

使用高格式数值模拟腔内亚跨声速流^{*}

李明军^{1,2*}, 朱可^{2,3}

(1 日本 同志社大学工学部, 1-3 新田边, 610-03 京都;

2 湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105; 3 中国科学院 力学研究所, 北京 100190)

[摘要] 把一阶迎风有限体积格式的高算法重构格式——高迎风有限体积格式 (GUVS) 与不可压缩流和可压缩流 SMPLE 算法相结合, 数值模拟了各种宽深比的亚跨声速腔内流动. 利用六阶高迎风有限体积格式 (GUVS) 在结构和非结构同位网格上模拟不同宽深比亚跨声速腔体流动, 获得较好的数值结果. 例如亚声速方腔流动的数值结果与 Ghia 等用多重网格技术获得的 Benchmark 解吻合得非常好; 对不同宽深比腔内流动, 数值模拟了大尺度漩涡、腔角小尺度漩涡的形成、分岔、破碎和边界层分离等演化情况, 表明六阶精度 GUVS 具有分辨率高、稳定性好的良好性能.

关键词: 计算流体力学; 腔内流动; 有限体积格式

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-5900(2011)01-0001-06

Subsonic-Transonic Flows over Cavities Using Gao's Scheme

LIMing-jun^{1,2*}, ZHUKe^{2,3}

(1 Faculty of Mechanical Engineering, Doshisha University, 1-3 Tataramiyakodani Kyo-Tanabeshi, 610-03 Kyoto, Japan;

2 School of Mathematics and Computational Sciences, Xiangtan University, Xiangtan 411105 China

3 Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100109 China)

[Abstract] Some subsonic-transonic flows in cavities with different ratio of length to depth are simulated numerically using Gao's upwind finite-volume schemes (GUVS) coupling with compressible and incompressible SMPLE algorithm. In this paper, GUVS is product of reconstructing first-order upwind finite volume scheme by Gao's algorithm. Some subsonic-transonic flows in cavities with different ratio of length to depth are simulated numerically using Gao's sixth-order upwind FV scheme on structured and unstructured collocated grids. Some excellent numerical results are obtained. For example, the numerical results for subsonic flows in rectangle cavity (i.e. lid-driven cavity flows) quite well agree with the benchmark solutions given by Ghia et al using multigrid technique, and flow characteristics of subsonic-transonic flows in cavities with different ratio of length to depth are also presented. Excellent properties of GUVS are proved by analysis and numerical tests.

Key words computational fluid dynamics; flows in cavities; finite volume scheme

腔体流动是存在于自然对流传热、内埋式武器舱、浮桥、壁面空腔设计等领域中非常广泛而典型的现象. 因此应用计算流体力学方法数值模拟腔体流动具有非常重要的意义. 计算流体力学方法通常分为基于压力和基于密度两种算法. SMPLE 系列算法是经典的基于压力的算法, 经过科学家多年的研究和发展, SMPLE 系列算法已广泛用于不可压缩的和可压缩各种流动. SMPLE 算法中对流项的离散通常应用迎风或者中心格式, 通常情况下, 任何高于二阶的迎风格式都是条件稳定且在网格较粗时容易振荡和发散, 另外, 任意高阶迎风格式均需要多于二阶中心有限体积格式的节点数. 高智提出了有限体积数值摄动算法 (Numerical Perturbational Algorithm), 由此导出任意阶精度高迎风有限体积格式 (GUVS). 具有六阶精度的高迎风有限体积格式, 在任何雷诺数下均稳定且对粗网格也不振荡和发散. 而且只需要和二阶中心有限体积格式相同多的节点, 另外, 高迎风有限体积格式 (GUVS) 适用于任意网格, 且变步长与等步长的 GUVS 公式完全一致. 这是高迎风有限体积格式对比其他高阶迎风有限体积格式最突出的优点.

本文将高迎风有限体积格式与 SMPLE 系列算法相结合, 数值模拟不可压缩和可压缩各种腔体流动.

