。Venkatakrishnan 的限制器<sup>[15]</sup>用来抑制间断处数值震荡, 其参数  $k$  取为 4。

## 2 数值验证

### 2.1 Mach 3 的超音速进气道

该算例用来验证 XPOLY 求解器在非结构六面体上的准确度。进气道入口正向来流马赫数为 3, 为定常流动状态。进气道的几何数据参见<sup>[16]</sup>。网格是由二维非结构四边形网格在  $Z$  方向拉伸一层形成准二维非结构六面体网格, 网格数为 41479, 网格点 84898, 网格平均尺度为 0.0370, 采用三维计算。网格的局部放大图见图 1。图 2、图 3 给出了 XPOLY 与 Löhner 的 FEFLO 求解器<sup>[17]</sup>的 Mach 数对比云图。其中 FEFLO 采用了 540000 个网格, 106000 个网格点, 网格平均尺度为 0.03。其算法基于 Löhner 改进的有限元方法, Roe 格式配合 2 阶精度 MUSCL 重构。可以看出本文的结果具有较高的精度, 给出了一致的激波反射结构。

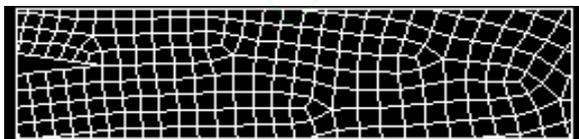


图 1 局部网格  
Fig.1 Local mesh

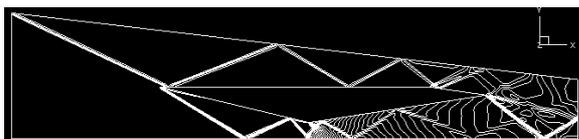


图 2 Mach数云图 (XPOLY)  
Fig.2 Mach number contours of XPOLY

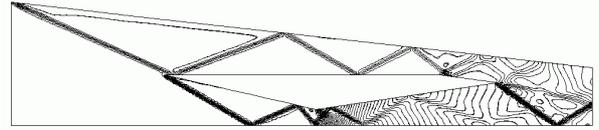


图 3 Mach数云图 (FEFLO<sup>[16,17]</sup>)  
Fig.3 Mach number contours of FEFLO

### 2.2 跨音速 ONERA M6 机翼

ONERA M6<sup>[18]</sup>是考核无粘流动的标准算例。来流马赫数 0.8395, 迎角 3.06 度。该算例用来考核求解器在多块结构网格 (如图 4) 下的计算准确度, 单元数为 294912, 网格点数为 306577。如图 5 所示, XPOLY 计算得到的机翼表面压力云图清晰的显示出了  $\lambda$  形状的表面激波轮廓, 进一步的截面处压力系数对比由图 6 给出。

