

# 时-空守恒元解元 (CE/SE) 方法综述\*

刘凯欣<sup>1,†</sup> 王景焘<sup>1</sup> 王刚<sup>3</sup> 陈千一<sup>1,2</sup> 付峥<sup>1,2</sup> 吴士玉<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> 北京大学工学院力学与空天技术系, 湍流与复杂系统研究国家重点实验室, 北京 100871

<sup>2</sup> 北京大学高能密度物理数值模拟教育部重点实验室, 北京大学应用物理与技术研究中心, 北京 100871

<sup>3</sup> 中国科学院力学研究所, 北京 100190

**摘 要** 时-空守恒元解元方法是近年来兴起的一种全新的高分辨率守恒方程型方程计算方法. 它具有物理概念清晰、计算精度高和格式构造简单等优点, 是一种具有广阔发展前景的计算方法. 本文详细地介绍了 CE/SE 方法的基本原理、发展历史、应用情况和最新进展, 并指出了当前研究的不足和发展方向.

**关键词** CE/SE 方法, 守恒律方程组, 冲击动力学, 等位集方法

## 1 引 言

经过几十年的发展, 数值计算已经成为研究各种复杂力学问题的重要工具, 它同实验、理论分析一起构成了研究力学现象及规律的三大基本方法. 在流体力学领域, 主要使用以欧拉网格描述的有限差分 and 有限体积方法. 其中: TVD、ENO、NND 等一批高精度格式能够有效抑制非物理振荡, 对间断具有较高的分辨率; 另外, 以紧致格式为代表的计算格式在不减低精度的情况下, 利用导数项有效地减少了适用的基点数. 但是, 这些方法为了保障不产生非物理色散往往要采用一些复杂的手段: 在空间方向通过流通量分裂, 并根据迎风格式的构造特点选择合理的模板, 组成逼近流通量函数的多项式, 在时间上往往采用具有 TVD 性质的龙格-库塔方法; 当求解高维问题时, 有些方法还要引入算子分裂等技术, 消耗了大量的计算时间, 同时也为格式的构造带来了困难. 另外, 为了提高格式的计算精度, 往往选择更多的计算模板和网格点, 这又增加了边界结点的计算难度. 在固体力学领域, 主要使用以拉格朗日网格描述的有限元方法. 有限元方法能够方便地计算复杂结构的力学问题, 但当材料及结构产生较大变形时, 计算精度就要降低甚至出现网格畸变问题.

在传统的力学研究中, 一般把物质状态区分为流体和固体两大类, 相应发展起来了计算流体力学和计算固体力学这两个分支. 但是, 在计算伴随有大变形、高应变率、相变和动态断裂等复杂力学现象的冲击动力学或爆炸力学问题时, 单纯采用固体模型或流体模型是不合适的. 固体在受到强冲击作用后的某瞬间, 其作用点 (面) 附近可能发生熔化甚至气化—表现出流体的力学行为; 但远离其作用点 (面) 的某个部位在该瞬间可能仍旧是固体; 而经过一定的时间后, 由于冲击波的传播该部位也可能发生熔化甚至气化. 流体弹塑性模型<sup>[1]</sup> 可以自然连续地描述固体与流体间的过渡过程. 然而, 出于求解上述复杂的冲击动力学或爆炸力学问题的需要, 对数值计算工作提出了更高的要求: 固体部分要算得好, 流体部分也要算得好, 而且要处理好多物质界面的追踪及强间断问题, 实现高精度、高分辨率和高效率. 此类问题的处理方案主要有欧拉型网格配合高精度的界面追踪的计算方法, 任意拉格朗日-欧拉方法<sup>[2]</sup> (arbitrary Lagrangian-Eulerian, ALE) 和近来兴起的以光滑粒子流体动力学方法 (smooth particle hydrodynamics, SPH)<sup>[3]</sup> 为代表的无网格方法.

为了简化格式的构造过程, 增加求解速度, NASA Lewis 研究中心的 Chang 研究组<sup>[4-7]</sup> 提

收稿日期: 2010-11-15, 修回日期: 2011-05-11

\* 国家自然科学基金资助项目 (10732010, 10972010, 11028206)

† E-mail: kliu@pku.edu.cn

出来了一种新的显式计算守恒型方程的格式——时-空守恒元解元方法 (space-time conservation element and solution element method, CE/SE). 这种方法从根本上区别于传统的方法: 它将时间和空间统一起来同等对待; 利用守恒型积分方程, 通过定义解元和守恒元使得局部和整体都严格满足守恒律; 在推广到多维问题时, 不需要采用算子分裂或者方向交替技术; 该方法在给出网格点物理量值的同时也一起给出了物理量的偏导数, 同传统的差分格式相比, 在相同的基点下可以大大提高格式精度. CE/SE 方法能以较高的分辨率求解间断流场; 它的另一个优点就是构造比较简单, 除了简单的泰勒展开和散度定理外, 没有采用复杂的数值方法, 尤其是不需要采用其他的特征分析数值方法 (如 Riemann 求解器) 来捕捉激波、抑制振荡等. CE/SE 方法已被成功应用于流体、固体以及流体弹性模型的数值计算中.

本文首先介绍 CE/SE 方法的基本原理, 然后介绍该方法的发展历史、应用现状, 最后论述该方法当前需要解决的问题和发展方向.

## 2 CE/SE 方法的基本原理

CE/SE 方法与有限体积方法具有相似的特性, 也采用三角形或四边形网格 (三维采用四面体或六面体网格), 利用格林公式将体积分形式的控制方程转化为面积分形式的通量方程, 通过求解转化后的通量方程得到问题的数值解. 但是, CE/SE 方法又具有自己的特点: 该方法采用泰勒展式构造格式; 在捕捉激波间断时, 仅处理数值导数项, 不采用流通量分裂、黎曼求解器等 CFD 中常见的间断捕捉方法, 提高了格式的求解速度并简化了格式的构造过程. 它把时间等同为欧氏空间的一个分量, 通过散度定理将  $n$  维空间的守恒型体积分

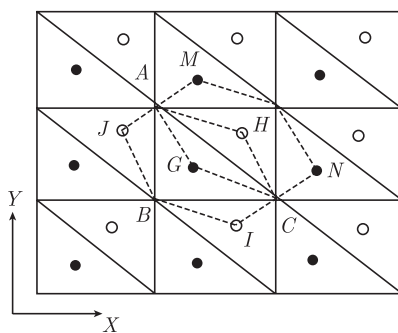
发展方程转化为  $n+1$  维空间 (在原坐标基础上增加时间为第  $n+1$  维分量) 各表面的面积分方程, 保障了时空区域的守恒性. 在求解过程中, 用类似于紧致格式的方法来计算各物理量的空间导数, 从而在不增加模板点的基础上提高了格式的计算精度. 下面具体阐述 CE/SE 方法的格式构建方式.

### 2.1 守恒元解元划分方案

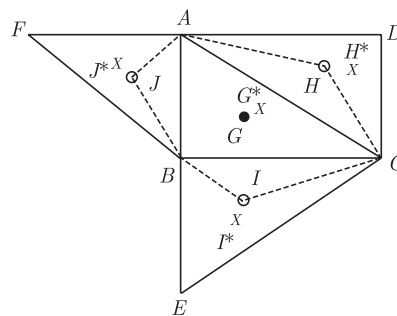
经过十多年的发展, CE/SE 方法格式的构造也有了很大变化. 最初, CE/SE 方法在解元中对物理量采用一阶泰勒展开, 如果展开到高阶, 就可以相应提高计算精度. 张增产等<sup>[8]</sup>、杨吉民等<sup>[9]</sup> 采用二阶泰勒展开得到了一维二阶 CE/SE 格式. 刘凯欣等<sup>[10]</sup> 采用任意阶泰勒展开得到了一维任意阶的 CE/SE 格式, 并且对一维二阶的 CE/SE 格式做了稳定性分析, 同时指出二阶或更高阶的格式会大大增加计算时间, 但对计算精度提高不大, 只有求解含有三阶以上导数项的方程 (如 KdV 方程) 才必须采用高阶格式. 这里以二维问题为例, 介绍两种常见的守恒元解元划分方案. 三维问题的相关内容可参考文献<sup>[11-12]</sup>.

#### 2.1.1 基于三角形网格的守恒元解元划分方案

CE/SE 的二维格式首先由 Chang 的研究组提出<sup>[4,13]</sup>, 并顺利将该格式推广到非结构网格 (如图 1). 他们的守恒元解元划分方案, 采用三角形网格 (对于四边形网格可将每个单元分为两个三角形单元如图 1(a)). 图 1(b) 中 “●” 和 “○” 代表的网格点在时间方向相差  $\Delta t/2$ ,  $G$ 、 $H$ 、 $I$ 、 $J$  分别为  $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle ABF$  的质心.  $G^*$  为多边形  $AHCIBJ$  的质心, 由于求得各流体变量的数值存储在  $G^*$ ,  $G^*$  又被称为求解点 (solution point),  $H^*$ 、 $I^*$ 、 $J^*$  分别对应于各相邻网格单元的求解点.



(a) 二维区域网格划分方案



(b) 求解点的定义



该格式的计算顺序与 Chang 的不同, 是节点 → 单元质心 → 节点交替进行. 如果  $G$ 、 $E$ 、 $A$ 、 $C$  处于第  $n\Delta t$  层, 则为网格结点, 处于第  $(n+1/2)\Delta t$  层, 则为网格质心.  $P'$  是下一时刻的求解点. 图 2(c) 中的柱体  $ABPH'A'B'P'H'$ 、 $BCDPB'C'D'P'$ 、 $DEFPD'E'F'P'$ 、 $FGHPF'G'H'P'$  是与  $P'$  对应的守恒元, 图 2(b) 中的面  $BFF''B''$ 、 $HDD''H''$ 、 $A'C'E'G'$  是与  $P'$  对应的解元.

## 2.2 格式构造

这里以王刚等<sup>[16]</sup> 推导的二维二阶 CE/SE 格式为例说明 CE/SE 格式的构造过程, 其守恒元解元划分见图 2.

