

# 用物理粘性构建高阶不振荡对流扩散差分格式<sup>1)</sup>

高智<sup>2)</sup>

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京, 100190)

**摘要:** 利用作者提出的数值摄动算法, 通过扩散格式数值摄动重构把对流扩散方程的二阶中心差分格式(2CDS)重构为高精度高分辨率格式, 解析分析和模型方程计算证实了新格式的高精度不振荡性质。新格式是把物理粘性使流动光滑化的扩散运动规律引入 2CDS 中的结果。该法显然与构建高级离散格式的常见方法不同。证实: 数值摄动重构中引入扩散运动规律的结果格式与引入对流运动规律(下游不影响上游的规律)的结果格式一致, 说明对离散方程的数值摄动运算, 在维持原格式结构形式不动的条件下, 不仅能提高格式精度和稳健性, 且可揭示对流离散运动规律与扩散离散运动规律之间的内在关联; 同时证实, 文中提出和使用的上、下游分裂方法是构建高精度不振荡离散格式的一个有效方法。

**关键词:** 计算流体力学, 数值摄动算法, 高精度不振荡差分格式, 对流扩散方程

中图分类号: 文献标识码: A 文章编号:

## 引 言

在计算流体力学(CFD)的发展过程中, 构建 Navier-stokes (NS) 方程组和 Euler 方程组的高精度高分辨率差分格式一直是一个重要课题[1, 2]。高精度通常采用多结点方法和增加结点导数的紧致方法。高分辨率不振荡格式的构建, 最早是 von Neumann 等为捕捉间断解提出的人工粘性法[3, 4], 后来又发展了调控数值耗散、数值色散和数值群速度的迎风法和人工光滑化方法, 如一阶精度 Godunov 间断分解算法[5]、Harten[6]二阶精度 TVD 等。为了提高不振荡格式的精度, Harten 等[7]提出根据差商绝对值极小选择原则逐次扩展节点模板的本质不振荡(ENO)高阶格式, Liu 等[8]通过引入权重系数改进 ENO 插值模板选择方案的 WENO 格式, 提供了构建高精度高分辨率(本质无振荡)差分格式的一般方法。人们构建的众多高分辨率不振荡格式均离不开对数值耗散、数值色散和数值群速度的人为调控, 都是处理对流离散格式的结果, 且高于二阶精度的本质不振荡格式均需使用多结点。

作者提出的数值摄动算法[9-12]与上述常用方法不同, 该法通过数值摄动重构对流离散格式构建出一组高精度条件稳定和高精度绝对稳定有限差分(FD)和有限体积(FV)格式【13-15】, 该法不扩充结点不使用限制器之类的任何人工光滑化技术, 而通过引入下游不影响上游的对流运动规律和对格

式的数值摄动运算, 获得高精度高分辨率格式。本文进一步发展数值摄动算法, 把摄动重构对流离散格式发展为重构扩散离散格式以及摄动重构上、下游扩散格式, 令人惊奇的是, 数值摄动重构扩散格式可获得摄动重构上、下游对流格式同样优良的高精度不振荡重构格式。

### 1 数值摄动重构扩散离散格式

物理粘性具有使流场光滑化的特性, 既然调控数值耗散和色散的人工光滑化技巧可使格式不振荡, 因此可以期望“调控”物理粘性同样可使格式不振荡, 为此我们对扩散离散格式进行数值摄动重构。对流扩散方程

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + F \quad (1)$$

的二阶中心差分格式(2CDS)为

$$\frac{1}{2} u_i \Delta x (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) = \gamma (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + F_i \Delta x^2 \quad (2)$$

对 2CDS 中扩散离散格式的数值摄动重构格式为

$$\frac{1}{2} u_i \Delta x (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) = G_d (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + G_f \Delta x^2 F_i \quad (3)$$

— — 收到第 1 稿, — — 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金资助项目(10872204)

2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn

其中数值摄动重构函数  $G_d$  和  $G_f$  为

$$G_d = \gamma(1 + \sum_{n=1}^N d_n \Delta x^n), G_f = 1 + \sum_{n=1}^N f_n \Delta x^n \quad (4)$$

把  $G_d$  和  $G_f$  代入格式 (3), 并把  $\varphi_{i\pm 1}$  对  $i$ - 结点取

Taylor 展开, 得到重构格式 (3) 的修正微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{\gamma} \Delta x \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \sum_{n=2}^N \frac{2}{(2n-1)!} \frac{\partial^{2n-1} \varphi}{\partial x^{2n-1}} \Delta x^{2n-1} \right] = & (1 + \sum_{n=1}^N d_n \Delta x^n) \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \sum_{n=2}^N \frac{2}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial x^{2n}} \Delta x^{2n} \right] \\ & + \frac{1}{\gamma} \Delta x^2 (1 + \sum_{n=1}^N f_n \Delta x^n) F_i \end{aligned} \quad (5)$$