* 收稿日期: 2010-10-12

基金项目: 湖南省高校科技创新团队项目; 湖南省教育厅优秀青年项目 (08B083); 教育部留学回国人员启动基金项目 (教外司留 [2009]1341)

通信作者: 李明军 (1968—), 男, 湖南 益阳人, 博士, 教授, 博士生导师. E-mail: limingjun@xtu.edu.cn

1 对流扩散积分方程高迎风格式的具体构造

φ表示的通用标量变量的对流扩散方程为

$$\frac{d(\rho\phi)}{dt} + \tilde{N} \cdot (\rho v \phi) = \tilde{N} \cdot (\Gamma_\phi \tilde{N} \phi) + q_\phi \tag{1.1}$$

其中 φ为通用输运变量,可以代表 u、v、w、T 以及湍流变量 k、ω、ε等, Γ_φ是广义扩散系数, q_φ为广义源项. 因此从上式出发讨论数值摄动有限体积具有普适性,方便起见,以下省略 Γ_φ和 q_φ的下标.

(1.1)式在控制体 Ω上积分形式对流扩散方程为

$$\iint_S \phi u \cdot n ds = \iint_S \tilde{N} \cdot \phi \cdot n ds + \iiint_\Omega q d\Omega \tag{1.2}$$

其中 S是 Ω边界. 考虑控制单元的某一界面,记作 jf面(参见图 1),假定控制单元中心节点 P与相邻控制单元中心节点 jp的连线近似垂直于 jf面. 积分方程(1.2)的一阶迎风离散,可以写成

$$\sum_{j=1}^J \left\{ \left[\frac{\Gamma}{|d_j|^2} d_j \cdot S_j - \frac{1 - \text{sign} \dot{m}_{jf}}{2} \dot{m}_{jf} \right] \phi_p - \left[\frac{\Gamma}{|d_j|^2} d_j \cdot S_j + \frac{1 + \text{sign} \dot{m}_{jf}}{2} \dot{m}_{jf} \right] \phi_{jp} \right\} + q_p \Omega = 0, \tag{1.3}$$

其中 \dot{m}_j 为通过 j面的质量通量, j= 1 2 ... J, J为控制单元表面数目,对二维网格, J= 3和 4 分别表示三角形网格和笛卡尔网格. φ_p表示 φ在控制单元中心 p点的值, φ_{jp}是 φ在相邻控制单元中心 jp点的值. S_j是 jf面的面积矢量,它的指向从 p到 jp. 根据一阶迎风离散时作的假定,矢量 d_j的方向与 S_j的方向一致. Ω为控制单元 p的体积. 得到重构近似精度为 (N + 1)阶的有限体积迎风数值摄动格式,简称高迎风有限体积格式(GU- VS).

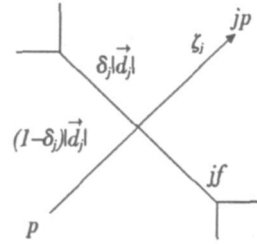


图 1 控制体 P界面 - jf上的局部坐标系
Fig 1 Local coordinate system

$$\sum_{j=1}^{n_p} \frac{1}{G_j} \left\{ \left[\Gamma \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} - \frac{1 - \text{sign} \dot{m}_{jf}}{2} \dot{m}_{jf} G_j \right] \phi_p - \left[\Gamma \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} + \frac{1 + \text{sign} \dot{m}_{jf}}{2} \dot{m}_{jf} G_j \right] \phi_{jp} \right\} + q_p \Omega = 0,$$

也可写为

$$\sum_{j=1}^{n_p} \left\{ \left[\frac{\Gamma}{G_j} \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} - \text{min}(\dot{m}_{jf}, 0) \right] \phi_p - \left[\frac{\Gamma}{G_j} \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} + \text{max}(\dot{m}_{jf}, 0) \right] \phi_{jp} \right\} + q_p \Omega = 0, \tag{1.4}$$

$$G_j = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)!} R_{jf}^n (\text{sign} \dot{m}_{jf})^{\text{mod}(n,2)},$$

$$\text{sign} \dot{m}_{jf} = \begin{cases} 1 & \dot{m}_{jf} > 0 \\ -1 & \dot{m}_{jf} < 0 \end{cases}$$

(1.4)为使用了高算法导出的高迎风格式的离散方程形式, $R_j = \dot{m}_{jf} \frac{|d_j|}{MS_{jf}}$, R_j可看做网络雷诺数.