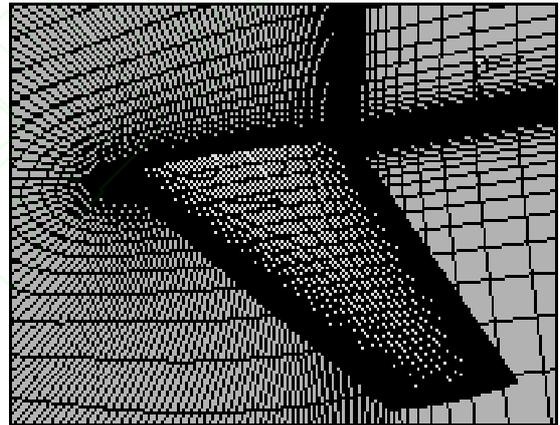


图 4 M6 的多块结构网格  
Fig.4 Multi-block grids of M6

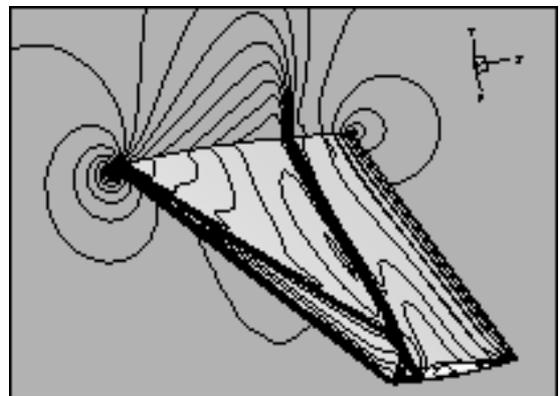


图 5 表面压力系数分布  
Fig.5 Surface pressure distribution

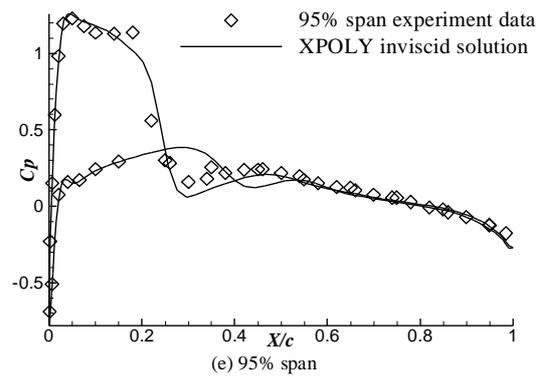
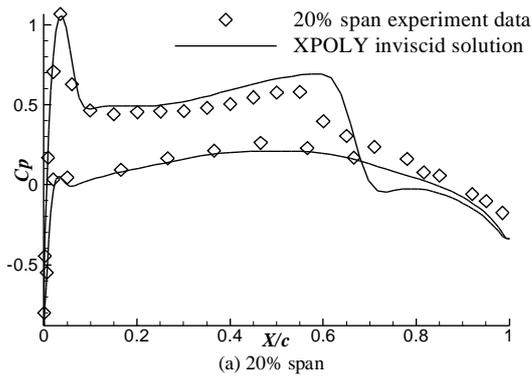
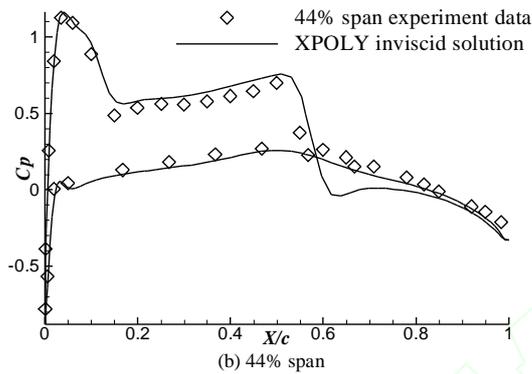


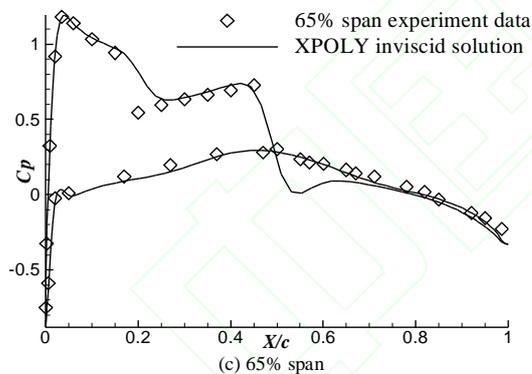
图 6 截面处的压力系数比较

Fig.6 Comparisons of surface pressure coefficient on cuts



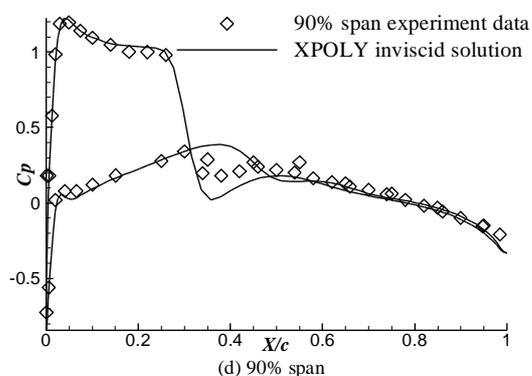
### 2.3 基于蜂窝网格的飞机前体模型验证

在这一部分,采用了类似蜂窝形状的多面体网格对计算工况为Mach数4.5,攻角和侧滑角均为0度的超音速飞机头部绕流进行了模拟,以评估超声速条件下本文所发展的计算方法准确性和基于蜂窝网格计算的可行性。该飞机头部几何模型在 NASA Lanley Research Center 进行了风洞实验<sup>[19]</sup>,其外形为解析模型,由下式给出