在方程 (5) 中令  $\Delta x^m (m=0,1,2,\dots)$  的系数为零,

$$d_{2n-1} = 0 \quad f_{2n-1} = 0 \quad (n \geq 1) \quad (8.1)$$

由  $\Delta x^2$  系数为零得到

$$\frac{u_j}{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} F_i \quad (6)$$

$$\begin{aligned} d_2 = \frac{1}{12} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^2, d_4 = -\frac{1}{6!} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^4, d_6 = \frac{1}{6 \times 7!} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^6 \\ d_8 = \frac{-3}{10!} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^8, d_{10} = \frac{5}{6 \times 11!} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^{10}, f_{2n} = 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (8.2)$$

由线性化对流扩散方程 (6) 推出

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^{n-2} F_i \quad (n \geq 2) \quad (7)$$

把  $d_n$  和  $f_n$  诸系数 (8.1) 和 (8.2) 代入格式 (3) 得到一组高精度扩散重构摄动格式 (DPS)。

把线性高阶导数式 (7) 代入 (5), 由  $\Delta x^n$  系数为零

## 2 扩散摄动重构格式 (DPS) 的性能分析

可求出诸系数  $d_n$  和  $f_n$ , 部分  $d_n$  和  $f_n$  为

扩散重构摄动格式 (DPS) (3) 可写成如下一般形式

$$\frac{\gamma}{\Delta x^2} [C_{d,i+1} (2N+2) \varphi_{i+1} - C_{d,i} (2N+2) \varphi_i + C_{d,i-1} (2N+2) \varphi_{i-1}] + F_i = 0 \quad (9)$$

并有

$$C_{d,i} (2N+2) = C_{d,i+1} (2N+2) + C_{d,i-1} (2N+2) \quad (10)$$

对  $N=0$ , 即经典二阶中心差分格式 (3)

对  $N=1$ , 即四阶精度 DPS,

$$C_{d,i\pm 1} = 1 \mp \frac{1}{2} R_{\Delta x} \quad (11.1)$$

$$C_{d,i\pm 1} (4) = \left( 1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 \quad (11.2)$$

对  $N=2$ , 即六阶精度 DPS

$$C_{d,i\pm 1} (6) = \left( 1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 \left( 1 - \frac{1}{15} R_{\Delta x}^2 \right) \quad (11.3)$$

对  $N=3$ , 即八阶精度 DPS

$$C_{d,i\pm 1} (8) = \left( 1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 \left( 1 - \frac{1}{30} R_{\Delta x}^2 \right)^2 + \frac{1}{20 \times 7!} R_{\Delta x}^6 \quad (11.4)$$

对  $N=4$ , 即十阶精度 DPS

$$C_{d,i\pm 1}(10) = (1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x})^2 + \frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 (1 - \frac{1}{30} R_{\Delta x}^2)^2 + \frac{1}{20 \times 7!} (1 - \frac{1}{12} R_{\Delta x}^2)^2 R_{\Delta x}^6 \quad (11.5)$$

对  $N = 5$ ，即十二阶精度 DPS

$$C_{d,i\pm 1}(12) = (1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x})^2 + \frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 (1 - \frac{1}{30} R_{\Delta x}^2)^2 + \frac{1}{20 \times 7!} R_{\Delta x}^6 (1 - \frac{1}{24} R_{\Delta x}^2)^2 + \frac{37}{4 \times 2!} R_{\Delta x}^{10} \quad (11.6)$$

式 (11.1) — (11.6) 中  $R_{\Delta x} = u_i \Delta x / \gamma$  为网格 Reynolds 数。由式 (11) 推知，对  $N = 2m - 1, (m = 1, 2, 3)$  如下关系式恒成立

$$C_{d,i+1}(4m) \geq 0, C_{d,i-1}(4m) \geq 0, \text{对 } R_{\Delta x} \text{ 的任意值} \quad (12.1)$$

$$|C_{d,i}(4m)| \geq |C_{d,i+1}(4m)| + |C_{d,i-1}(4m)| \quad (12.2)$$

可见对 4 阶、8 阶和 12 阶精度扩散重构摄动格式 (DPS)，由线性方程 (9) 组建的线性代数方程组，其系数矩阵对  $R_{\Delta x}$  的任意值均为对角占优，故这几个 DPS 绝对稳定，即它们为稳定的临界网格 Reynolds 数  $R_{cri}$