2 高迎风有限体积格式(GUVS)与基于压力的不可压和可压缩 SMPLE 算法相耦合

基于压力算法是大多数商用 CFD软件的基础,其中压力是主变量,需要专门求解关于压力的方程,密度则由状态方程求出,特别适合不可压缩流动和低马赫数流动. 压力修正是基于压力的修正速度场和压力场的分步算法, Chorin和 Temam作了开拓性的理论工作. 压力修正在有限体积中的具体应用就是 Pantankar著名的 SMPLE(Sem + Implicit Pressure Linked Equations)系列. 后来, Kark和 Pantankar发展了可压缩 SMPLE方法,广泛用于各种流动.

2.1 不可压缩 SMPLE算法计算步骤简介

- ①假定一个速度分布,记为 u⁰、v⁰, 以此计算动量离散方程中的系数及常数项;
- ②假定一个压力场 p^{*};
- ③依次求解两个动量方程,得到 u^{*}、v^{*};
- ④求解压力修正值方程,得到 p['];
- ⑤根据 p[']改进速度值;
- ⑥利用改进后的速度场求解那些通过源项、物性等与速度场耦合的 φ变量,如果 φ与动量方程不耦

合, 即不影响流场, 则应在速度场收敛后再求解; ⑦ 重复 ③~ ⑥步, 直到所有方程收敛。

在 SMPLE基础上衍生、改进的系列算法, 与上述步骤类似。下面具体介绍 GUVS与不可压缩 SMPLE算法的耦合及求解。设不可压缩流动 NS方程组

$$\tilde{N} \cdot V = Q \quad (\text{连续性方程}) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{N} \cdot (V \tilde{V}) = -\tilde{N} p + \frac{1}{Re} \tilde{N}^2 V, \quad (\text{动量方程}) \quad (2.2)$$

将动量方程在控制体 P 上 (参见图 1) 离散为

$$V_p \frac{V^{n+1} - V^0}{\Delta t} + \sum_{j=1}^N [(V^n \cdot S_j) V^{n+1}] = - \sum_{j=1}^N p_j^n S_j + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^N S_j \frac{\partial V^{n+1}}{\partial n}, \quad (2.3)$$

其中 V 是速度, S_j 是控制体第 j 面的外法向面积矢量, p 是压力。

上式可进一步改写为

$$V_p \frac{V_p^{n+1} - V_p^0}{\Delta t} + \sum_{j=1}^N [(V^n \cdot S_j) V^{n+1}] = - \sum_{j=1}^N p_j^n S_j + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^N S_j \frac{V_{pj}^{n+1} - V_p^{n+1}}{|d_j|}, \quad (2.4)$$

V_p 是控制体 p 的体积, p_j 是控制体 p 的相邻单元, 令 m_j = V_j · S_j, 类比通用变量的标量输运扩散方程的高迎风有限体积格式 (1.1) 式和 (1.4) 式, 可得关于速度原始变量 [u v w] 的输运扩散方程的高有限体积格式

$$\begin{aligned} V_p \frac{V_p^{n+1} - V_p^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{G_j} \left[\frac{1 + \text{sigm}_{m_j}}{2} m_j G_j V_p^{n+1} + \frac{1 - \text{sigm}_{m_j}}{2} m_j G_j V_{pj}^{n+1} \right] \\ = - \sum_{j=1}^N p_j^n S_j + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^N S_j \frac{V_{pj}^{n+1} - V_p^{n+1}}{|d_j|}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

为计算方便, 将 (2.5) 式整理如下

$$\left[\frac{V_p}{\Delta t} + \sum_{j=1}^N \left[m \max(m_j, 0) + \frac{1}{G_j} \frac{1}{Re} \frac{S_j}{|d_j|} \right] \right] V_p^{n+1} + \sum_{j=1}^N \left[m \min(m_j, 0) - \frac{1}{G_j} \frac{1}{Re} \frac{S_j}{|d_j|} \right] V_{pj}^{n+1} = - \sum_{j=1}^N p_j^n S_j + \frac{V_p}{\Delta t} V_p^n$$

顶盖驱动方腔流动是一个 Benchmark 问题, 模型如图 2, 左、右和底部是固壁, 顶部向右的水平速度 u = 1。顶盖驱动方腔流动是不可压缩流体计算的一个标准模型, 用以检验新格式和程序稳定性。