$$\begin{aligned} \frac{r_l(x)}{l} &= 1 - \frac{x}{2l} - \frac{x}{l} \tan 2^\circ \\ \frac{y}{r_l} &= 1 + (1.35a - 1) \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin \theta \\ \frac{z}{r_l} &= 1 + (1.35a - 1 + \frac{0.35}{\cos \theta}) \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos \theta \\ a &= \frac{1}{1.25 - 0.25 \cos 2\theta + 0.13174(\cos \theta - \cos 3\theta)} \quad (15) \end{aligned}$$

其中 $l$ 为机头长度,等于35.56cm; $r_l$ 为 $l$ 处径向距离; $\theta$ 为到ZX平面的逆时针夹角。



本文所采用的蜂窝网格生成方法<sup>[7]</sup>分为两个步骤:首先生成计算域的非结构四面体网格(也可以是混合网格),然后连接局部网格模板的单元中点,改变其拓扑结构重新组成新的多面体。图7给出了该方法在二维情况下的直观示意图,以便于直观的理解三维多面体网格的生成方法。二维情况下连接三角形中心点重新连成多边形网格,其中图7所示连接边线中点得到的虚线多边形就是节点型有限体法所用到的控制网格。文献<sup>[7]</sup>对节点型有限体方法与格心型多面体方法在低速流动中进行了比较,发现格心型多面体方法

具有更强的抗网格扭曲能力。最后利用上述方法对四面体进行合成得到了本文计算所用的多面体网格。

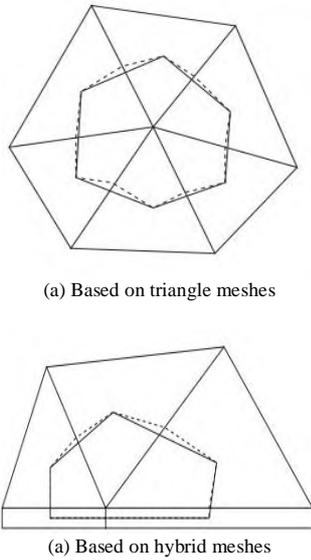


图 7 连接网格中点所形成的蜂窝状网格

Fig.7 Honeycomb grids obtained by using centroid-dual tessellations

图8给出了机头的表面多边形网格与横截面处的空间蜂窝网格，计算域共计383497个蜂窝网格，2248713个网格点。表面的压力云图及对称面压力分布图由图9给出。正如所期盼的一样，采用蜂窝网格计算得到了快速准确的结果，迭代在900步收敛，L2密度残差下降了6.3个量级，如图10。在图11中，将无粘计算得到的上下表面中线处的压力系数结果与实验数据进行了对比，结果吻合的较好，验证了利用蜂窝网格进行高速流场计算的可行性。