为无穷大。事实上，离散方程(9)无源  $F_i = 0$  时的通解求出为

$$\varphi_i = A + B \left( \frac{C_{d,i-1}}{C_{d,i+1}} \right)^i, x = i \Delta x \quad (12.3)$$

其中，A 和 B 由边界条件确定；通解 (12.3) 表明：上述诸 DPS 不会产生振荡解，为单调格式。对 6 阶和 10 阶精度 DPS (9)， $2N + 2 = 2 + 4m, (m = 1, 2)$ ，有

$$\begin{aligned} C_{d,i+1}(2+4m) > 0, C_{d,i-1}(2+4m) > 0 & R_{\Delta x} \text{ 不大} \\ C_{d,i+1}(2+4m) < 0, C_{d,i-1}(2+4m) < 0 & R_{\Delta x} \text{ 足够大} \end{aligned} \quad (13)$$

可见，6 阶和 10 阶精度 DPS (9) 为条件稳定格式，它们为稳定的  $R_{cri}$  为有限值，例如六阶精度 DPS(9) 为稳定格式的  $R_{cri}$  约为 4。此外， $C_{d,i\pm 1}(2n+2)$  的最后一项可写成  $CR_{\Delta x}^{2N}$ ，其系数 C 随 N 的增大而显著减小，故高于 12 阶精度 DPS (9) 本文不再考虑。

**3 扩散重构摄动格式 (DPS) 优良性能的数值验证**  
我们利用一维非线性 Burgers 方程、一维和二维线性对流扩散方程检验扩散摄动格式 (DPS) 的不振荡和高精度性质。定常 Burgers 方程为

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad (14)$$

方程 (14) 的精确解取为  $u = \tanh[\text{Re}(1-2x)/4]$ ，计算取均匀网格， $Re = 200$ 。表 1 给出二阶中心差分格式 (2CDS)、4 阶和 8 阶精度扩散重构摄动格式 (4-DPS 和 8-DPS) 计算 Burgers 方程的最大误差  $L_\infty$  和均方根误差  $L_2$ 。在多数网格条件下，2-CDS 均为振荡或发散，但 4-DPS 和 8-DPS 网格再粗也不会产生振荡解，对细网格 (网格数  $N = 320$ )，4-DPS 和 8-DPS 的  $L_\infty$  和  $L_2$  均很小于 2-CDS 的  $L_\infty$  和  $L_2$ 。值得注意的是：8-DPS 的  $L_\infty$  和  $L_2$  分别均与 4-DPS 的  $L_\infty$  和  $L_2$  相近，有的甚至还差 (如对  $N = 320$ )，原因有待进一步的研究，初步看来是  $x = 0.5$  处解间

— — 收到第 1 稿， — — 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金资助项目(10872204)

2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn

断及非线性效应所致,因为对一维和二维线性问题,4-DPS 和 8-DPS 与 2-CDS 相比的高精度高分辨率特性十分规律(参见下文)。图 1 给出诸格式在间断位置 ( $x=0.5$ ) 附近的 Burgers 方程解,进一步展现了 2-CDS 振荡、4-DPS 和 8-DPS 不振荡的特性。4-DPS 和 8-DPS (9) 的高精度高分辨率性质得到数值证实。

表 2 进一步给出 3DPS 与五阶精度 WENO (5WENO) 格式计算 Burgers 方程 (14) 的对比情

况,表中同时给出 2CDS 的结果。网格很粗,3DPS 和 5WENO 格式均不振荡,数值精度两者大体一致。考虑到 3DPS 为三节点中心格式,不存在降低计算质量的数值边界效应问题;而 5WENO 格式为七节点偏心格式,避不开数值边界效应的不利因素。特别是 3DPS 的构建没有使用人工粘性也没有使用限制器;而 5WENO 格式使用了限制器。因此,可以认为 3DPS 比 5WENO 格式更好。

表 1 2CDS、4DPS 和 8DPS 计算 Burgers 方程的最大误差  $L_\infty$  和均方根  $L_2$  误差

Table 2 Maximum error  $L_\infty$  and mean square root error  $L_2$  of 2CDS,4DPS and 8DPS solving Burgers equation

N	2-CDS		4-DPS		8-DPS	
	$L_\infty$ error	$L_2$ error	$L_\infty$ error	$L_2$ error	$L_\infty$ error	$L_2$ error
40	—	—	0.58150	0.14282	0.70359	0.35940
80	—	—	0.609425	0.08358	0.515178	0.116082
160	—	—	0.802481	0.0651318	0.869026	0.0692375
320	0.64667	0.0515445	0.0042642	0.000375375	0.0315352	0.00249175
640	0.127819	0.00780553	0.0403525	0.00237591	0.0422261	0.0024999
1280	0.0243933	0.00157757	0.0097397	0.0006008	0.0098386	0.0006075
2560	0.0057826	0.00037746	0.0024385	0.0001473	0.0024437	0.0001477