考虑二维守恒型欧拉方程, 其积分形式如下式

$$dl \int_V \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) dV = 0 \quad (1)$$

这里把时空等同为欧氏空间的分量, 则由散度定理, 在时空柱  $ACEGA'C'E'G'$  中式 (1) 可以转化为时空三维的表面积分

$$\int_{\partial V} (\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}^T dS = \sum_{ACEGA'C'E'G'} \int_{dS_k} (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{n}_k^T dS_k = 0 \quad (2)$$

为了计算式 (2) 中的表面积分, 利用 2.1.2 节中的守恒元解元划分方案, 采用二阶泰勒展式将  $A$ 、 $C$ 、 $E$ 、 $G$  的物理量分别展开到包含相应点的守恒元表面的质心, 作为各表面的物理量平均值  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{F}}$ ; 同样采用二阶泰勒展式将  $P'$  的物理量展开到解元表面的质心作为解元各表面物理量的平均值. 将以上平均值代入式 (1) 的微分形式的方程中可以得到各守恒量的时间导数和空间导数的关系

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_t)_{P'} = -(\mathbf{E}_x)_{P'} - (\mathbf{F}_y)_{P'} \\ (\mathbf{u}_{tt})_{P'} = -(\mathbf{E}_{xt})_{P'} - (\mathbf{F}_{yt})_{P'} \\ (\mathbf{u}_{yt})_{P'} = -(\mathbf{E}_{xy})_{P'} - (\mathbf{F}_{yy})_{P'} \\ (\mathbf{u}_{xt})_{P'} = -(\mathbf{E}_{xx})_{P'} - (\mathbf{F}_{xy})_{P'} \end{cases} \quad (3)$$

再将这些平均值代入式 (2) 中, 并认为在  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{F}}$  的表达式中  $A$ 、 $C$ 、 $E$ 、 $G$ 、 $P'$  的物理量及其导数值为常数, 积分后可得关于  $\mathbf{u}(P')$  的方程

$$(\mathbf{u})_{P'} + \frac{\Delta x^2}{24} (\mathbf{u}_{xx})_{P'} + \frac{\Delta y^2}{24} (\mathbf{u}_{yy})_{P'} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[ f\left(\mathbf{u}_A, \frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, 0\right) + f\left(\mathbf{u}_C, -\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, 0\right) + \right. \\ & \left. f\left(\mathbf{u}_E, -\frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, 0\right) + f\left(\mathbf{u}_G, \frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, 0\right) \right] + \\ & \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ f\left(\mathbf{u}_A, 0, \frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta t}{4}\right) - f\left(\mathbf{u}_C, 0, \frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta t}{4}\right) - \right. \\ & \left. f\left(\mathbf{u}_E, 0, -\frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta t}{4}\right) + f\left(\mathbf{u}_G, 0, -\frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta t}{4}\right) \right] + \\ & \frac{\Delta t}{4\Delta y} \left[ f\left(\mathbf{u}_A, \frac{\Delta x}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4}\right) + f\left(\mathbf{u}_C, -\frac{\Delta x}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4}\right) - \right. \\ & \left. f\left(\mathbf{u}_E, -\frac{\Delta x}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4}\right) - f\left(\mathbf{u}_G, \frac{\Delta x}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4}\right) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f(M_P, x, y, t) &= (M)_P + (M_x)_{Px} + \\ & (M_y)_{Py} + (M_t)_{Pt} + \frac{2}{3} (M_{xx})_{Px^2} + \\ & \frac{2}{3} (M_{yy})_{Py^2} + \frac{2}{3} (M_{tt})_{Pt^2} + \\ & (M_{xy})_{Pxy} + (M_{yt})_{Pyt} + (M_{xt})_{Pxt} \end{aligned} \quad (5)$$

然后, 利用物理量的时空连续性计算  $P'$  点的导数值. 具体过程为: 首先用  $A$ 、 $C$ 、 $E$ 、 $G$  物理量的时间泰勒展式分别表示  $A'$ 、 $C'$ 、 $E'$ 、 $G'$  的物理量, 再用  $P'$  处物理量的空间泰勒展式表示  $A'$ 、 $C'$ 、 $E'$ 、 $G'$  的物理量, 由  $A'$ 、 $C'$ 、 $E'$ 、 $G'$  的物理量连续可以建立关于  $P'$  处导数值的方程.

为了改善 CE/SE 方法对激波的捕捉, 选取式 (6) 将得到的  $P'$  处左右导数值 (下标分别为 1 和 2) 进行加权平均得到最终的结果. 其中  $1 \leq \alpha \leq 2$ .

$$\begin{aligned} (u_x)_{P'} &= \frac{|(u_x)_2|^\alpha (u_x)_1 + |(u_x)_1|^\alpha (u_x)_2}{|(u_x)_1|^\alpha + |(u_x)_2|^\alpha} \\ (u_y)_{P'} &= \frac{|(u_y)_2|^\alpha (u_y)_1 + |(u_y)_1|^\alpha (u_y)_2}{|(u_y)_1|^\alpha + |(u_y)_2|^\alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

$\mathbf{u}(P')$  的方程中会包含  $\mathbf{u}_{xx}(P')$  和  $\mathbf{u}_{yy}(P')$ , 是一个隐式方程. 刘凯欣等<sup>[10]</sup> 采用与求  $P'$  点的导数值相似的思路, 利用  $P'$  点物理量的一阶导数值首先得到  $\mathbf{u}_{xx}(P')$  和  $\mathbf{u}_{yy}(P')$ , 再将  $\mathbf{u}_{xx}(P')$  和  $\mathbf{u}_{yy}(P')$  代入  $\mathbf{u}(P')$  的方程使其转化为显式方程.

综上所述, CE/SE 方法的格式构造过程大致为:

(1) 将微分形式的控制方程利用散度定理公式化为时空表面的积分形式. 积分形式的控制方

程是更一般的控制方程, CE/SE 方法是从积分形式的控制方程出发推导数值格式, 因此对控制方程的附加要求更少;

(2) 将解元上的守恒量基于解元中心点进行泰勒展开. 这一步能否顺利进行依赖于解元的划分方式;

(3) 将泰勒展开的守恒量代入微分形式的控制方程, 可以得到守恒量的时间导数和空间导数的关系. 因此, 在实际求解中只需要求解守恒量的空间导数即可;

(4) 借助守恒量的泰勒展开, 在守恒元上求解积分形式的控制方程, 整理得到数值格式. 这一步直接依赖于守恒元的划分方式.

由此可见, 在整个求解过程中, 守恒元和解元的划分直接关系到能够顺利得到数值格式, 以及得到的数值格式的简洁性和准确性. 因此, 自 CE/SE 方法提出以来, 很多改进措施都是基于如何更合理地划分守恒元和解元.

### 2.3 格式分析

根据 2.1 节和 2.2 节的讨论, CE/SE 的构造过程可以分解为在每个守恒元中单独建立关于求解点的物理量及物理量导数项的方程, 然后以某种方式将这些方程进行组合从而得到最终的待求量. 因此, 可以首先对关于某求解点的一个守恒元进行分析, 再将得到的结论推广到其他守恒元, 从而得到所需的结论.

为了简化格式的分析过程, 本节仅取到一阶导数. 下面取图 2 中与  $P'$  对应的守恒元  $ABP'HA'B'P'H'$  为例进行阐述. 为了不失一般性, 假设四边形  $ABPH$  为一般凸四边形. 对时空任意两点  $P, Z$ , 设  $\delta_{PZ}^y = y_P - y_Z, \delta_{PZ}^x = x_P - x_Z, \delta_{PZ}^t = t_P - t_Z$ . 将这些表达式代入式 (5) 且只取到一阶导数, 可求得

$$\begin{aligned} f(M_P, \delta_{ZP}^x, \delta_{ZP}^y, \delta_{ZP}^t) &= (M)_P + \\ & (M_x)_P \delta_{ZP}^x + (M_y)_P \delta_{ZP}^y + (M_t)_P \delta_{ZP}^t, \end{aligned} \quad (7)$$

在该守恒元内关于  $P'$  点处物理量的方程为

$$\begin{aligned} f((\mathbf{u})P', \delta_{QP}^x, \delta_{QP}^y, 0) &= f((\mathbf{u})A, \delta_{QA}^x, \delta_{QA}^y, 0) + \\ & \frac{\Delta t}{2S_{ABPH}} \left[ |AB| \mathbf{n}_{AB} \cdot \left( f \left( (E)A, \frac{\delta_{BA}^x}{2}, \frac{\delta_{BA}^y}{2}, \frac{\Delta t}{4} \right), \right. \right. \\ & \left. \left. f \left( (F)A, \frac{\delta_{BA}^x}{2}, \frac{\delta_{BA}^y}{2}, \frac{\Delta t}{4} \right) \right) - \right. \\ & \left. |PB| \mathbf{n}_{PB} \cdot \left( f \left( (E)P', \frac{\delta_{BP'}^x}{2}, \frac{\delta_{BP'}^y}{2}, -\frac{\Delta t}{4} \right), \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. f \left( (F)P', \frac{\delta_{BP'}^x}{2}, \frac{\delta_{BP'}^y}{2}, -\frac{\Delta t}{4} \right) \right) + \\ & |AH| \mathbf{n}_{AH} \cdot \left( f \left( (E)A, \frac{\delta_{HA}^x}{2}, \frac{\delta_{HA}^y}{2}, \frac{\Delta t}{4} \right), \right. \\ & \left. f \left( (F)A, \frac{\delta_{HA}^x}{2}, \frac{\delta_{HA}^y}{2}, \frac{\Delta t}{4} \right) \right) - \\ & \left. |PH| \mathbf{n}_{PH} \cdot \left( f \left( (E)P', \frac{\delta_{HP'}^x}{2}, \frac{\delta_{HP'}^y}{2}, -\frac{\Delta t}{4} \right), \right. \right. \\ & \left. \left. f \left( (F)P', \frac{\delta_{HP'}^x}{2}, \frac{\delta_{HP'}^y}{2}, -\frac{\Delta t}{4} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{n}_{AB}, \mathbf{n}_{PB}, \mathbf{n}_{AH}, \mathbf{n}_{PH}$  分别代表边  $AB, PB, AH$  和  $PH$  的外法线方向,  $|AB|, |PB|, |AH|$  和  $|PH|$  为相应边的长度,  $Q$  为四边形  $ABPH$  的质心,  $S_{ABPH}$  为四边形  $ABPH$  的面积.