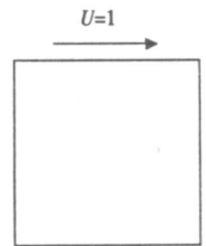


图 2 顶盖驱动方腔流动
Fig. 2 Lid-driven cavity flow

使用 200 × 200 结构网格和六阶精度高迎风格式 (6GUVS) 计算了 Re = 1 000 的顶盖驱动方腔流动, 为比较起见, 也使用 200 × 200 结构网格和一阶迎风格式 (1US) 计算了同一流动。并把数值结果与 Ghia 的解进行了比较、分析。图 3 和图 4 是 Benchmark 解和 1US、6GUVS 的计算结果。从图中可以看出 6GUVS 的精度明显高于 1US 的精度。

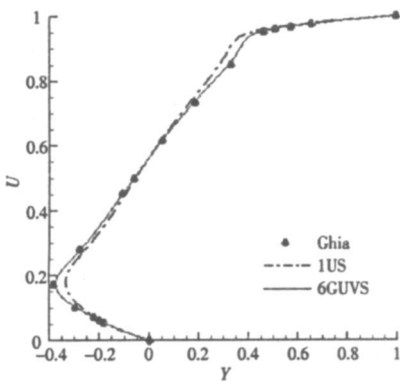


图 3 垂直中线流速水平分量 u

Fig. 3 Horizontal velocity component u at the vertical centerline

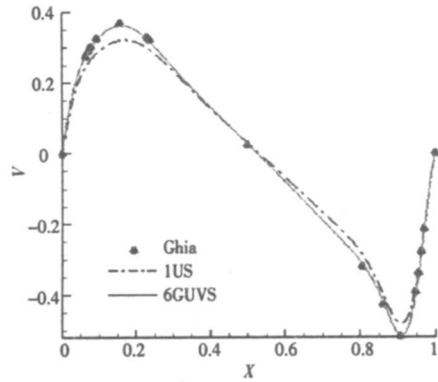


图 4 水平中线流速垂直分量 v

Fig. 4 Vertical velocity component v at the horizontal centerline

作为应用, 本文利用结构网格和六阶精度高迎风格式(6 GUVS)计算了 $Re = 1\ 000$ 长宽比分别为 2:1 和 1:2 的顶盖驱动方腔流动, 图 5 和图 6 是长宽比分别为 2:1 和 1:2 顶盖驱动方腔流动的流线图。

2.2 可压缩 SIMPLE 算法简述:

① 假定一个速度和密度分布, 记为 u^0 、 v^0 、 ρ^0 以此计算动量离散方程中的系数及常数项; ② 假定一个压力场 p^* ; ③ 依次求解两个动量方程, 得到 u^* 、 v^* ; ④ 求解压力修正值方程, 得到 p ; ⑤ 根据 p 改进速度场、压力场和密度场; ⑥ 求解能量方程, 更新密度场; ⑦ 重复 ③~⑥步, 直到所有方程收敛。

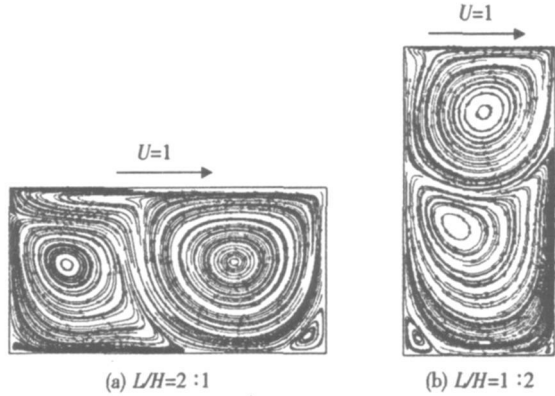


图 5 不同长宽比顶盖驱动方腔流动流线图

Fig 5 The stream lines of lid-driven cavity flow with different ratio of length to depth