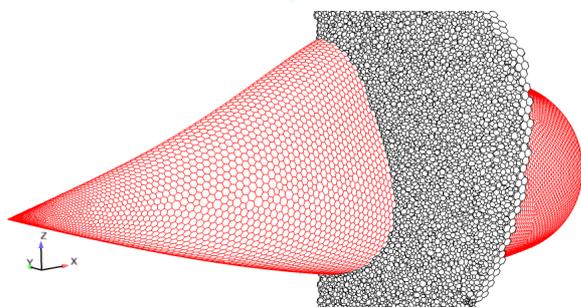


图 8 表面及截面蜂窝网格

Fig.8 Honeycomb grids on surface and cross section

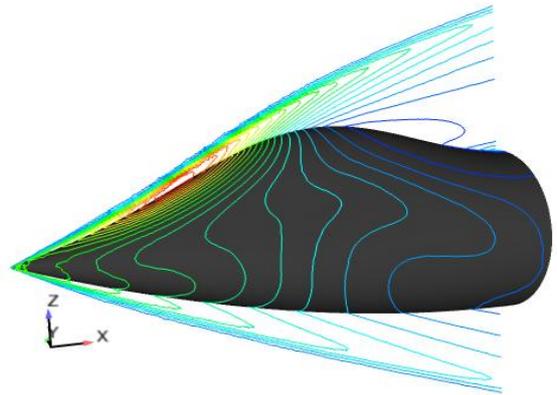


图 9 压力分布云图

Fig.9 Pressure contour

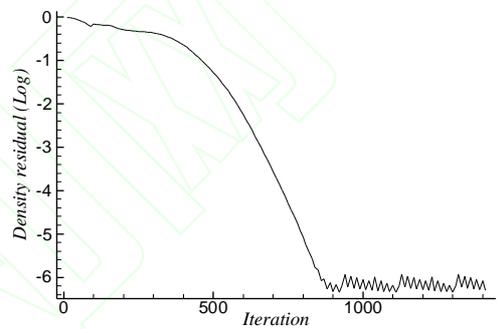


图 10 L2 密度残差收敛历史

Fig.10 Convergence history of L2 density residual

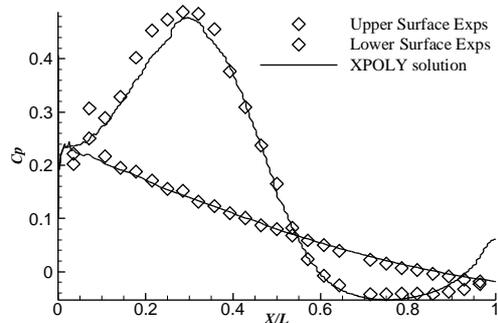


图 11 上下表面中线处压力系数与实验值的比较

Fig.11 Comparisons of surface pressure coefficient on the middle lines of lower and upper surfaces

## 2.4 飞行器全机绕流计算

通过对上述若干标准模型的计算表明，XPOLY求解器在各种不同类型的网格上所得到的解都是比较准确可信的。在此基础上，将采用蜂窝网格定性的来验证求解器对包含复杂激波波系、复

杂几何外形的计算能力。算例采用近似的F-18战斗机外形，计算条件为该机无攻角正向最大飞行速度1.8马赫。图12给出了飞机在三个角度下的网格视图，从图中可以清晰地观察到蜂窝状网格结构。图13给出了对称面和半模表面的速度分布。在超音速飞行下，由于对发动机进气道采取了封闭处理，进口处应存在一道强激波；飞机头部应该产生圆锥形激波面；在座舱与头部交汇处存在压缩拐角效应，理论上应该出现激波。这些预期的流场特征都从计算中得以很好的验证，从而论证了利用蜂窝网格计算复杂飞行器的可行性。在图14中，我们可以看到在1200步左右密度残差收敛近6个量级。