对上述方程中的各物理量在点  $P$  处进行泰勒展开, 并保留到二阶导数项, 得到  $P'$  点处的物理量在守恒元  $ABP'HA'B'P'H'$  内的残差  $R_m$  为

$$\begin{aligned} S_{ABPH} R_m &= S_{ABPH} \left\{ \frac{\Delta t}{2} [(U_m(P)_t + E_m(P)_x + \right. \\ & F_m(P)_y) + \frac{\Delta t}{4} U_m(P)_{2t} + \delta_{QP}^x U_m(P)_{xt} + \delta_{QP}^y U_m(P)_{yt}] - \\ & \frac{[(2\delta_{QP}^y - \delta_{AP}^y) \delta_{AP}^x + (2\delta_{QP}^x - \delta_{AP}^x) \delta_{AP}^y]}{2} \\ & U_m(P)_{xy} - \frac{\delta_{AP}^y (2\delta_{QP}^y - \delta_{AP}^y) U_m(P)_{2y} +}{2} \\ & \left. \frac{\delta_{AP}^x (2\delta_{QP}^x - \delta_{AP}^x) U_m(P)_{2x}}{2} \right\} + \frac{\Delta t}{4} \{ \delta_{BH}^y (\delta_{BP}^y - \delta_{AH}^y) \\ & [\delta_{AP}^x E_m(P)_{xy} + \delta_{AP}^y E_m(P)_{2y}] - (\delta_{BP}^x - \delta_{AH}^x) \delta_{BH}^x \\ & [\delta_{AP}^x F_m(P)_{2x} + \delta_{AP}^y F_m(P)_{xy}] + \frac{\Delta t}{2} [(\delta_{BH}^y \delta_{AB}^x - \\ & \delta_{HP}^y \delta_{BH}^x) E_m(P)_{xt} + (\delta_{BH}^y \delta_{HP}^x - \delta_{AB}^y \delta_{BH}^x) F_m(P)_{yt} + \\ & \delta_{BH}^y (\delta_{AH}^y - \delta_{BP}^y) E_m(P)_{yt} - \delta_{BH}^x (\delta_{AH}^x - \delta_{BP}^x) \\ & F_m(P)_{xt}] + \delta_{AP}^x [(\delta_{BH}^y \delta_{HP}^x - \delta_{AB}^y \delta_{BH}^x) E_m(P)_{2x} + \\ & (\delta_{BH}^y \delta_{AB}^x - \delta_{HP}^y \delta_{BH}^x) F_m(P)_{xy}] + \delta_{AH}^y [(\delta_{BF}^y \delta_{HP}^x - \\ & \delta_{AB}^y \delta_{BH}^x) E_m(P)_{xy} + (\delta_{BH}^y \delta_{AB}^x - \delta_{HP}^y \delta_{BH}^x) F_m(P)_{2y}] \} \end{aligned} \quad (9)$$

最后将所有守恒元的残差合并就得到了  $P'$  点处物理量的最终残差. 这里仅列  $E(P)_{2y}$  和  $F(P)_{2x}$  的系数, 分别为

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t}{2} (\delta_{AC}^y (\delta_{BP}^y)^2 + \delta_{CE}^y (\delta_{DP}^y)^2 + \delta_{EG}^y (\delta_{FP}^y)^2 + \\ & \delta_{GA}^y (\delta_{HP}^y)^2 + \delta_{BD}^y (\delta_{AP}^y)^2 + \delta_{DF}^y (\delta_{CP}^y)^2 + \end{aligned}$$

$$\delta_{FH}^y (\delta_{EP}^y)^2 + \delta_{HA}^y (\delta_{GP}^y)^2 \quad (10)$$

$$- \frac{\Delta t}{2} (\delta_{AC}^x (\delta_{BP}^x)^2 + \delta_{CE}^x (\delta_{DP}^x)^2 +$$

$$\delta_{EG}^x (\delta_{FP}^x)^2 + \delta_{GA}^x (\delta_{HP}^x)^2 + \delta_{BD}^x (\delta_{AP}^x)^2 + \quad (11)$$

$$\delta_{DF}^x (\delta_{CP}^x)^2 + \delta_{FH}^x (\delta_{EP}^x)^2 + \delta_{HA}^x (\delta_{GP}^x)^2)$$

对于一般四边形, 式 (10) 和式 (11) 均不为零, 因此物理量的精度为一阶. 对于平行四边形, 式 (9) 中的所有二阶导数都为零, 此时物理量的精度为二阶.

对物理量的导数可以采用相同的分析过程, 其中, 守恒元  $ABPHA'B'P'H'$  内的物理量导数的残差  $R_d$  可表示为

$$R_d = \frac{(\Delta t)^2}{8} U(P)_{2t} - \frac{(\delta_{AP}^x)^2 U(P)_{2x} +}{2} \quad (12)$$

$$\frac{2\delta_{AP}^x \delta_{AP}^y U(P)_{xy} + (\delta_{AP}^y)^2 U(P)_{2y}}{2}.$$

由于无论怎么组合守恒元中关于物理量导数的方程都无法消除式 (12) 中的二阶时间导数, 因此物

理量的导数恒为一阶精度. 应用上述方法对三维格式可得到一致的结论. 与有限体积或有限差分法不同, CE/SE 方法存储了更多关于物理量的信息, 其计算效果可以达到有限差分法四阶精度<sup>[7]</sup>. 例如, 采用五阶精度的 WENO 格式 (图 3 中的 WENO5) 和 CE/SE 格式 (图 3 中的 CE/SE  $\alpha = 1$  和 CE/SE  $\alpha = 2$ ) 计算一维 Lax 激波管问题, 如图 3. 由图可知, 在激波附近 CE/SE 格式得到的结果比 WENO 格式的耗散小.

但是, 上述对 CE/SE 格式的计算精度的理论分析不能代替对采用 CE/SE 格式的计算程序的计算精度的分析. 这是由于实际计算中要涉及到物质的边界和物质间的界面的处理问题, 而含边界或界面的格式计算精度的理论分析的难题尚未解决. 因此, 有必要通过一些含有界面的经典力学问题的算例, 采用同理论解、实验结果或其它算法的计算结果进行比较的方法, 间接地对其计算精度进行一个大概的估计.

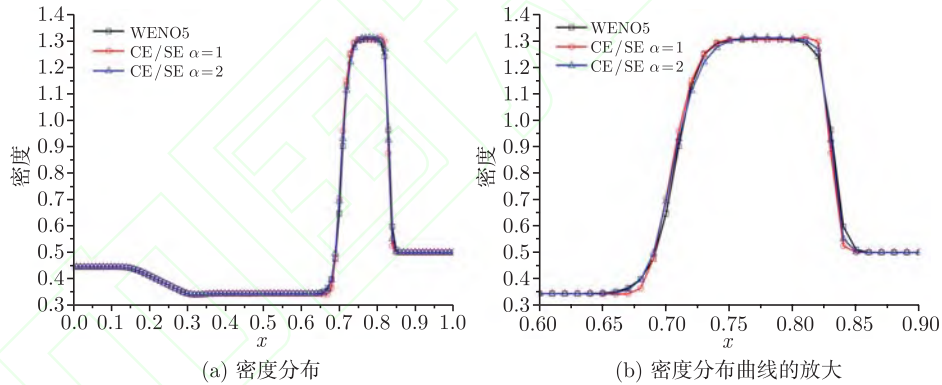


图 3 Lax 激波管问题

## 2.4 边界处理

虽然 CE/SE 算法仍然采用了交错网格, 但是该算法每当完成一个时间步时, 需要赋值的边界条件也只有最外层的一层网格. 因此, CE/SE 算法的边界处理十分简单. 这里讨论几种最常见的边界条件.

### (1) 固壁边界

固壁边界也被称为反射边界, 物质不能够在该边界上进行传输 (或者理解为边界上没有流体通过), 因此该边界垂直方向的速度为零. 对于如图 4 所示的情况, 假设  $EF$  为固壁边界. 这里  $B$  是边界点,  $A$  是边界以内的点, 则  $B$  点在  $y$  方向的速度为零,  $x$  方向的速度等于  $A$  点  $x$  方向的速度,  $B$

点的密度  $\rho$  和压力  $p$  也等于  $A$  点的密度  $\rho$  和压力  $p$ . 例如, 对于二维 Euler 方程,  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T$  在固壁边界上的点  $B$  应满足

$$(Q_i)_B = (Q_i)_A, (Q_{ix})_B = (Q_{ix})_A, (Q_{iy})_B = 0, \quad (13)$$

$$i = 1, 2, 4,$$

$$(Q_i)_B = 0, (Q_{ix})_B = 0, (Q_{iy})_B = (Q_{iy})_A,$$

$$i = 3,$$

式中  $Q_i$  表示  $Q$  的第  $i$  个分量.

图 4 所示的固壁边界可以称为下固壁, 相应的其他固壁边界条件也容易得到.

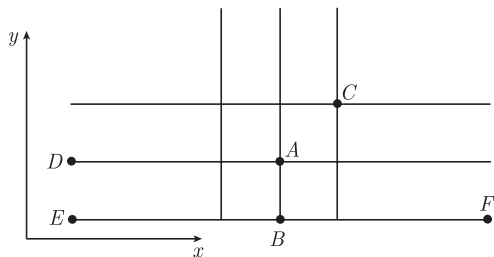


图 4 边界处理示意图

(2) 流入边界

流入边界是指有物质不断从该边界流入计算流场. 流入边界的赋值不受流场影响, 只依赖于给定的边界条件. 假设图 4 中的  $EF$  为流入边界, 则边界上的点  $B$  应满足:

$$(Q_i)_B = C_i, (Q_{ix})_B = 0, (Q_{iy})_B = 0, \quad (14)$$

$$i = 1, 2, 3, 4,$$

其中  $C_i$  是给定的来流条件, 是已知量.