表 2 2CDS, 3DPS 和 5WENO 计算 Burgers 方程的最大误差  $L_\infty$  和均方根误差  $L_2$  比较

Table 2 Maximum error  $L_\infty$  and mean square root error  $L_2$  of 2CDS, 3DPS and 5WENO solving Burgers equation

Re	N	2CDS		3DPS		5WENO	
		$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$
100	20	---	---	0.2300	0.3087e-1	0.9388e-1	0.9522e-2
	40	---	---	0.7812e-1	0.4350e-2	0.1310	0.7276e-2
	80	---	---	0.3288e-1	0.8569e-3	0.8761e-1	0.3325e-2
	160	0.6978e-1	0.1899e-2	0.2686e-1	0.5975e-3	0.1494e-1	0.5572e-3
	320	0.1431e-1	0.4386e-3	0.5908e-2	0.1433e-3	0.2892e-2	0.1057e-3
	640	0.3180e-2	0.9435e-4	0.1106e-2	0.2625e-4	0.7987e-3	0.3229e-4
	1280	0.4231e-3	0.1200e-4	0.2195e-3	0.1027e-4	0.4442e-3	0.1812e-4

500	20	---	---	0.6328	0.1983	0.5089e-1	0.4939e-2
	40	---	---	0.4754	0.5554e-1	0.6180e-1	0.3104e-2
	80	---	---	0.2884	0.1120e-1	0.8334e-1	0.2166e-2
	160	---	---	0.1216	0.1794e-2	0.1208	0.1657e-2
	320	---	---	0.3723e-2	0.4160e-4	0.1170	0.9597e-3
	640	0.1270	0.6249e-3	0.3973e-1	0.1745e-3	0.2782e-1	0.2224e-3
	1280	0.2386e-1	0.1407e-3	0.9222e-2	0.4660e-4	0.3596e-2	0.3136e-4

表 3 2CDS、4DPS、8DPS 和 12DPS 计算线性对流扩散方程 (15) 的均方误差  $L_2$  error 及其精度阶 (order)

Table 2 Mean square root error  $L_2$  and accurate order of 2CDS, 4DPS, 8DPS and 12 DPS solving 1-D linear convective diffusion equation (15)

N	2CDS		4DPS		8DPS		12DPS	
	$L_2$ error	Order	$L_2$ error	Order	$L_2$ error	Order	$L_2$ error	Order
20	—	—	6.9202e-2	1.5100	0.214603	1.224	0.51585	0.1254
40	—	—	1.5748e-2	2.1717	6.0288e-3	5.1897	1.2761e-3	8.6591
80	—	—	1.7906e-3	3.1367	4.1862e-5	7.1701	3.9799e-5	5.0029
160	—	—	1.2477e-4	3.8431	1.8111e-7	7.8526	1.8054e-7	7.7843
320	1.1886e-3	—	7.6455e-6	4.0285	6.9406e-10	8.0276	6.9392e-10	8.0233
640	2.9035e-4	2.0334	4.7125e-7	4.0201	2.6749e-12	8.0195	2.6746e-12	8.0193
1280	7.2112e-5	2.0095	2.9322e-8	4.0064	1.0328e-14	8.0211	1.0525e-14	7.9894

一维和二维线性常系数和变系数对流扩散模型方程为

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (15)$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \gamma \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (16)$$

方程 (15) 和 (16) 的精确解分别取为  $\varphi = (e^{x\text{Re}} - 1)/(e^{\text{Re}} - 1)$  和

$\varphi(x, y) = \exp[\frac{1}{\gamma}(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2})]$ 。计算中均取均匀

网格, 取  $\text{Re} = 200, \gamma = 0.025$ 。表 3 给出 2-CDS、4-DPS、8-DPS 和 12-DPS 计算方程 (15) 的均方根误差  $L_2$  及其精度阶 ( $L_2$  error); 表 4 给出诸格式计算

二维方程 (16) 的最大误差  $L_\infty$  和均方根误差  $L_2$ 。

表 3 数据说明: 2-CDS、4-DPS 和 8-DPS 求解常系数对流扩散方程 (15) 均可达到各自的  $L_2$  精度阶。

2-CDS 在粗网格时振荡或发散; 网格再粗 4-DPS 和 8-DPS 均不振荡, 4-DPS 和 8-DPS (9) 的高精度不振荡性质得到进一步数值证实; 应当指出 12-DPS 与 8-DPS 相比难分好坏, 这是因为, 前者比后者多出的级数项  $R_{\Delta x}^8$  和  $R_{\Delta x}^{10}$ , 在计算的所有网格雷诺数