下面具体介绍高迎风格式与可压缩 SIMPLE 算法的耦合及求解。

选取参考量 $\rho_{ref} = \rho$, $U_{ref} = U_{\frac{1}{2}}$, $T_{ref} = T_{\frac{1}{2}}$, $p_{ref} = \rho_{\frac{1}{2}} U_{\frac{1}{2}}^2$, $t_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}}$, $e_{ref} = U_{\frac{1}{2}}^2$, $h_{ref} = U_{\frac{1}{2}}^2$, $a_{ref} = U_{\frac{1}{2}}$. 可得到如下无量纲 Euler 方程组:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \tilde{N} \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (\text{连续性方程}) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} + \tilde{N} \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = -\tilde{N} p, \quad (\text{动量方程}) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h + \tilde{N} \cdot (\rho h \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \tilde{N} p + \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (\text{能量方程}) \quad (2.8)$$

其中焓 $h = e + p/\rho = c_p T$, 不难导出内能表达的能量方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho e + \tilde{N} \cdot (\rho e \mathbf{V}) = -p \tilde{N} \cdot \mathbf{V}. \quad (2.9)$$

内能 $e = c_v T$. 关于温度的控制方程如下

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho c_v T + \tilde{N} \cdot (\rho c_v T \mathbf{V}) = -p \tilde{N} \cdot \mathbf{V}, \quad (2.10)$$

其中无量纲定容比热、定压比热和状态方程

$$c_v = \frac{1}{M_{\frac{1}{2}}^2 (\gamma - 1)}, \quad c_p = \frac{\gamma}{M_{\frac{1}{2}}^2 (\gamma - 1)}, \quad p = \frac{\rho T}{M_{\frac{1}{2}}^2}. \quad (2.11)$$

不难导出无量纲声速公式为 $a = \sqrt{T} M_{\frac{1}{2}}$, 流场当地马赫数计算公式 $M = M_{\frac{1}{2}} U / \sqrt{T}$. 无量纲来流 $T_{\frac{1}{2}} = 1$, $\rho = 1$, $a_{\frac{1}{2}} = 1 M_{\frac{1}{2}}$, $U_{\frac{1}{2}} = 1$, $p_{\frac{1}{2}} = 1/M_{\frac{1}{2}}^2$. 动量方程与温度方程的有限体积离散

$$\frac{V_p}{\Delta t} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho T \end{bmatrix}_p + m_{ax} \left(\dot{m}_{jy} \right) \begin{bmatrix} u \\ v \\ T \end{bmatrix}_p + m_{in} \left(\dot{m}_{jy} \right) \begin{bmatrix} u \\ v \\ T \end{bmatrix}_{pj} = Src, \quad (2.12)$$

$$Src = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{np} p_j S_{jy} \cdot i \\ \sum_{j=1}^{np} p_j S_{jy} \cdot j \\ p_p \sum_{j=1}^{np} S_{jy} \cdot V_{jy} \end{bmatrix} - \frac{V_p}{\Delta t} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho c_v T \end{bmatrix}_p,$$

同理, 由状态方程求出的密度场 $\bar{\rho}$ 和动量方程求出的速度场 \bar{V} 一般不满足连续性方程, 假定加上一个修正密度场 ρ' 和修正速度场 V' 后满足连续性方程, 即

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \tilde{N} \cdot [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{V} + V')] = 0 \quad (2\ 13)$$

展开即为

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \tilde{N} \cdot [\bar{\rho} \bar{V}' + \bar{\rho} V' + \rho' \bar{V} + \rho' V'] = 0, \quad (2\ 14)$$

略去二阶小量得

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \tilde{N} \cdot (\bar{\rho} \bar{V}') + \tilde{N} \cdot (\bar{\rho} V') + \tilde{N} \cdot (\rho' \bar{V}') = 0, \quad (2\ 15)$$

改写为

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \tilde{N} \cdot (\bar{\rho} V') + \tilde{N} \cdot (\rho' \bar{V}') = -\tilde{N} \cdot (\bar{\rho} \bar{V}') - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \quad (2\ 16)$$

同理取 $V' = -\frac{V_p}{A_p} \tilde{N} p'$, A_p 是动量方程主对角系数, 又由状态方程得 $p' = \rho' T / M_\infty^2$, 所以 $\rho' = \sqrt{M_\infty^2} / T p'$