(3) 流出边界

流出边界是指物质可以从该边界流出, 流出后的物质将不再对计算流场产生影响. 假设图 4 中的  $EF$  为流出边界, 则边界上的点  $B$  应满足

$$(Q_i)_B = (Q_i)_A, (Q_{ix})_B = 0, (Q_{iy})_B = 0, \quad (15)$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

王刚等<sup>[16]</sup> 采用了多种不同的数值格式, 计算了含有边界的平面激波反射问题. 如图 5 所示. 计算区域为  $4.0 \times 1.0$ . 初始时在平面的左上角给定一个与上边界夹角  $\Phi = 29^\circ$  的悬挂斜激波, 激波在固壁反射, 与壁面的夹角为  $\psi = 23.279^\circ$ . 分别采用了二阶 CE/SE 格式, 一阶 CE/SE 格式, 二阶 MUSCL 格式和一阶 Roe 格式进行了计算, 计算网格为  $400 \times 100$ , 图 6 显示了  $y = 0.5$  处的压力系数  $C_p (= 2(p/p_\infty - 1)/(\gamma M_\infty)^2)$  的分布状态. 结果显示一阶 CE/SE 格式的精度比二阶 MUSCL 格式和一阶 Roe 格式高, 而二阶 CE/SE 格式比一阶 CE/SE 格式精度更高, 计算结果与精确解也很接近, 说明二阶 CE/SE 格式结合以上的边界条件处理方法可以计算得到较高的计算精度.

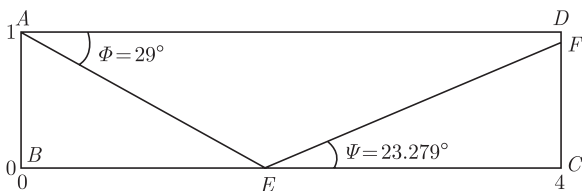


图 5 平面激波反射问题示意图

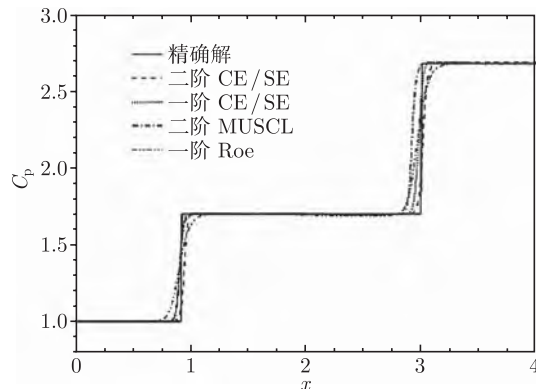


图 6 平面激波反射中  $y = 0.5$  处压力系数  $C_p$  的分布

2.5 多物质界面的处理

在 Euler 型数值方法中多物质计算的一个关键困难在于如何高精度捕捉物质间的界面 (在动力学过程中如某物质发生了相变, 我们就把相变后的物质当作另一种物质). 当前流行的界面追踪方法主要有 VOF 方法和 Level Set 方法两大类. VOF 方法<sup>[21]</sup> 最早由 Hirt 和 Nichols 于 1981 年提出, 这种方法没有采用示踪标记点方案, 而是巧妙地引入流体体积分数的概念. 然后利用网格中流体体积分数和物质边界法线方向重构物质表面. 不同的界面重构技术可以有不同的效果, 其中 Youngs 界面重构技术<sup>[22]</sup> 是一种性能优良的方法. 等位集方法 (level set method, 也有人翻译为水平集方法) 是 Osher 和 Sethian 于 1988 年提出的<sup>[23]</sup>. 在等位集方法中首先引入一个等位集函数 (level set function), 让等位集函数按照流场中一定的速度分布进行演变, 当等位集函数等于零时它就是物质界面. 等位集方法是一种较好的界面追踪方法. 它克服了在一般波前 (波阵面) 追踪方法中必须首先构造出具体波阵面, 因而难以处理波阵面拓扑结构变化的弱点. 为了解决等位集方法容易丢失质量的缺点, Enright 等<sup>[24]</sup> 将无质量 Lagrangian 粒子引入等位集方法中, 把基于 Lagrange 描述的粒子方法和基于 Euler 描述的等位集方法相结合, 提出了杂交粒子等位集方法 (hybrid particle level set method), 克服了普通等位集方法不易保持质量守恒的缺点. 图 7 是关于圆形界面在剪切流场中的演化过程的计算结果. 计算到无量纲时间 2.0, 然后再反向剪切到无量纲时间 2.0, 观察界面是否能够回到初始状态. 计算结果如图 7(a)~(d) 所示. 由图可知, 我们采用的界面捕捉方法可以正确模拟出界面的整个变化过程, 反向剪切 2.0 时间后界面

的轮廓能够复原. 图 7(c) 中界面“尾巴”看不到由数值耗散产生的界面畸变. 因此, 该方法可以正确

模拟界面变化过程, 而且反向剪切后能够准确地复原成原有界面, 显示出了相当高的精度.

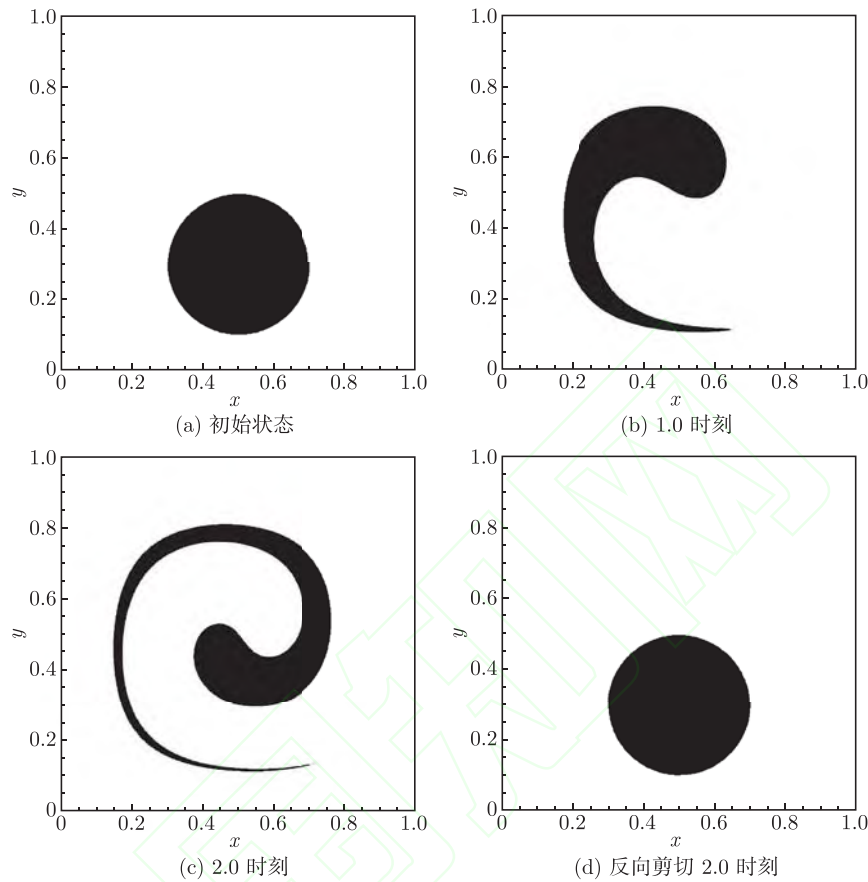


图 7 粒子水平集方法计算圆形界面在剪切流场演化问题

考虑到 VOF 方法在多维界面演化的过程中需要用到算子分裂技术, 并且其界面重构技术的精度和效率在三维问题中得不到保证, 我们认为等位集方法更加适合与 CE/SE 方法相结合. 我们一般在 CE/SE 整数时间步上对等位集函数进行更新, 等位集函数与 CE/SE 方法使用同一套网格<sup>[25-26]</sup>. 需要指出的是等位集方法的空间离散是采用 5 阶 WENO 格式, 时间离散是使用 3 阶 Runge-Kutta 方法.

如果采用等位集方法追踪流动物质界面, 一般采用 Fedkiw 等提出的虚拟流体网格方法 (ghost fluid method)<sup>[27]</sup> 来处理物理边界条件. 虚拟流体网格方法假设整个计算区域是  $\Omega$ , 物质 1 所在的区域记为  $\Omega_1$ , 物质 2 所在的区域为  $\Omega_2$ .  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  分别称为物质 1 和物质 2 的真实网格;  $\Omega_2$  和  $\Omega_1$  在界面附近的网格分别称为物质 1 和物质 2 的虚拟流体网格. 如果根据相应的边界条件或者提高分辨率目的给这些虚拟流体网格赋值, 就可以使物质 1

和物质 2 都具有边界上的数值, 然后就可以分别在各自的真实网格中求解了. 与文献<sup>[27]</sup> 不同的是, 为了能方便地处理流体弹塑性问题, 作者<sup>[26]</sup> 不是用一个等位集函数描述两种物质分界面, 而是分别用不同等位集函数值描述每一种的物质块的界面, 等位集函数  $\varphi(x, y, z) < 0$  的区域表示在物质内, 如图 8 所示. 这种处理方法可以同 CE/SE 方法的基于四边形网格的格式构造方法巧妙的结合起来.