$R_{\Delta x}$  ( $R_{\Delta x} < 1$ ) 范围内, 这两项的贡献很小很小, 因此 12-DPS 的实际精度与 8-DPS 相近。参见表 3。2-CDS 在粗网格 (网格数  $N$  少于 200) 下在边界 ( $x = 1.0$ ) 附近产生振荡解, 参见图 2。

表 4 的数据表明: 计算二维线性变系数对流扩散方程 (16), 网格再粗 4-DPS 和 8-DPS 均不振荡, 而 2-CDS 在粗网格时数值振荡; 4-DPS 和 8-DPS 在

二维情况下的高精度不振荡性质得到数值证明。  
 4-DPS 和 8-DPS 在粗网格 ( $N*N=10*10, 20*20$ ) 下的最大误差  $L_\infty$  和均方根误差  $L_2$  比细网格

( $N*N=100*100$ ) 下 2-CDS 的  $L_\infty$  和  $L_2$  误差还小。

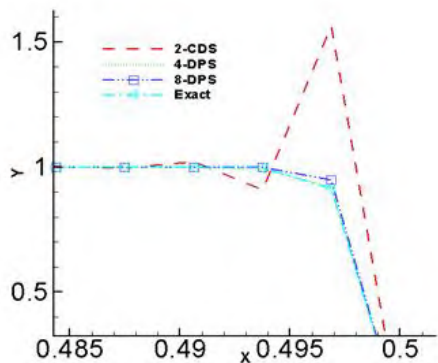


图 1 Burgers 方程计算, 诸格式在间断位置 ( $x = 0.5$ ) 附近的解

Fig 1 Solutions near discontinuous location ( $x = 0.5$ ) of various schemes solving Burgers equation

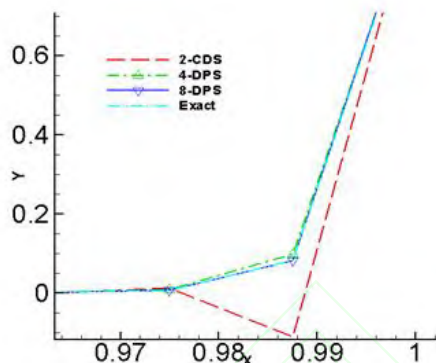


图 2 一维线性对流扩散方程, 诸格式在边界  $x = 1.0$  附近的解

Fig 2 Solutions near boundary  $x = 1.0$  of Various schemes solving 1-D linear convective diffusion equation

表 4 2-CDS, 4-DPS 和 8-DPS 计算二维对流扩散方程的最大误差  $L_\infty$  和均方根  $L_2$  误差

Table 4 Maximum error  $L_\infty$  and mean square root error  $L_2$  of 2CDS, 4DPS 和 8DPS solving 2-D convective diffusion equation

N*N	Error	2-CDS	4DPCS	8-DPCS
10*10	$L_\infty$	—	0.16584	5.35478e-3
	$L_2$	—	5.57123e-1	4.38512e-4
20*20	$L_\infty$	—	7.10012e-1	8.12541e-5
	$L_2$	—	6.32148e-2	7.06837e-6
50*50	$L_\infty$	28.2941	6.16652e-2	6.67173e-7
	$L_2$	2.81677	5.89201e-3	6.03354e-8
100*100	$L_\infty$	7.23446	4.108e-3	2.87218e-9

	$L_2$	0.719067	3.80151e-4	3.13308e-10
--	-------	----------	------------	-------------

#### 4 讨论

4.1 重构扩散离散格式的意义和用途：上文通过数值摄动重构扩散离散二阶中心格式，构建出对流扩散方程的高精度不振荡三结点中心差分格式。该法显然不同于构建高精度不振荡格式的常用方法。常用方法提高格式精度需扩充（增加）结点或引入结点导数作新的待求量（紧致方法）；构建不振荡格式则采用人工粘性、通量限制器等调控数值耗散、数值色散的人工光滑化技术；常用方法中三结点不振荡格式的精度不会超过二阶，构建高精度本质不振荡格式的有效方法是 ENO 方法，即根据各阶差商绝对值极小的选择原则逐次扩展结点模板的方法。特别也应提到，常用方法都处理和重构对流离散格式，不处理扩散离散格式。本文数值摄动重构扩散

$$\frac{\gamma}{\Delta x^2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} R_{\Delta x} G_i^+\right) \varphi_{i+1} - \left[2 - \frac{1}{2} R_{\Delta x} (G_i^+ - G_i^-)\right] \varphi_i + \left(1 + \frac{1}{2} R_{\Delta x} G_i^-\right) \varphi_{i-1} \right\} = 0 \quad (17)$$