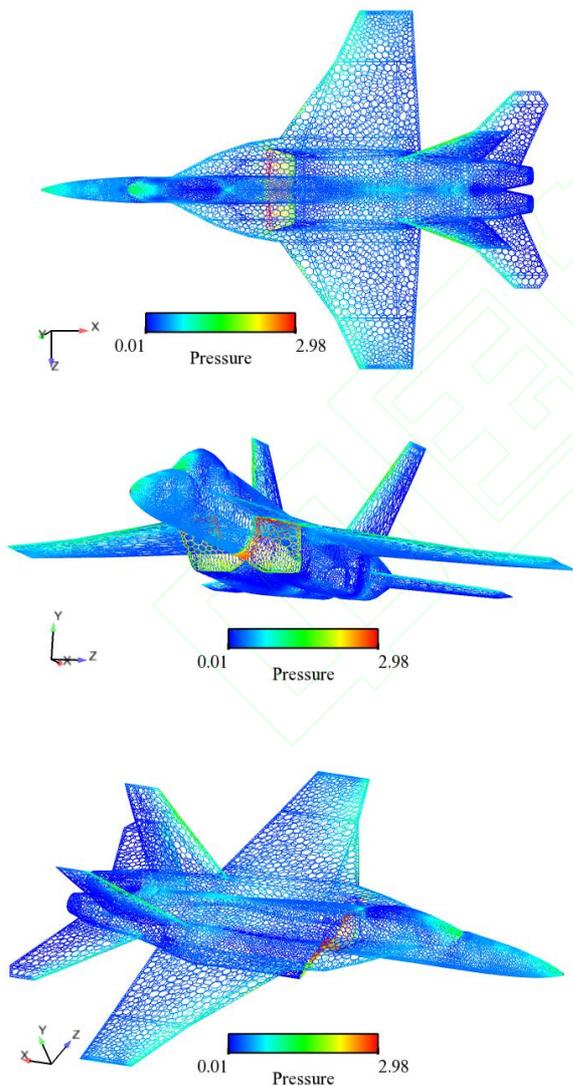


图 12 表面蜂窝网格

Fig.12 Honeycomb grids of surface

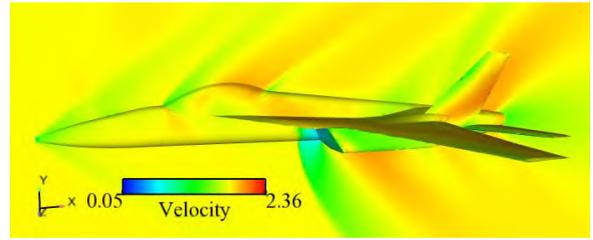


图 13 全机速度云图

Fig.13 Velocity contour of F-18

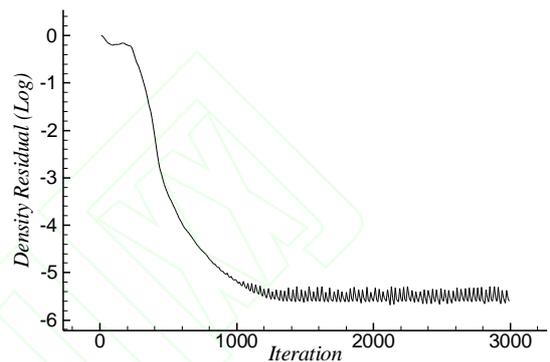


图 14 L2 密度残差收敛历史

Fig.14 Convergence history of L2 density residual

### 3 结论

(1) 本文成功发展了支持任意网格的新型求解器并进行了若干标准算例验证。所得到的结果与实验及参考文献一致，验证了本文计算方法及程序的正确性及准确性。

(2) 所采用的动能通量分裂格式具有稳定可靠的性能；所发展的基于径向基函数的重构算法通过了任意类型网格的验证，在任意类型网格下都能得到清晰的激波轮廓，具有宽广的网格适应性。

(3) 本文所发展的求解器XPOLY可以应用到航空航天预研的快速气动力计算中。

### 致 谢

特别感谢冷伟博士，韩同来博士，薄旭硕士对本文工作提出的宝贵意见。

### 参 考 文 献

- [1] Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes[R]. AIAA-1981-

- 1259, 1981.
- [2] Barth T J, Jespersen D C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes[R]. AIAA-1989-0366, 1989.
- [3] Löhner R, Parikh P. Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing-front method[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1988, 8(10): 1135-1149.
- [4] Mavriplis D J. Multi-grid techniques for unstructured meshes, VKI Lecture Series VKI-LS 1995-02[M]. Belgium: Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1995.
- [5] Frink N T. Upwind scheme for solving the Euler equations on unstructured tetrahedral meshes[J]. AIAA Journal, 1992, 1(1): 70-77.
- [6] Venkatakrishnan V, Mavriplis D J. Implicit solvers for unstructured meshes[R]. AIAA-1991-1537-CP, 1991.
- [7] Ahn H T, Carey G F. An enhanced polygonal finite-volume method for unstructured hybrid meshes[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, 54:29-46.
- [8] Mandal J C, Deshpande S M. Kinetic flux vector splitting for Euler equations[J]. Computers and Fluids, 1994, 23(2): 447-478.
- [9] Van Leer B, Thomas J, Roe P et.al. A comparison of numerical flux formulas for the Euler and Navier-Stokes equations[R]. AIAA-1987-1104, 1987.
- [10] Xu Kun. A Gas-kinetic BGK scheme for the Navier-Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 1(171): 289-33.
- [11] Gnoffo P A. An upwind-biased, point-implicit relaxation algorithm for viscous, compressible perfect-gas flows[R]. NASA TP-2953, 1990.
- [12] Buhmann M D. Radial basis functions: theory and implementations[M]. Cambridge University Press. 2003.
- [13] Wu Y L, Shu C. Development of RBF-DQ method for derivative approximation and its application to simulate natural convection in concentric annuli[J]. Computational Mechanics, 2002, 29: 477-485.
- [14] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference Scheme, V. A second order sequel to Godunov's method[J]. Journal of Computational Physics, 1979, 1(32):101-136.
- [15] Venkatakrishnan V. On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions[R]. AIAA-1993-0880, 1993.
- [16] Löhner R. CFD3: Sample Problems[EB/OL]. (1999-08-24) [2011-01-07].<http://lcp.nrl.navy.mil/cfd-cta/CFD3/>
- [17] Löhner R. Applied computational fluid dynamics techniques: an introduction based on finite element methods, 2nd Edition[M]. John Wiley & Sons, Ltd. 2008:360-361.
- [18] Schmitt V, Charpin F. Pressure distributions on the ONERA-M6-Wing at transonic mach numbers[R]. AGARD AR-138, 1979.
- [19] Townsend J C, Howell D T, Collins I K et.al. Surface pressure data on a series of analytic forebodies at mach numbers from 1.70 to 4.50 and combined angles of attack and sideslip[R]. NASA TM-80062, 1978.

#### 作者简介：

李书杰 (1983 - ) 男, 博士研究生。主要研究方向：计算流体力学, 高阶格式及无网格算法。

Tel: 010-82544010

E-mail: xpoly.sj@gmail.com

杨国伟 (1967 - ) 男, 博士, 研究员, 博士生导师。主要研究方向：计算流体力学, 包括定常流, 非定常流, 流体/结构干扰, 动稳定性, 气动优化设计, 计算方法, 气动激光等。

Tel: 010-82544006

E-mail: gwyang@imech.ac.cn

## Research on Numerical Algorithm of Euler Equations on Arbitrary Polyhedral Grids

LI Shujie<sup>1,\*</sup>, YANG Guowei<sup>1</sup>

1. *Laboratory of High Temperature Gas Dynamics (LHD), Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*

**Abstract:** In this paper, a new algorithm for solving Euler equations is developed and validated on polyhedral grids. A general solver which supports arbitrary mesh topology and three-dimensional complex geometry is constructed by using Fortran95 language. For spatial discretization, a new improved radial basis function method is proposed for gradient calculation. An accurate and robust second-order reconstruction is achieved by using Kinetic Flux Vector Splitting scheme. The new method does not depend on the geometry of grid. Thus it is much less sensitive to the grid quality. With a point implicit relaxation time marching strategy, the solver remains stable at large time step. The test cases indicate that the algorithm and the solver developed in this paper are stable, accurate while exhibit good flexibility on mesh universality.

**Key words:** polyhedral grid; honeycomb grid; radial basis function; kinetic flux vector splitting; unstructured; complex geometry; compressible flow;

---

\* Received : 2010-11-30 ; Revised : 2010-12-26 ; Accepted : 2011-01-06 ; Available online :  
Online website : DOI :

Foundation item : Funded by The CAS Special Grant for Postgraduate Research, Innovation and Practice (2009)

\*Corresponding author. Tel. : 010-82544010 E-mail: xpoly.sj@gmail.com