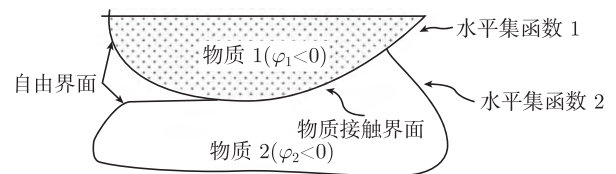


图 8 物质接触边界中物质块描述示意图

物质界面可以分成两种不同的界面条件: 物质接触界面和自由界面. 物质接触界面条件反映



了不同的物质块之间的相互作用, 而自由界面条件则是反映了物质在真空中的自由运动 (包括裂纹的形成). 如果一个网格点在物质界面之外的, 但是在计算中需要用到它的物理量值, 那么我们就把这个点定义为边界点. 对于 CE/SE 方法而言, 它在  $x$  和  $y$  方向分别只需要一个边界点. 因此, 判断某个网格点是否是边界点条件就很简单, 即如果这个点和距离它最近的 8 个点中任何一个点处在某种物质内部, 那么它就是这种物质边界点. 如果这个点是某种物质边界点, 同时它周围的 8 个点中都不属于其他物质, 我们就把这种边界点称为这种物质的自由界面边界点; 如果这个点是某种物质的边界点, 同时它周围的 8 个点中有属于其他物质的点, 我们就把这种边界点称为这种物质与其他物质的物质接触边界点. 如图 9 所示, 图中圆圈和菱形点都是边界点, 其中黑色点表示物质 1 的边界点, 白色表示是物质 2 的边界点, 圆圈表示自由界面边界点, 菱形表示物质-物质界面边界点. 确定边界点的种类之后, 根据边界点的不同特性确定它的物理量.

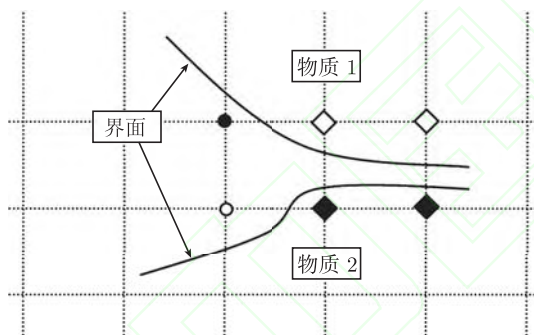


图 9 物质接触边界中不同种类边界点处理方法示意图

### 3 CE/SE 方法的发展和应用

Chang 等<sup>[5]</sup> 首先提出了一维对流扩散方程的 CE/SE 方法, 扩大了这个方法的适用范围. Wang 等<sup>[7]</sup> 针对在有激波的情况, 对 CE/SE 方法精度进行了分析, 结果表明一阶泰勒展开的 CE/SE 方法计算精度与四阶精度的 ENO 方法相当. Yang 等<sup>[28]</sup> 指出了 CE/SE 方法的相容性和收敛性, 并且给出了具体的误差限. Chang<sup>[29]</sup> 提出的一维局部细化的 CE/SE 方法为 CE/SE 方法推广到多重网格奠定了基础. Chang 指出: 虽然 CE/SE 方法的稳定性只要求 CFL 数小于 1, 但是如果 CFL 数小于 0.1, 原有的 CE/SE 方法会出现很大的数值耗散. 针对这个问题他提出 Courant 数不敏感的 CE/SE 方

法, 在小 CFL 数情况下格式自动减少粘性, 从而可以使 CFL 数在 0.001~1.0 变化<sup>[30]</sup>. Zhang 等<sup>[31]</sup> 又提出了 CFL 数不敏感的“ $c-\tau$ ”格式, 引入参数  $\tau$  使格式更灵活, 并把它用在多维 Euler 方程中. Chang<sup>[32]</sup> 同时也详细地进行了“ $c-\tau$ ”格式的 von Neumann 稳定性分析. 在边界处理方面, 针对 CE/SE 方法网格的特殊排列 Chang 等分别提出了固壁反射边界处理方法<sup>[33]</sup> 和无反射边界处理方法<sup>[34-35]</sup>, 其中无反射边界条件并没有用到特征分析方法同时可以用于亚声速、跨声速和超声速情况. 数值计算表明<sup>[33,35]</sup>, 这两种边界条件都是稳定的. 由于 CE/SE 方法最擅长求解守恒型方程, 因此比较难以处理方程中的源项, 尤其是刚性源项 (刚性源项). 对于刚性源项一般处理是采用隐式方法或者采用双时间步长计算, 前者通过时间迭代消除刚性, 后者则是一种线性近似. Yu 等<sup>[36-37]</sup> 通过改造 CE/SE 方法的解元定义使得时间导数中消除刚性源项的影响, 从而消除了刚性.

在实际工程应用中, Wang 等<sup>[13]</sup> 和 Chang<sup>[4]</sup> 又提出了非结构网格下的 CE/SE 方法. 但是, 由于 CE/SE 方法时间方向推进的特殊性 (半层时间推进), 因此必须采用时间方向的交错网格, 这就意味着并不是任意剖分的非结构网格都能用于 CE/SE 方法. 因此只能说这种“非结构”网格是一种不规则网格, 尚不能达到完全非结构化. 从计算精度上来看, 非结构网格也稍逊于结构网格. Chang 等<sup>[38-39]</sup> 又根据二维三角形网格的经验, 率先将 CE/SE 方法推广到基于四面体网格的三维问题. Zhang 等<sup>[40]</sup>、张涵信等<sup>[41]</sup> 和邹轶群等<sup>[11-12]</sup> 较顺利地推导了基于六面体网格的三维 Euler 方程和 N-S 方程的 CE/SE 格式. Zhang 等<sup>[42]</sup> 基于四面体网格, Zhang 等<sup>[40]</sup> 基于六面体网格分别计算了高速和低速流动. 翁春生等<sup>[43-44]</sup> 基于六面体网格模拟了多管爆轰发动机的内外流场, Ayasoufi 等<sup>[45]</sup> 采用 CE/SE 方法研究了三维相变问题. 在上述计算中, CE/SE 格式都给出了令人满意的结果. 对于多维复杂问题, CE/SE 方法还实现了并行化<sup>[46]</sup>. 这里以申华等<sup>[12]</sup> 采用二步模型对三维气相爆轰中产生的爆轰波传播过程中所形成胞格的数值模拟为例, 说明三维 CE/SE 方法的计算效果. 图 10 是其中一个单元的温度等值面图, 每个三波结构由三维马赫杆 (M)、入射激波 (I) 和横波 (T1) 组成. 三波的交界处则形成了三波线 (T2), 在三波线附近的压力、密度和温度达到极大值, 并且存在明

显的三维涡结构. 可见, CE/SE 格式清晰的反映出在爆轰波阵面上存在的三波结构.

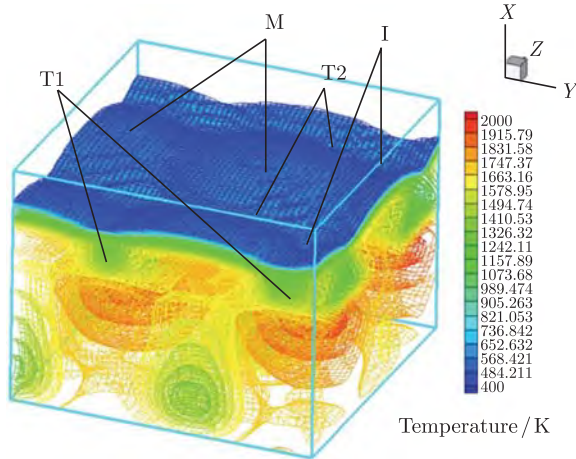


图 10 波阵面中一个周期性单元的温度等值面图<sup>[12]</sup>

随着各国对爆轰发动机, 超燃发动机等的研制, 化学反应流动的数值模拟迅速发展起来. 化学反应流动的数值模拟需要分辨率较高的数值方法, 而 CE/SE 方法能够较好地捕捉激波和处理源项. 最早使用 CE/SE 方法从事模拟化学反应流动的是 Wu 等<sup>[47]</sup>. 申华等<sup>[12]</sup>、曾昊等<sup>[48]</sup>、王刚等<sup>[16,49,50]</sup> 分别采用一步模型, 二步模型模拟和基元反应模型对气相爆轰的胞格结构进行了数值模拟.

翁春生等<sup>[51-52]</sup> 模拟了二步模型的非定常爆轰. Im 等<sup>[53-54]</sup> 和 Wang 等<sup>[55-56]</sup> 采用基元反应模型对爆轰波进行了数值模拟, 不过均未考虑胞格结构; Zhang 等<sup>[57]</sup>、Wang 等<sup>[55]</sup>、Weng 等<sup>[44]</sup> 和王杰等<sup>[58-59]</sup> 对脉冲爆轰发动机工作过程进行了数值模拟. 马丹花等<sup>[60]</sup> 采用黏性 CE/SE 方法对脉冲爆轰发动机中气液两相爆轰波的传播问题进行了模拟. Jerez 等<sup>[61]</sup> 使用半隐式的非结构网格 CE/SE 方法对化学反应流动进行了数值模拟. 代淑兰等<sup>[62]</sup> 使用并行 CE/SE 方法对驻定斜爆轰波进行了数值模拟. 王昌建等<sup>[63]</sup> 使用 CE/SE 方法对爆轰波在分叉管内的传播进行了数值模拟. 焦天民等<sup>[64]</sup> 和徐斌等<sup>[65]</sup> 对内燃机进气系统进行了数值模拟. 孙孔倩等<sup>[66]</sup> 对爆震波点火过程进行了数值模拟, 李昕等<sup>[67]</sup> 对爆炸冲击波进行了数值模拟, 白桥栋等<sup>[68-70]</sup> 和倪志军等<sup>[71]</sup> 对两相流和点火管传火进行了数值模拟. 另外, 王杰等<sup>[72]</sup> 对多孔射流场进行了模拟, Cheng 等<sup>[73]</sup> 对湿空气在激波管稀疏波作用下发生均匀凝结的流动行为进行了模拟. 王刚等<sup>[49]</sup> 借助 CE/SE 方法并采用二步模型和基元反应模型对氢氧爆轰产生的爆轰波在  $19.3^\circ$  角斜面传播过程中形成的胞格进行了数值模拟如图 11 所示, 所有模型都得到了清晰的胞格结构并与实验结果吻合的比较好.