其中  $G_i^-$  和  $G_i^+$  分别是上游和下游数值摄动重构函数，它们都是网格 Reynolds 数  $R_{\Delta x}$  的简单多项式，即

$$G_i^\pm = 1 \mp \frac{1}{6} R_{\Delta x} \pm \frac{1}{360} R_{\Delta x}^3 \mp \frac{1}{3 \times 7!} R_{\Delta x}^5 \pm \frac{3}{5 \times 9!} R_{\Delta x}^7 \mp \frac{5}{3 \times 11!} R_{\Delta x}^9 \quad (18)$$

类似地，扩散摄动重构格式 DPS (9) 亦可写成

$$\frac{\gamma}{\Delta x^2} \left[ \left(G_d - \frac{1}{2} R_{\Delta x}\right) \varphi_{i+1} - 2G_d \varphi_i + \left(G_d + \frac{1}{2} R_{\Delta x}\right) \varphi_{i-1} \right] = 0 \quad (19)$$

通过比较，不难发现

$$G_d - \frac{1}{2} R_{\Delta x} = 1 - \frac{1}{2} R_{\Delta x} G_i^+, \quad G_d + \frac{1}{2} R_{\Delta x} = 1 + \frac{1}{2} R_{\Delta x} G_i^- \quad (20)$$

$$G_d = 1 - \frac{1}{4} R_{\Delta x} (G_i^+ - G_i^-), \quad G_i^+ + G_i^- = 2 \quad (21)$$

由上述关系 (17) - (21) 可知，二阶中心差分格式 (2-CDS) 的扩散摄动重构格式 (DPS) (9) 或 (19) 与 2-CDS 的对流摄动重构格式 CPS (17) 完全一致。这就是说，DPS (9) 或 (19) 竟然把下游不影响上游的对流运动规律也“吸收”了进来，粗看有点奇怪，其实不论扩散格式摄动重构还是对流格式摄动重构本质上都是扩散格式和对流格式相耦合的摄动重构，构建 DPS 和 CPS 的所有数学运算都是对方程的摄动重构格式的运算。因此 DPS “包含”下游不影响上游的对流运动规律，CPS “包含”物理粘性使扩散量分布光滑化扩散运动规律，DPS (9) 或

离散格式的结果表明：重构扩散格式同样是构建高精度不振荡格式的有效方法，且在三结点的条件下，重构扩散格式可获得既是高精度又不振荡的中心差分格式；该法的物理本质是把物理粘性使扩散量分布光滑化的扩散运动规律耦合进二阶中心差分格式 (2-CDS)。可以想像，既然调控格式数值耗散的人工光滑化处理可使格式不振荡，那么利用物理耗散本身调控格式的数值耗散和数值色散，同样可使格式不振荡。

4.2 重构扩散格式与重构对流格式的关系：作者已通过上、下游分裂双重数值摄动重构对流格式，构建出对流扩散方程的高精度不振荡三结点中心差分格式 [12]，简称对流摄动格式 (CPS)，具体写出为 [12]：

(19) 与 CPS (17) 完全一致，应当是必然的结果。DPS 与 CPS 相同的结论，上面只证明了直到 12 阶精度结论成立，精度高于 12 阶时结论依然成立，不过由于高于 12 阶精度的 DPS 缺乏实际价值，故不再考虑。

4.3 上、下游重构与上、下游分裂及格式的迎风问题：由对流摄动重构格式 CPS (17) 可知，对流格式的上、下游间断摄动重构，实际上扩散格式也被作了上、下游间断摄动重构。由此可以推知，扩散格式的摄动重构同样可对上游和下游分别进行重构，此时 2-CDS 的扩散摄动重构格式 (DPS) 应为

$$\frac{u_i}{2\gamma} \Delta x (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) = G_d^+ (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + G_d^- (\varphi_{i-1} - \varphi_i) \quad (22)$$

$$G_d^\pm = 1 + \sum_{n=1} d_n^\pm \Delta x^n \quad (23)$$

把  $G_d^\pm$  式 (23) 代入 DPS (22), 把  $\varphi_{i\pm 1}$  对  $i$ - 结点取 Taylor 展开, 令 DPS (22) 修正微分方程中  $\Delta x^n (n=1,2,3,\dots)$  的系数为零即可求出诸系数  $d_n^\pm$ , 因而求得上、下游摄动重构函数  $G_d^-$  和  $G_d^+$ , 发现