= $C_{\rho p'}$, 代入 (2 16) 式得

$$\frac{\partial(C_{\rho p'})}{\partial t} + \tilde{N} \cdot (C_{\rho p'} V') = \tilde{N} \cdot \left[\frac{\bar{\rho} V_p}{A_p} \tilde{N} p' \right] - \tilde{N} \cdot (\bar{\rho} \bar{V}') - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}, \quad (2\ 17)$$

注意到 $C_\rho = \sqrt{M_\infty^2} / T$, 所以

$$\frac{\partial(\sqrt{M_\infty^2} / T p')}{\partial t} + \tilde{N} \cdot \left[\frac{\sqrt{M_\infty^2}}{T} p' V' \right] = \tilde{N} \cdot \left[\frac{\bar{\rho} V_p}{A_p} \tilde{N} p' \right] - \tilde{N} \cdot (\bar{\rho} \bar{V}') - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}. \quad (2\ 18)$$

从 (2 18) 式可知, 对于不可压缩流体, 声速无穷大, $M_\infty = 0$, 时间项和对流项也为零, 只剩下扩散项, 退化为不可压缩的压力修正方程; 对于低马赫数流动 $M_\infty < 0.3$, 压力修正方程扩散项占优, 对于高超声速流动 $M_\infty > 5$, 对流项占优, 这就是基于压力的 SIMPLE 算法能够计算全速流动的原因. 另一方面, 从压力修正方程推导过程来看, Euler 方程和 NS 方程的修正压力方程形式上完全一样, 所以压力修正方程即可用于无粘流动计算, 也可用于粘性流动计算.

修正压力方程基于高迎风格的有限体积离散我们引入广义密度、广义粘系数 (见表 1), 于是修正压力方程具有如下形式

$$\frac{\partial(\bar{\rho}_p')}{\partial t} + \tilde{N} \cdot (\bar{\rho}_p' V') = \tilde{N} \cdot (\bar{\mu} \tilde{N} p') + Src, \quad (2\ 19)$$

所以压力修正方程能够作基于 GUVS 格式的有限体积离散.

$$\bar{\rho}_p' \frac{p'_{p, l} - p'_{p, l-1}}{\Delta t} + \sum_{j=1}^N [\max(m_{f_j}, 0) p'_{p, l+1} + \min(m_{f_j}, 0) p'_{p, l-1}] = \sum_{j=1}^N \frac{S_{f_j} \bar{\mu} p'_{p, j} - p'_{p, l-1}}{|d_j|} + Src, \quad (2\ 20)$$

G_j 的计算公式不变, 只是密度和粘系数应该换成这里的广义密度和广义粘系数.

本文利用高迎风格耦合可压缩 SIMPLE 算法, 计算可压缩流动, 算例为二维理想流体的凹腔流动. 图 6 为不同来流马赫数和宽深比 L/H 的凹腔流场流线图.

表 1 可压缩 SIMPLE 控制方程中的广义密度和广义粘系数
Tab 1 Generalized density and generalized coefficient of viscosity in the compressible SIMPLE governing equations

	主变量	广义密度 $\bar{\rho}$	广义粘性数 $\bar{\mu}$
修正压力方程	p'	$\sqrt{M_\infty^2} / T$	$\bar{\rho} V_p / A_p$

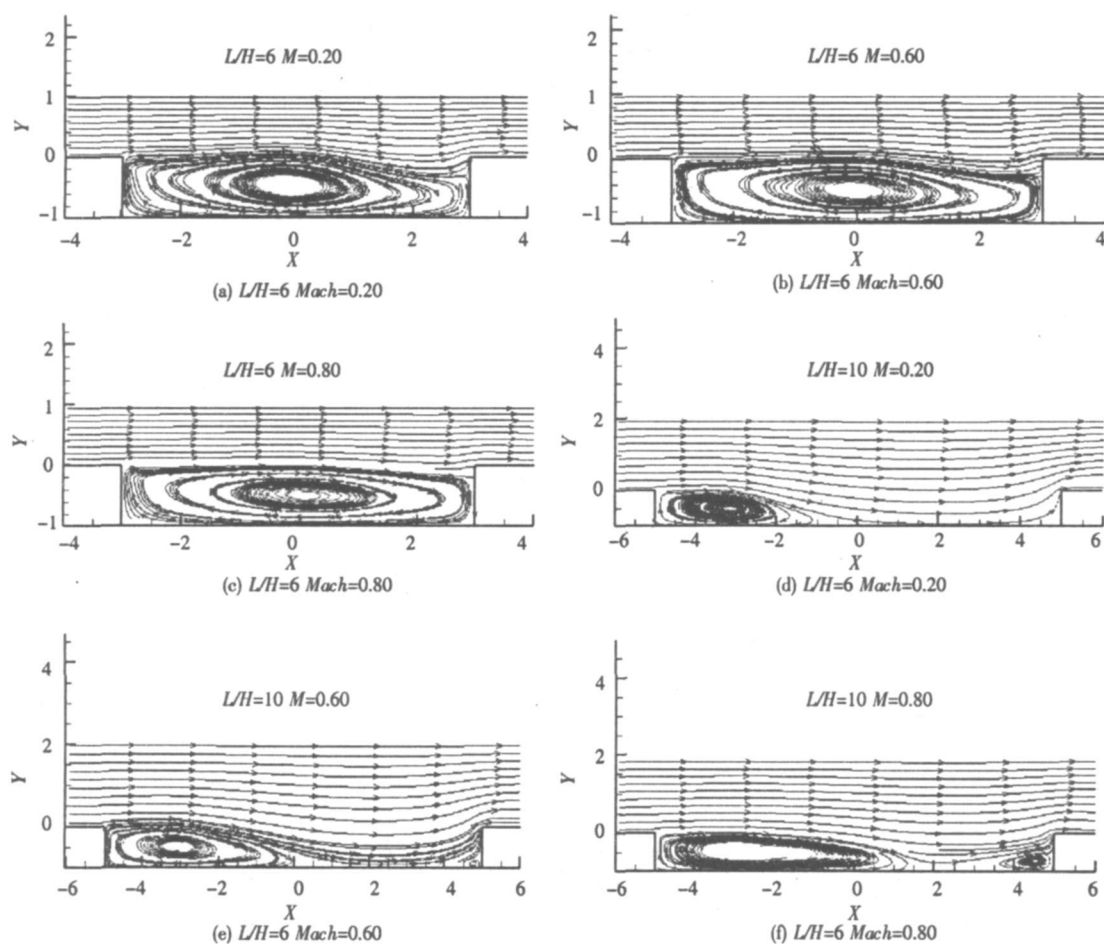


图 6 各种宽深比腔内流动流线图

Fig 6 The stream lines offlows in cavities with different ratio of length to depth

3 结 论

将高迎风有限体积格式 (GUVS) 与 SIMPLE 系列算法相结合, 数值模拟不可压缩和可压缩不同宽深比腔内流动, 获得较好的数值结果, 表明六阶精度 GUVS 具有分辨率高、稳定性好的良好性能. 继续将该格式应用于复杂流场的数值模拟是下一步将进行的工作.

参 考 文 献

- [1] 高智. 对流扩散方程的摄动有限体积方法 [C] // 第十一届全国计算流体力学会议论文集. 洛阳. 2002: 38—45.
- [2] 高智, 柏威. 对流扩散方程的摄动有限体积 (PFV) 方法及讨论 [J]. 力学学报, 2004, 36(1): 88—94.
- [3] 高智, 向华, 申义庆. 摄动有限体积法重构近似高精度的意义 [J]. 计算物理, 2004, 21(2): 131—136.
- [4] 代民果, 高智. 同位网格摄动有限体积格式求解浮力驱动方腔流 [J]. 力学学报, 2006, 38(6): 733—740.
- [5] 代民果. 有限体积迎风高格式及基于非结构混合网格的复杂流动数值模拟 [D]. 北京: 中国科学院研究生部, 2008.
- [6] GAO Z, YANG G W. Perturbational finite volume (PFV) method [J]. ACTA Mechanica Sinica, 2004(6): 580—590.
- [7] GAO Z. Numerical Perturbation Algorithm and Absolute Positive, Central FV Schemes for CD Equation [C] // Proc of 8th Asian Computational Fluid Dynamics Conference HongKong 2010.
- [8] 朱可, 李明军. 对流扩散方程 QUICK 格式的数值摄动高精度重构方法 [J]. 力学学报, 2011, 43(1): 55—62.