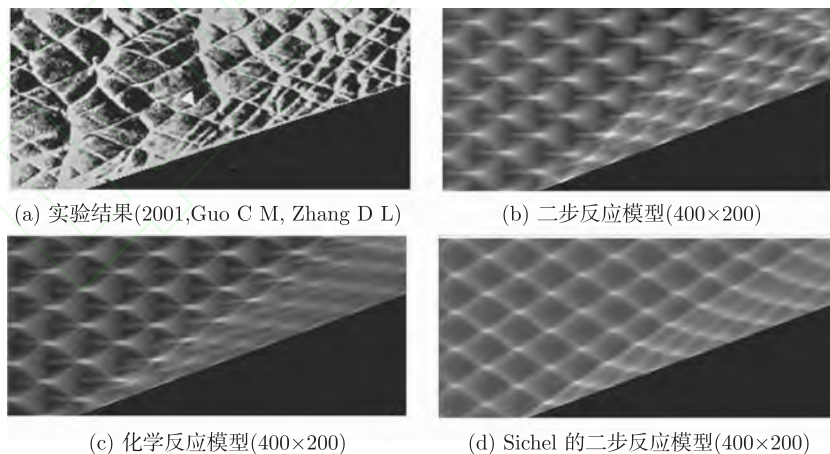


图 11 爆轰波在  $19.3^\circ$  角斜面传播过程中的胞格的计算结果与实验结果的比较<sup>[49]</sup>

CE/SE 方法已经被成功地用来求解电磁学方程组和磁流体问题. Wang 等<sup>[74]</sup> 求解了含时 Maxwell 方程组. Zhang 等<sup>[75]</sup> 推导了理想磁流体动力学方程组的 CE/SE 格式, 由于 CE/SE 方法的优越性, 他们的格式不需要对磁感应强度散度为零的限制条件做特殊处理. Qamar 等<sup>[76-77]</sup>、Feng 等<sup>[78]</sup>、纪珍等<sup>[79]</sup> 使用 CE/SE 方法求解了磁流体

动力学方程组. Chou 等<sup>[80]</sup> 将 AMR 方法与 CE/SE 方法相结合, 计算了等电子聚焦 (IEF) 和等速电泳 (ITP) 问题.

最初, CE/SE 方法是基于气体动力学方程提出的, 是一种基于密度求解的方法, 特别适用于可压缩高速流动. Zhang 等<sup>[81-82]</sup> 和 Zhang 等通过数值实验指出, 这种方法不但能够求解可压缩高

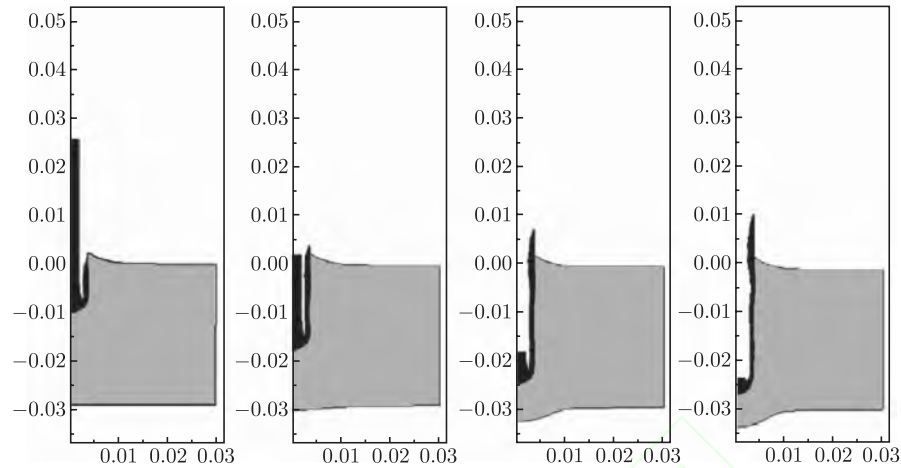


图 12 钨杆以 1250 m/s 的速度撞击钢板在不同时刻 (20  $\mu$ s, 40  $\mu$ s, 60  $\mu$ s, 80  $\mu$ s) 的变形图<sup>[25-26]</sup>

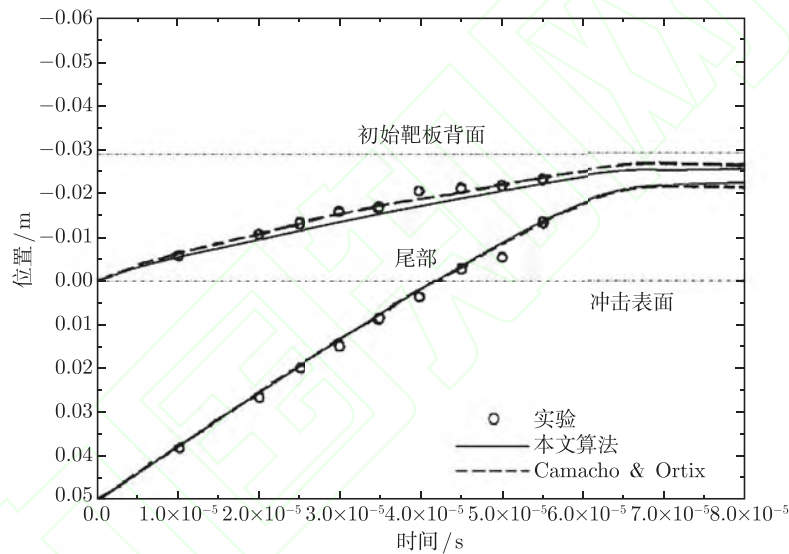


图 13 钨杆以 1250 m/s 的速度撞击靶板后头部和尾部在不同时刻位置分布的计算结果与实验结果的比较<sup>[83]</sup>

速流动,也适用于不可压缩的低速流动.应当指出 Zhang 等的方法是一种人工压缩法,这种方法不太适合高 Renold 数不可压缩流体的计算.我们认为,计算低速不可压缩流动倒不如采用基于压力算法,即采用 CE/SE 方法离散动量方程并采用压力校正类 (SIMPLE) 方法或者求解压力 Poisson 方程的方法来耦合速度和压力<sup>[83]</sup>.张永祥等对二维溃坝洪水波<sup>[84-85]</sup>和山区河流<sup>[86]</sup>进行了数值模拟.

王景焘等已将 CE/SE 方法推广到了冲击载荷下固体内应力波传播过程<sup>[87]</sup>的数值模拟工作中,论证了该方法在该计算领域的有效性.进而,又将 CE/SE 方法推广到了求解高速碰撞、穿甲过程、爆炸焊接等冲击动力学问题中<sup>[25-26]</sup>.图 12 展示了钨杆高速撞击钢板的侵彻过程,从图中可以看到钨弹的开坑过程以及回流现象.图 13 描述了钨杆

在侵彻过程中头部和尾部在不同时刻的位置,可以看到其结果与实验以及其他数值结果吻合得很好.此类问题的求解方案主要是借助流体弹塑性模型推导 Euler 坐标描述下的控制方程,由 CE/SE 格式对控制方程进行离散求解,并结合粒子等位集方法<sup>[24]</sup>和 Ghost 虚拟网格法<sup>[27]</sup>对多物质界面进行追踪与描述.其中,刘凯欣等人<sup>[88-89]</sup>对爆炸焊接过程的数值模拟实现了固、液、气三相共存的数值计算,阐明了金属玻璃在爆炸焊接过程中没有发生结晶现象的力学机理.近期,陈千一等<sup>[90]</sup>进一步推广了 CE/SE 流体弹塑性程序的应用,提出了一种新颖的使用等位集函数描述裂纹的方法,实现了对高速碰撞问题中层裂现象的数值模拟,其数值结果与相关实验数据能够很好的吻合.之后,他们又在程序中加入了考虑包氏效应的孔洞

增长模型,对超高速球撞板的问题进行了数值模拟,计算结果与实验结果吻合得较好<sup>[91]</sup>.图14给出了 $t=15\ \mu\text{s}$ 时靶板的变形图及其内部的等效塑性应变的分布情况.Yu等<sup>[92]</sup>用CE/SE方法计算了细长杆中的线性波及非线性波的传播,证明CE/SE方法能够有效捕捉波前以及波的传播与反射.

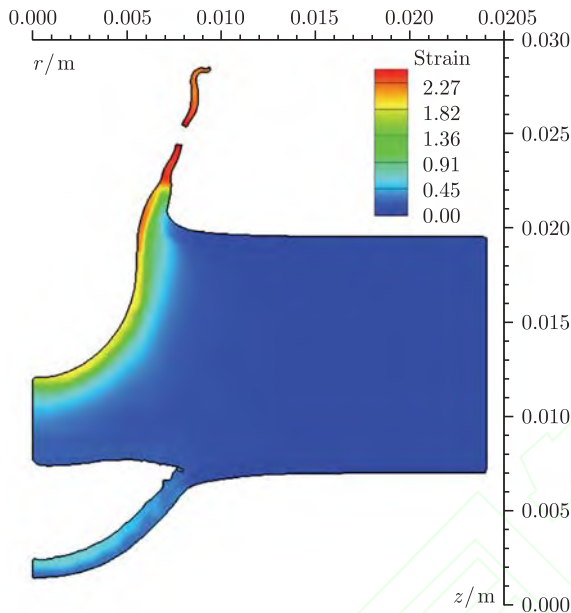


图14 钨玻璃球弹丸以 $6.0\ \text{km/s}$ 的速度撞击铝<sub>1100</sub>靶板, $t=15\ \mu\text{s}$ 时靶板的等效塑性应变分布图<sup>[91]</sup>

总之,CE/SE方法的理论框架基本成熟,并且已经被应用到各种领域中.从CE/SE方法的应用结果来看,这种方法已经显示出它的优越性,并具有十分广阔的发展前景和应用空间.具体说来CE/SE方法具有物理意义清晰、格式构造简单、计算精度较高、对强间断分辨率很高、边界处理方便以及不需要特殊处理某些约束条件等优点.

#### 4 所需解决的问题和当前的发展方向

经过十多年的发展,CE/SE方法仍然存在一些亟待解决的问题:(1)从实际计算结果来看CE/SE格式的精度很高<sup>[7]</sup>,但是迄今为止没有对此有一个严谨的精度分析,不能保证该方法对于任何问题(特别是含有复杂边界或界面的问题)都能取得高精度;(2)CE/SE格式推导过程中引入的导数的加权平均函数并没有太多的数学含义,而只是一种人为的减少导数的方法,它的引入在数学上是否合理,会不会引起非物理解,尚未得到详细

的讨论;(3)由于CE/SE格式特殊的网格设置以及时间推进,很难做到在真正的无结构网格上离散,如果只是在非正规网格上离散就会损失精度,因此我们认为采用多重网格方法进行局部加密将会是一个提高局部精度的有效方法;(4)由于CE/SE方法最擅长求解守恒型方程,因此比较难以处理方程中的源项,尤其是源项与求解变量函数关系不是很明确的情况(如弹塑性流动情况).虽然文献[10,83]给出了一种近似处理方法,但还需要一种更精确的源项处理方法;(5)CE/SE的格式构造时采用半时间交错网格,即计算一个时间步长需要进行两次差分计算,这样虽然提高了计算精度,但对于编程运用造成一定麻烦;(6)由于CE/SE格式在计算过程中需要存储所有导数项,这就增加了计算时的资源消耗,使得CE/SE二阶以上精度的格式很难应用到高维问题的计算.

如何将CE/SE方法应用到各种具体的实际问题中并及时解决应用中出现的各种问题是今后的另一项重要工作.CE/SE方法将在以下领域中发挥重要作用:(1)空气动力学领域,这里是CE/SE方法的传统领地,应该结合多重网格方法提高精度;(2)化学反应流动迫切需要一种高精度、高分辨率和高效率的计算方法,CE/SE方法恰好满足这种要求.当前的化学反应流模拟还很不成熟,气相爆轰以及多相爆轰的数值模拟和脉冲爆轰发动机工作过程模拟都是这个领域的热点问题;(3)磁流体动力学模拟刚刚起步,尚有较大应用空间;(4)高精度的CE/SE方法应该可以用于模拟多相不可压缩粘性流动,并且取得较好的结果;(5)在高速碰撞问题中相变和破坏现象共生,形成复杂的多物质界面,而CE/SE方法只需要一个边界点,能够方便地与物质界面、物理间断面的捕捉等算法相结合,但仍需对其实际精度及如何提高精度进行深入研究.目前,尚没有能够得到广泛应用的CE/SE方法商用软件,在这个领域仍然需要做大量的工作.

#### 5 总结

在计算力学飞速发展的今天,随着计算机的计算速度和综合性能的不断提高,新的计算方法层出不穷.这一方面为我们提供了更多的解题工具和途径,许多以往不可想象的数值计算工作都得以实现;另一方面,要一个一个地熟悉各种计算方法要花费很大的时间和精力.为此,本文综述了

CE/SE 方法的基本原理、发展过程、实际应用  
的现状和未来的发展趋势. 希望本文能为读者了解  
和掌握 CE/SE 方法提供便利.

## 参考文献

- 1 郑哲敏. 破甲过程初步分析及一些基础知识. *力学情报*, 1973, 23(5): 36-73
- 2 Liu W K, Belytschko T, Chang H. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite-element method for path-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, 58(2): 227-245
- 3 Monaghan J J. An introduction to SPH. *Computer Physics Communications*, 1988, 48(1): 89-96
- 4 Chang S C, To W M. A new numerical framework for solving conservation laws—the method of space-time conservation element and solution element. NASA-TM-104495, 1991. 1-115
- 5 Chang S C. The method of space-time conservation element and solution element—a new approach for solving the Navier-Stokes and Euler equations. *Journal of Computational Physics*, 1995, 119(2): 295-324
- 6 Chang S C. New developments in the method of space-time conservation element and solution element—applications to the Euler and Navier-Stokes equations. NASA-TM-106226, 1993. 1-124
- 7 Wang X Y, Chang S C, Jorgenson P C E. Accuracy study of the space-time CE/SE method for computational aeroacoustics problems involving shock waves. *AIAA*, 2000. 2000-0474
- 8 张增产, 沈孟育. 改进的时空守恒元和解元方法. *清华大学学报 (自然科学版)*, 1997, 37 (8): 65-68
- 9 杨吉民, 徐建中. 求解 Euler 方程的高阶精度的空间-时间守恒格式. *工程热物理学报*, 2000, 21(2): 156-160
- 10 Liu K X, Wang J T. Analysis of high accuracy conservation-element and solution-element schemes. *Chinese Physics Letters*, 2004, 21(11): 2085-2088
- 11 邹轶群, 刘凯欣, 王刚. 三维 CE/SE 方法在高速流动中的应用. 见: 中国力学学会学术大会'2009 论文摘要集, 郑州市, 2009 年 8 月 24-26 日. 2009. 290-290
- 12 中华, 张德良, 刘凯欣. 改进三维 CESE 算法在气相爆轰中的应用. 见: 北京力学学会第十六届学术年会论文集, 北京市, 2010 年 1 月 10 日. 2010. 15-16
- 13 Chang S C, Wang X Y, Chow C Y. The space-time conservation element and solution element method: A new high-resolution and genuinely multidimensional paradigm for solving conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 1999, 156(1): 89-136
- 14 刘海涛, 徐建中. 求解欧拉方程的空间-时间守恒格式. *工程热物理学报*, 1997, 18(3): 294-299
- 15 Liu H T, Xu J Z, Huang X Q. Space-time conservation scheme in nonorthogonal curvilinear coordinates. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1998, 11(3): 165-176
- 16 Wang G, Zhang D L, Liu K X. An improved CE/SE scheme and its application to detonation propagation. *Chinese Physics Letters*, 2007, 24(12): 3563-3566
- 17 张增产. 一般形式的二维时-空守恒格式. *计算力学学报*, 1997, 14(4): 377-381
- 18 张增产, 沈孟育. 二维时-空守恒格式及其在激波传播计算中的应用. *爆炸与冲击*, 1999, 19(1): 7-12
- 19 张增产, 沈孟育. 求解二维 Euler 方程的时-空守恒格式. *力学学报*, 1999, 31(2): 152-158
- 20 张增产, 沈孟育. 一般坐标系下的二维 Euler 方程时-空守恒格式. *应用力学学报*, 1999, 16(1): 10-15
- 21 Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 1981, 39(1): 201-225
- 22 Youngs D L. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. In: Morton K W, Baines M J eds. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. New York: Academic Press, 1982. 273-285
- 23 Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79: 12-49
- 24 Enright D, Fedkiw R, Ferziger J, et al. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *Journal of Computational Physics*, 2002, 183(1): 83-116
- 25 Wang J T, Zhang D L, Liu K X. A Eulerian approach based on CE/SE method for 2D multimaterial elastic-plastic flows. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2007, 24(4): 395-401
- 26 Wang J T, Liu K X, Zhang D L. An improved CE/SE scheme for multi-material elastic-plastic flows and its applications. *Computers & Fluids*, 2009, 38(3): 544-551
- 27 Fedkiw R P, Aslam T, Merriman B, et al. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *Journal of Computational Physics*, 1999, 152(2): 457-492
- 28 Yang D Q, Yu S T, Zhao J. Convergence and error bound analysis for the space-time CESE method. *AIAA*, 2000: 64-78
- 29 Chang S C, Wu Y H, Wang X Y, et al. Local mesh refinement in the space-time CE/SE method. In: *Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics*. Kyoto, Japan, 2000-07-09-14. 61-66
- 30 Chang S C. Courant number insensitive CE/SE schemes. *AIAA*, 2002. 3890
- 31 Zhang M, Yu S T, Chang S C. CFL number insensitive CE/SE schemes for two-dimensional Euler equations. *AIAA*, 2003. 2003-3840
- 32 Chang S C. Explicit von Neumann stability conditions for the c-tau scheme—a basic scheme in the development of the CE-SE courant number insensitive schemes. NASA/TM-2005-213627, 2005. 1-84
- 33 Chang S C, Zhang Z C, Yu S T, et al. A unified wall boundary treatment for viscous and inviscid flows in the space-time CE/SE method. In: *Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics*. Kyoto, Japan, 2000-07-09-14. 671-676
- 34 Wang X Y, Chow C Y, Chang S C. Non-reflecting boundary conditions based on the space-time CE/SE method for free shear flows. *AIAA*, 1998. 98-3020
- 35 Chang S C, Himansu A, Loh C Y, et al. Robust and simple non-reflecting boundary conditions for the Euler equations—a new approach based on the space-time CE/SE method. NASA/TM-2003-212495/REV1, 2003. 1-33
- 36 Yu S T, Chang S C. Treatments of stiff source terms in conservation laws by the method of space-time conservation element and solution element. *AIAA*, 1997. 97-0435
- 37 Yu S T, Chang S C, Jorgenson P, et al. Treating stiff source terms in conservation laws by the space-time conservation element and solution element method. In: *Proceedings of the 16th International Conference on Numerical Method in Fluid Dynamics*. Arcachon, France, 1998, 515: 433-438
- 38 Wang X Y, Chang S C. A 3-D structured/unstructured Euler solver based on the space-time conservation element

- and solution element method. In: 14th AIAA CFD Conference. June 28, 1999
- 39 Zhang Z C, Yu S T, Wang X Y, et al. The space-time CE/SE method for Navier-Stokes equations in three spatial dimensions. AIAA Fluid 2000 Conference, 2000. 2331
- 40 Zhang Z C, Yu S T, Chang S C. A space-time conservation element and solution element method for solving two- and three-dimensional unsteady Euler equations using quadrilateral and hexahedral meshes. *Journal of Computational Physics*, 2002, 175: 168–199
- 41 张涵信, 沈孟育. 计算流体力学 —— 差分方法的原理和应用. 北京: 国防工业出版社, 2003
- 42 Zhang Z C, Yu S T, Wang X Y, et al. The CE/SE method for Navier-Stokes equations using unstructured meshes for flows at all speeds. *AIAA Paper*, 2000. 2000-0393
- 43 王杰, 翁春生. 多管脉冲爆震发动机外三维流场的数值计算. *力学学报*, 2009, 41(6): 835–841
- 44 Weng C S, Gore J P. A numerical study of two- and three-dimensional detonation dynamics of pulse detonation engine by the CE/SE method. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 21(1): 32–39
- 45 Ayasoufi A, Keith T G, Rahmani R K. Application of the conservation element and solution element method in numerical modeling of three-dimensional heat conduction with melting and/or freezing. *Journal of Heat Transfer-Transactions of the Asme*, 2004, 126(6): 937–945
- 46 Wang X Y, Himansu A, Chang S C, et al. Gust acoustics computation with a space-time CE/SE parallel 3D solver. In: 2nd International Conference in Computational Fluid Dynamics, 2002. 713–718
- 47 Wu Y, Yang V, Chang S C. Space-time method for chemically reacting flows with detailed kinetics. In: Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics. Kyoto, Japan, 2000-07-10-14. 207–212
- 48 曾昊, 何立明, 陈永刚. 基于时空守恒元和元法的爆震流场数值模拟. *弹箭与制导学报*, 2007, 27(4): 203–205
- 49 Wang G, Zhang D L, Liu K X. Numerical study on critical wedge angle of cellular detonation reflections. *Chinese Physics Letters*, 2010, 27(2): 024701
- 50 Wang G, Zhang D L, Liu K X, et al. An improved CE/SE scheme for numerical simulation of gaseous and two-phase detonations. *Computers & Fluids*, 2010, 39(1): 168–177
- 51 Weng C S, Gore T P. Apply the CE/SE method to the simulation of unsteady detonation. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2003, 21(3): 301–310
- 52 翁春生, Gore T P. CE/SE 方法在非定常爆轰计算中的应用. *空气动力学学报*, 2003, 21(3): 301–310
- 53 Im K S, Yu S T, Kim C Y, et al. Application of the CE/SE method to detonation with realistic finite-rate chemistry. *AIAA*, 2002. 1020
- 54 Im K S, Yu S T. Analyses of direct detonation initiation with realistic finite-rate chemistry. *AIAA*, 2003. 1318
- 55 Wang B, Hao H, Yu S T. Direct calculation of wave implosion for detonation initiation. *AIAA Journal*, 2005, 43(10): 2157–2169
- 56 Wang B, Hao H, Yu S T. Direct calculation of wave implosion for detonation initiation in pulsed detonation engines. *AIAA*, 2005. 1306
- 57 Hao H, Zhang Z C, Yu S T, et al. Application of the CESE method to PDE plume dynamics using a beowulf cluster. *AIAA*, 2002. 2002-0614
- 58 王杰, 刘建国, 白桥栋等. 填充系数对脉冲爆震发动机性能影响分析. *南京理工大学学报 (自然科学版)*, 2008, 32(1): 1–4
- 59 王杰, 翁春生. 不同喷管形状对 PDE 性能影响分析. *弹箭与制导学报*, 2007, 27(2): 177–180
- 60 马丹花, 翁春生. Application of two-dimensional viscous CE/SE method in calculation of two-phase detonation. *Journal of China Ordnance*, 2010, 6(01): 5–9
- 61 Jerez S, Romero J V, Rosell M D, et al. A nonuniform mesh semi-implicit CE-SE method modelling unsteady flow in tapered ducts. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2007, 76(1-3): 94–98
- 62 代淑兰, 许厚谦. 驻定斜爆轰波并行数值模拟. *爆炸与冲击*, 2006, 26(6): 572–576
- 63 王昌建, 徐胜利, 朱建士. 气相爆轰波在分叉管中传播现象的数值研究. *计算物理*, 2006, 23(3): 317–324
- 64 Jiao T M, Zhou L B. Application of CE/SE method for numerical simulation of intake system in diesel engines. *Transactions of CSICE*, 2002, 2: 137–140
- 65 徐斌, 史艳斌. 发动机进气系统流动模拟与优化. *内燃机工程*, 2005, 26(4): 12–15
- 66 孙孔信, 樊未军, 杨茂林. CE/SE 法模拟爆震波点火及传播过程. *航空动力学报*, 2008, 23(2): 244–250
- 67 李昕, 翁春生, 白桥栋. CE/SE 方法在障碍物对爆炸冲击波干扰流场计算中的应用. *南京师范大学学报*, 2007, 7(4): 33–39
- 68 白桥栋, 翁春生. 内弹道双一维两相流数值计算的 CE/SE 方法. *南京理工大学学报 (自然科学版)*, 2006, 30(4): 508–511
- 69 白桥栋, 翁春生. CE/SE 方法在内弹道瞬态两相流中的应用. *力学与实践*, 2008, 30(2): 22–25
- 70 白桥栋, 杜洁, 翁春生, 等. 点火管传火孔射流场数值计算. *火炮发射与控制学报*, 2008, 1: 69–72
- 71 倪志军, 周克栋, 赫雷, 等. 非常规结构武器两相流内弹道的高精度数值模拟. *爆炸与冲击*, 2006, 26(5): 468–473
- 72 王杰, 颜飞雪, 王植杰, 等. CE/SE 方法在多孔射流场计算中的应用. *舰船科学技术*, 2010, v.32; No.249(06): 44–47
- 73 Cheng W, Luo X S, Yang J M, et al. Numerical analysis of homogeneous condensation in rarefaction wave in a shock tube by the space-time CESE method. *Computers & Fluids*, 2010, 39(2): 294–300
- 74 Wang X Y, Chen C L, Liu Y. The space-time CE/SE method for solving Maxwell's equations in time-domain. In: 2002 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC/URSI National Radio Science Meeting, San Antonio, TX, 2002-06-16-21. 1–4
- 75 Zhang M, Lin H, Yu S T, et al. Application of the space-time conservation element and solution element method to the ideal magnetohydrodynamic equations. *AIAA*, 2002, 3888: 17
- 76 Qamar S, Warnecke G. Application of space-time CE/SE method to shallow water magnetohydrodynamic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, 196(1): 132–149
- 77 Qamar S, Mudasser S. On the application of a variant CE/SE method for solving two-dimensional ideal MHD equations. *Applied Numerical Mathematics*, 2010, 60(6): 587–606
- 78 Feng X, Zhou Y, Wu S T. A novel numerical implementation for solar wind modeling by the modified conservation element/solution element method. *The Astrophysical Journal*, 2007, 655(2): 1110–1126
- 79 Ji Z, Zhou Y F. A comparison study of three CESE schemes in MHD simulation. *Chinese Physics Letters*, 2010, 27(8): 085201
- 80 Chou Y, Yang R J. Numerical solutions for isoelectric focusing and isotachopheresis problems. *Journal of Chromatography A*, 2010, 1217(3): 394–404

- 81 Zhang Z C, Yu S T, Chang S C, et al. Calculations of low-mach-number viscous flows without preconditioning by the space-time CESE method. *Computational Fluid Dynamics 2000*, Edited by N. Satofuka, Springer-Verlag, 2001. 671–676
- 82 Zhang M, Yu S T, Chang S C. Solving the Navier-Stokes equations by the CESE method. *AIAA*, 2004, 0075: 1–13
- 83 王景焘. 时-空守恒元解元方法 (CE/SE) 的高阶精度格式及其应用: [博士论文]. 北京: 北京大学工学院, 2007. 1–127
- 84 张永祥, 陈景秋. 用守恒元和解元法数值模拟二维溃坝洪水波. *水利学报*, 2005, 36(10): 1224–1229
- 85 张永祥. 应用时空守恒元和解元方法数值研究溃坝洪水波和 ESWL 中的聚焦冲击波: [博士论文]. 重庆: 重庆大学, 2007
- 86 张永祥, 陈景秋, 文岑等. 时空守恒元和解元法在山区河流模拟中的应用. *重庆建筑大学学报*, 2007, 29(6): 49–52
- 87 Wang J T, Yu C P, Liu K X. A feasibility analysis of several numerical schemes for solving hydro-elastic-plastic problems. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, 23(1): 1–6
- 88 Liu K X, Liu W D, Wang J T, et al. Atomic-scale bonding of bulk metallic glass to crystalline aluminum. *Applied Physics Letters*, 2008, 93(8): 081918
- 89 Liu W D, Liu K X, Chen Q Y, et al. Metallic glass coating on metals plate by adjusted explosive welding technique. *Applied Surface Science*, 2009, 255(23): 9343–9347
- 90 Chen Q Y, Wang J T, Liu K X. Improved CE/SE scheme with particle level set method for numerical simulation of spall fracture due to high-velocity impact. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229: 7503–7519
- 91 Chen Q Y, Liu K X. A void growth model considering Bauschinger effect and its application to spall fracture. *Chinese Physics Letters*, 2011, 28(6): 064602
- 92 Yu S T, Yang L X, Lowe R L, et al. Numerical simulation of linear and nonlinear waves in hypoelastic solids by the CESE method. *Wave Motion*, 2010, 47(3): 168–182

## A REVIEW ON THE CE/SE METHOD\*

LIU Kaixin<sup>1,2,†</sup> WANG Jingtao<sup>1</sup> WANG Gang<sup>3</sup> CHEN Qianyi<sup>1,2</sup> FU Zheng<sup>1,2</sup> WU Shiyu<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> LTCS and Department of Mechanics & Aerospace Engineering, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China

<sup>2</sup>Key Laboratory of High Energy Density Physics Simulation(HEDPS), Center for Applied Physics and Technology (CAPT), Peking University, Beijing 100871, China

<sup>3</sup>Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

**Abstract** The space-time Conservation Element and Solution Element method (CE/SE method) is a novel high-resolution computational method for equations of conservation law. It has many merits such as the clear physics concept, high accuracy and the simple process of constructing the scheme. This method has a very great future. This paper summarizes the basic principles, the history of CE/SE method, the application fields and the recent advances. The future research topics and the development tendency of the CE/SE method are discussed in detail.

**Keywords** CE/SE method, equations of conservation law, impact dynamics, level set method

CNKI 优先出版编码: 2010-136

---

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10732010, 10972010, 11028206)

† Email: kliu@pku.edu.cn