$$G_d^+ = G_d^- = G_d \quad (24)$$

可见, 不仅摄动重构对流格式可采用符合对流运动规律的上游和下游分裂重构, 而且对扩散格式同样可进行上游和下游的分裂重构, 证实上、下游分裂是构建高级离散格式的一种有效方法。在计算流体力学离散格式设计中, 空间分裂是常用的方法, 但上、下游分裂并不多见。上、下游分裂方法的好处是: 不仅对三结点且对多结点 (如五结点格式 [13, 14]) 该法均可把下游不影响上游的对流运动规律引入格式之中, 构建成高精度不振荡迎风 and 中心格式, 参见本文和文 [13, 14]。应当强调, 常说的多结点迎风格式, 如五结点三阶迎风格式, 其实它并非真正迎风, 因为  $\varphi_{i\pm 1}$  同时包含在  $u_i > 0$  和  $u_i < 0$  的格式中, 因此格式具有中心格式特性, 只有  $\varphi_{i+2}$  和  $\varphi_{i-2}$

分别包含在  $u_i > 0$  和  $u_i < 0$  的格式中, 它合理的称呼是五结点偏心格式, 这就是它为条件稳定模式的物理原因。上述情况说明: 只有对上游和下游格式分别进行摄动重构, 即间断数值摄动重构, 也就是只有上、下游分裂方法, 才能构建出三结点和更多结点 (如五结点) 高精度不振荡格式, 这是真正的物理意义上的迎风格式。特别是间断数值摄动重构通过对上游和下游格式修正微分方程的数值运算获得重构格式的高精度不振荡性质, 既不需要也不可能添加人工粘性, 既不需要也不可能使用限制器, 这是间断数值摄动算法比间断加辽金 (DG) 算法 (该

法添加人工粘性或使用限制器) 和 WENO 格式 (该格式使用限制器) 优越的地方; 同时说明上、下游分裂方法是重构 CFD 高精度不振荡格式的一个十分有效的新方法, 值得发展和使用。

4.4 扩散摄动格式 (DPS) 的数值耗散和色散特性: 分析 DPS (9) 修正微分方程余项表明: DPS 为耗散格式, 数值色散项为零。故 DPS 为耗散占优格式, 对 4 阶、8 阶和 12 阶精度 DPS(9), 它们的数值耗散主项为正, 因此它们为绝对稳定格式。因此说明: 摄动重构扩散格式, 即利用物理耗散可以调控 DPS 的数值耗散和数值色散, “消除掉” 数值色散, 并使部分精度阶的数值耗散主项对网格 Reynolds 数  $R_{\Delta x}$

的任意值均为正, 保证了格式高精度不振荡。

### 五 结束语

对于计算流体力学 (CFD) 高精度高分辨率计算格式的构建, 数值摄动算法通过引入对流运动规律或 “扩充” 扩散运动规律和对数值摄动重构格式本身的数学运算使格式高精度化和不振荡化, 因此是与增加结点, 使用限制器等人为调控数值耗散和数值色散的常见构建方法不同的新型方法。摄动法与常见方法相比, 优点是格式结构简洁, 使用结点少; “扩充” 扩散运动规律即使用物理耗散的摄动重构格式与引入对流运动规律的上、下游间断摄动重构格式相比, 优点是引入的摄动重构函数成倍减少, 特别是源项的摄动重构函数  $G_f = 1$ 。  $G_f = 1$  意味着

二维或三维对流扩散方程的扩散摄动重构, 在其进行空间分裂运算时可能引入的未知的交叉作用项。在二维或三维摄动模式的导出过程中将被消除, 因此二维或三维对流扩散方程的扩散摄动模式就是二个或三个一维扩散摄动模式的简单即直接相加, 这无疑也是一个很有用的性质。此外, 对离散方程的数值摄动重构运算, 不仅能提高模式的精度和稳健度, 且可揭示对流离散运动规律与扩散离散运动规律之间的内在关联; 因此在 Euler 方程和 NS 方程高精度高分辨率模式的构建中十分有用, 值得进一步研究和发展。

— — 收到第 1 稿, — — 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金资助项目 (10872204)

2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn



### 参考文献

- [1] Chung T J. Computational Fluid Dynamics (Second Edition), Cambridge University Press, 2010
- [2] Laney C B. Computational Gasdynamics, Cambridge University Press, 1998
- [3] Von Neuman J, Richtmyer R D. A method for numerical calculation of hydrodynamic shock J. Applied Phys. 1950 21: 232-257
- [4] Jameson A, Schmidt W. Turkel E. Numerical solutions of Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. AIAA paper 81-1259, 1981
- [5] Godunov S K. A difference method for the numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations Math. Sobrnik 47:271-306 1959
- [6] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws J. Comput Phys 49:357-393 1983
- [7] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III Jour. Comput. Phys 71:231-303 1987
- [8] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. J. Comput. Phys 1994 115:200-212
- [9] 高智 对流扩散方程的高精度差分方法 北京计算流体力学讨论会文集 (第六辑, 1-23 页) 中国科学院力学研究所 1994(Gao Zhi. Higher-Order accuracy difference algorithm for the convective diffusion equation. In: Proc. Of Beijing Workshop on computation Fluid Dynamics Vol.6 pp.1-23, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 1994(in Chinese))
- [10] 高智. 对流扩散方程的摄动有限体积方法. 第十一届全国计算流体力学会议论文集(38-45 页), 2002, 河南洛阳 (Gao Zhi. Perturbational Finite Volume Method for the Convective diffusion equation. In: Proc. Of 11th National Conference for Computation Fluid Dynamics, pp.38-45,2002 Luoyang, Henan (in Chinese))
- [11] 高智 数值摄动算法及其 CFD 格式 力学进展 2010, 40(6) 607-633 (Gao Zhi. Numerical perturbation algorithm and its CFD schemes. Advances in Mechanics, 2010, 40(6):607-633(in Chinese ))
- [12] 高智 对流扩散方程的绝对稳定高阶三结点中心差分格式, 力学学报 2010, 42(5) 811-817 (Gao Zhi. Two absolute stability, higher order central difference schemes for the convective diffusion equation. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010 42(5):811-817 (in Chinese) )
- [13] 朱可, 李明军 对流扩散方程 QUICK 格式的数值摄动高精度重构格式 力学学报, 2011, 43(1), 55-62 (Zhu Ke, Li Mingjun. Numerical perturbation higher-order accurate reconstruction of QUICK scheme for the convective diffusion equation. Acta Mechanica Sinica (in Chinese))
- [14] 杨满叶, 舒适, 李明军. 对流扩散方程的三阶迎风格式的数值摄动高精度重构 水动力学研究与进展, A 辑, 2010.1, 25(3):307-315. (Yang Manye, Zhu Shi, Li Mingjun. Numerical perturbation higher-order accurate reconstruction of third-order upwind difference scheme for the convective diffusion equation. Jour. Hydrodynamics Ser. A 2010, 25(3):307-315 (in Chinese))
- [15] Gao Zhi, Numerical perturbation algorithm and two absolute positive higher-order accurate central finite-volume schemes for the convective diffusion equation. In: Proc. of 8th Asian Computational Fluid Dynamics Conference, Jan, 2010, HongKong.

CNKI 优先出版编码: lxxb2011-157-20111124

— — 收到第 1 稿, — — 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目(10872204)

2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn

# Higher order accurate, non oscillatory, three nodes central difference scheme for the convective diffusion equation constructed by using physical viscosity<sup>1)</sup>

Gao Zhi<sup>2)</sup>

(State Key Laboratory of High Temperature Gasdynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,

Beijing 100190, China)

**Abstract:** Several higher-order accurate, non-oscillatory, three-nodes central difference schemes for the convective-diffusion equation are given by perturbationally reconstructing the diffusion scheme in the second-order accurate central difference scheme(2-CDS). Excellent properties of higher-order accurate and high resolution of the present new schemes(call them diffusion perturbation scheme, DPS) are verified by analyses and three numerical tests which include one-dimensional linear and non-linear and two-dimensional convective-diffusion equation. In all numerical tests, the 2-CDS oscillates and diverges on coarse grids, while part of DPS do not oscillates and can capture discontinuities with high resolution. The mean square root L2 errors of all DPS are greatly less than those of 2-CDS in all numerical tests. The DPS are results of introducing diffusion-motion law(i.e. physical viscosity smoothing out space-distribution of diffusion quantities) into 2CDS. The present method is obviously different from the well-known those of constructing high-order accurate and high resolution schemes. In addition, we prove that DPS are completely consistent with those result scheme of introducing convection-motion law(i.e. law of that the downstream does not affect the upstream) into 2-CDS, that show that the perturbational operation to 2CDS not only raise scheme's accurate and stability but also reveal intrinsic relation between the convective discrete scheme and diffusion discrete scheme and that the upstream-downstream splitting is a very useful method for reconstructing high-order accurate, high resolution CFD scheme without artificial viscosity or limiter.

**Key words:** computational fluid dynamics, numerical perturbation algorithm, high-order accurate and non-oscillatory scheme, convection-diffusion equation

---

Received \_\_\_\_\_, Revised \_\_\_\_\_

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10872204)

2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn