

# 单轴拉伸下剪切带的应变梯度理论预测

陈少华\* 冯彪

中国科学院力学研究所 LNM 室, 北京, 100190

**摘要** 本文主要应用一种简化的塑性应变梯度理论分析了拉伸载荷作用下, 韧性材料内部塑性流动局部化现象, 主要通过塑性应变梯度理论预测剪切带初始形成厚度及剪切带倾斜角度。简化的应变梯度理论包括两部分: 一部分是 Fleck 和 Hutchinson 于 1993 年提出的考虑转动梯度影响的偶应力-应变梯度理论, 另一部分是 Chen 和 Wang 于 2000 年提出的考虑拉伸梯度影响的硬化关系。应用简化的塑性应变梯度理论, 结合分叉分析的方法, 解析预测了剪切带初始形成厚度、应变率分布及剪切带倾斜角度。最终发现: 剪切带内部的应变率分布极不均匀, 且在剪切带中心达到最大值; 初始形成厚度不仅与材料内禀长度相关, 亦依赖于材料常数, 如材料的屈服强度、最终拉伸强度、硬化及软化模量; 最可能形成的倾斜角度与实验观察基本一致。本文结果对工程中预测塑性流动局部化引起材料破坏的初始信息具有一定的帮助。

**关键词** 塑性流动局部化, 剪切带初始厚度, 倾斜角度, 塑性应变梯度理论

## 1 引言

大量的实验发现, 当金属材料的特征尺度到达微米或亚微米量级, 材料力学行为呈现出非常明显的尺寸效应, 即材料的力学行为与尺寸相关。而经典理论预测的材料力学行为与尺度并无关系。针对这些新的实验现象, 经典理论由于不包含任何长度尺度, 并不能预测这种微尺度力学行为的尺寸相关现象。考虑应变梯度效应的应变梯度理论将宏观尺度的连续介质理论拓展到微米尺度的适用范围, 引入了材料内禀长度, 成为预测材料微尺度力学行为的主要理论工具。

另一种涉及长度尺度的实验现象是金属材料的剪切带局部化。同样由于不包含长度尺度, 经典理论并不能预测剪切带的厚度。局部化剪切带的数值模拟亦会出现网格依赖或对本构关系高度敏感的问题。

应变梯度理论已经被应用研究塑性流动局部化现象<sup>[1-6]</sup>, 然而这些研究主要分析了纯剪切载荷模型。另一方面, Oda & Kazama<sup>[7]</sup>发现剪切带形成与颗粒柱体通过颗粒转动而非滑动引起的屈曲一致。剪切带内部的颗粒转动是单向、非均匀的<sup>[8]</sup>, 因此转动梯度项变得非常重要, 不能忽略。Oda & Iwashita<sup>[9]</sup>通过数值和实验证明, 剪切带内部微观结构的形成和发展过程, 很小的偶应力发挥重要的作用。然而, 至今还没有考虑偶应力对剪切带形成及其厚度影响的理论分析工作。

---

\* 作者 E-mail: chenshaohua72@hotmail.com

本文将试图回答的几个问题是:转动梯度项在预测金属材料局部剪切带厚度时的影响?影响剪切带倾斜角度的主要因素有哪些?剪切带的倾斜角度和材料常数是否影响剪切带的厚度?是否存在一个最可能形成剪切带的角度?

## 2 一种简化的应变梯度理论

Chen & Wang<sup>[10]</sup>提出的塑性应变梯度理论,将其中的微观转动矢量等同于物质转动矢量,一般偶应力理论则简化为 Fleck & Hutchinson<sup>[11]</sup>的偶应力-应变梯度理论(CS),结合 Chen & Wang<sup>[12]</sup>提出的应变梯度硬化(软化)关系,形成本文的简化应变梯度理论。

在CS理论中,应变能密度依赖于应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和转动梯度张量 $\boldsymbol{\chi}$ 。对于不可压缩材料,应变能密度增量形式可以写为

$$\delta w = \Sigma_e \delta E_e = \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{m} : \delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{s} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{m} : \delta \boldsymbol{\chi} \quad (1)$$

式中,  $\Sigma_e$  为广义等效应力,与广义等效应变  $E_e$  功共轭,其中

$$E_e^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_e^2 + l_{cs}^2 \boldsymbol{\chi}_e^2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e^2 = \frac{2}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \boldsymbol{\chi}_e^2 = \frac{1}{2} (\chi_{i,j} + \chi_{j,i}) \quad (2)$$

$$\Sigma_e = (\boldsymbol{\sigma}_e^2 + l_{cs}^{-2} \boldsymbol{m}_e^2)^{1/2}, \quad \boldsymbol{\sigma}_e^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad \boldsymbol{m}_e^2 = \frac{3}{2} m_{ij} m_{ij} \quad (3)$$

$\boldsymbol{m}$  为偶应力张量,  $l_{cs}$  是转动梯度相关的内禀材料长度,  $\boldsymbol{s}$  为应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  的偏量部分。微观转动矢量  $\boldsymbol{\omega}$  与位移数量  $\boldsymbol{u}$  的关系、转动梯度张量  $\boldsymbol{\chi}$  及等效转动梯度分别定义为

$$\omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j}, \quad \chi_{ij} = e_{its} \varepsilon_{js,t}, \quad \chi_e^2 = \frac{2}{3} \chi_{ij} \chi_{ij} \quad (4)$$

于是,偏应力张量  $\boldsymbol{s}$  和偶应力张量  $\boldsymbol{m}$  可写为

$$s_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{2}{3} \frac{\Sigma_e}{E_e} \varepsilon_{ij}, \quad m_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \chi_{ij}} = \frac{2}{3} \frac{\Sigma_e}{E_e} l_{cs}^2 \chi_{ij} \quad (5)$$

考虑拉伸应变梯度的硬化(软化)关系为<sup>[12]</sup>

$$\dot{\Sigma}_e = A'(E_e) \left( 1 + \frac{l_1 \eta_1}{E_e} \right)^{1/2} \dot{E}_e = B(E_e, l_1 \eta_1) \dot{E}_e \quad (6)$$

其中,  $B(E_e, l_1 \eta_1)$  为包含拉伸应变梯度效应的新函数,  $l_1$  是拉伸应变梯度相关的内禀材料长度,  $\eta_1$  为等效拉伸应变梯度,定义为  $\eta_1 = (\eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)})^{1/2}$ <sup>[13]</sup>。

平衡方程为<sup>[10-11]</sup>

$$\sigma_{ij,j} + \tau_{ij,j} = 0 \quad (7)$$

其中  $\tau_{ij}$  为柯西应力的反对称部分,与偶应力的关系如下

$$\tau_{jk} = e_{ijk} m_{ip,p} / 2 \quad (8)$$

边界条件表示为<sup>[10-11]</sup>

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} \end{cases} \quad (9)$$

### 3 单轴拉伸下的塑性流动局部化

图 1 所示为本文的平面应力拉伸模型：一个无限大薄板受远处均匀应力  $\sigma^\infty$  的拉伸作用，板初始发生均匀变形，直至最终拉伸强度  $\sigma_u$ ，倾斜角度  $\theta$  的剪切带出现。剪切带外部将发生弹性卸载，同时剪切带内部发生软化。剪切带外部应变减小，而内部应变增大。假设单轴拉伸应力-应变关系满足

$$\begin{cases} \Sigma_e = 3GE_e, & 0 \leq E_e \leq \frac{\sigma_y}{3G} \\ \Sigma_e = \sigma_y + 3G_l \left( E_e - \frac{\sigma_y}{3G} \right), & \frac{\sigma_y}{3G} \leq E_e \leq \frac{\sigma_y}{3G} + \frac{\sigma_u - \sigma_y}{3G_l} \\ \Sigma_e = \sigma_u + 3G_s \left( E_e - \frac{\sigma_y}{3G} - \frac{\sigma_u - \sigma_y}{3G_l} \right), & E_e \geq \frac{\sigma_y}{3G} + \frac{\sigma_u - \sigma_y}{3G_l} \end{cases} \quad (10)$$

其中  $G$ ， $G_l$  和  $G_s$  分别为弹性、线性硬化及软化剪切模量。

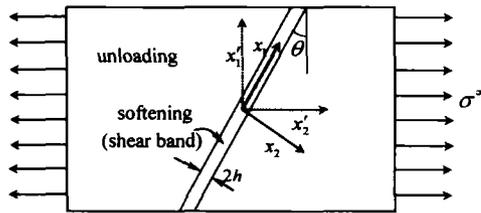


图 1 无限大薄板受远处均匀拉应力作用，而产生倾斜角度为  $\theta$ 、厚度为  $2h$  的剪切带

如图 1 所示坐标系  $(x_1, x_2)$  中，速度场可合理假设为<sup>[14]</sup>

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\dot{\sigma}^\infty}{6G} (3 \sin^2 \theta - 1) x_1 + k_1(x_2) \\ v_2 = \frac{\dot{\sigma}^\infty}{4G} \sin(2\theta) x_1 + k_2(x_2) \end{cases} \quad (11)$$

其中  $k_1(x_2)$  和  $k_2(x_2)$  为  $x_2$  的未知函数。

根据上式最终可进一步得到剪切带内外都满足的增量形平衡方程，

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{12} + \dot{\tau}_{12} = \frac{\dot{\sigma}^\infty}{2} \sin 2\theta \\ \dot{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}^\infty \cos^2 \theta \end{cases} \quad (12)$$

#### 3.1 剪切带外的分叉分析

在达到最终拉伸强度时，剪切带开始形成，我们分别对剪切带内外进行分析。需要注意的是：在剪切带起始时刻，应变场保持均匀，而应变率场非均匀，即  $\eta_1 = 0$ ， $\dot{\eta}_1 \neq 0$ ， $\chi_e = 0$ ， $\dot{\chi}_e \neq 0$ ，剪切带外的材料发生弹性卸载，广义等效应力和广义等效应变的关系为

$$\Sigma_e = \sigma_u + 3G \left( E_e - \frac{\sigma_y}{3G} - \frac{\sigma_u - \sigma_y}{3G_t} \right) \quad (13)$$

而考虑拉伸梯度影响的软化关系为

$$\dot{\Sigma}_e = 3G\dot{E}_e \left( 1 + \frac{l_1\eta_1}{E_e} \right)^{1/2} \quad (14)$$

进一步得到剪切带外材料的柯西应力对称和非对称分量。结合平面应力条件，可合理假设  $\dot{\sigma}_{33} = 0$ ，进而给出剪切带外的平衡方程

$$A_1 \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\sigma_u}{3\varepsilon_u} I_{cs}^2 \dot{\varepsilon}_{12,22} = B_1 \quad (15)$$

其中系数为

$$\begin{cases} A_1 = \frac{2\sigma_u G_t G \left[ 3(\cos^4 \theta + \sin^2 2\theta)(\sigma_u - \sigma_y)(G - G_t) + 4\sigma_u G_t \right]}{\left[ G_t \sigma_y + G(\sigma_u - \sigma_y) \right] \left[ 3\cos^4 \theta (\sigma_u - \sigma_y)(G - G_t) + 4\sigma_u G_t \right]} \\ B_1 = \frac{\dot{\sigma}^\infty G_t \sigma_u \left\{ \begin{aligned} &\sigma_y (G - G_t)(9\sin 6\theta - 12\sin 4\theta - 51\sin 2\theta) \\ &+ \sigma_u \left[ (51G + 13G_t)\sin 2\theta - (9\sin 6\theta - 12\sin 4\theta)(G - G_t) \right] \end{aligned} \right\}}{32 \left[ G_t \sigma_y + G(\sigma_u - \sigma_y) \right] \left[ 3\cos^4 \theta (\sigma_u - \sigma_y)(G - G_t) + 4\sigma_u G_t \right]} \end{cases} \quad (16)$$

平衡方程(15)的解可写为

$$\dot{\varepsilon}_{12} = B_1 / A_1 + A e^{-\xi x_2} + B e^{\xi x_2} \quad (17)$$

其中

$$B_1 / A_1 = \frac{\dot{\sigma}^\infty \sin 2\theta}{4G}, \quad \xi = \sqrt{\frac{3\varepsilon_u A_1}{\sigma_u I_{cs}^2}} \quad (18)$$

考虑边界条件  $x_2 \rightarrow +\infty$ ，有  $\dot{\varepsilon}_{12} \rightarrow \dot{\sigma}^\infty \sin(2\theta)/(4G)$ ，可以得到  $B = 0$ 。在剪切带边界处，广义等效应变率必须连续，即  $\dot{E}_e|_{x_2=h} = 0$ ，于是

$$A = \frac{\dot{\sigma}^\infty}{e^{-\xi h}} \left[ \frac{1}{48G} \left( 4\tan\theta - 9\sin 2\theta - 12\sin^2\theta \tan\theta - \frac{6\sigma_y \cos^2\theta \cot\theta}{\sigma_u} - 2\cot\theta \right) + \frac{1}{8G_t} \left( \frac{\sigma_y \cot\theta \cos^2\theta}{\sigma_u} - \cos^2\theta \cot\theta \right) \right] \quad (19)$$

### 3.2 剪切带内的分叉分析

剪切带内的广义等效应力  $\Sigma_e$  与广义等效应变  $E_e$  的关系为

$$\Sigma_e = \sigma_u + 3G_s(E_e - \varepsilon_u), \quad G_s < 0 \quad (20)$$

而拉伸梯度影响的软化关系为

$$\dot{\Sigma}_e = 3G_s \dot{E}_e \left( 1 + \frac{l_1\eta_1}{E_e} \right)^{1/2} \quad (21)$$

同样得到剪切带内的平衡方程

$$A_2 \dot{\epsilon}_{12} - \frac{\sigma_u}{3\epsilon_u} l_{cs}^2 \dot{\epsilon}_{12,22} = B_2 \quad (22)$$

其中

$$\begin{cases} A_2 = \frac{2\sigma_u G_t G_s \left\{ 3\sigma_y G_s [(G_t - G)(\sin^2 2\theta + \cos^4 \theta)] \right.}{\left. [G_t \sigma_y + G(\sigma_u - \sigma_y)] [3(G_t - G)G_s \sigma_y \cos^4 \theta + 4GG_t \sigma_u + 3G\sigma_u \cos^4 \theta (G_s - G_t)] \right\}} \\ B_2 = \frac{\dot{\sigma}^\infty G_t \sigma_u \left\{ \begin{aligned} & -64G \sin 2\theta + [9 \sin 6\theta + 13 \sin 2\theta - 12 \sin 4\theta](G_s - G_t) \end{aligned} \right\} G\sigma_u}{-32 [G_t \sigma_y + G(\sigma_u - \sigma_y)] [3(G_t - G)G_s \sigma_y \cos^4 \theta + 4GG_t \sigma_u + 3G\sigma_u \cos^4 \theta (G_s - G_t)]} \end{cases} \quad (23)$$

a) 如果系数  $A_2$  满足  $A_2 < 0$ ，方程 (22) 的解为

$$\dot{\epsilon}_{12} = \frac{B_2}{A_2} + C \cos \eta x_2 + D \sin \eta x_2, \quad \eta = \sqrt{\frac{-3\epsilon_u A_2}{\sigma_u l_{cs}^2}} \quad (24)$$

关于剪切带中心对称必须满足  $\dot{E}_{e,2} = 0$ ，得到  $D = 0$ 。 $\dot{\epsilon}_{12}$  在剪切带边界处连续，即  $\dot{\epsilon}_{12}|_{x_2=h-0} = \dot{\epsilon}_{12}|_{x_2=h+0}$ ，得到

$$C = \left( \frac{B_1}{A_1} + Ae^{-\epsilon h} - \frac{B_2}{A_2} \right) / \cos \eta h \quad (25)$$

剪切带边界处偶应力连续条件要求  $\dot{\epsilon}_{12,2}|_{x_2=h-0} = \dot{\epsilon}_{12,2}|_{x_2=h+0}$ ，可以解析得到剪切带厚度为

$$h = \left[ \pi + \arctan \left( \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} A_3 \right) \right] / \eta, \quad A_3 = \frac{Ae^{-\epsilon h}}{C \cos \eta h} \quad (26)$$

b) 如果系数  $A_2$  满足  $A_2 \geq 0$ ，方程 (22) 无解。

## 4 数值分析

对于给定的材料，数值分析发现确实总存在一定区域的角度，使得系数  $A_2$  为负值。此区域的角度称为可能形成剪切带的角度。我们分别研究了线性硬化模量、线性软化模量及最终拉伸强度与屈服强度的比值对剪切带初始形成厚度的影响。发现软化模量对剪切带厚度的影响远比硬化模量的影响明显，材料最终拉伸强度与屈服强度的比值对剪切带初始厚度的影响并不显著。由于篇幅关系，具体可以参见文献[14]。

图 2 给出广义等效应变率  $3G\dot{E}_e / |\dot{\sigma}^\infty|$  在剪切带内外的分布。假设线性硬化切向模量为  $G_t = G/2$ ，软化切向模量  $G_s = -G/4$ ，最终强度与屈服强度比值为  $\sigma_u / \sigma_y = 1.5$  以及剪切带倾斜角度  $\theta = \pi/5$ 。可以看出广义等效应变率在剪切带内部从边界处的 0 单调增加到中心处最大值；而剪切带外部的广义等效应变率从边界处的 0 逐渐变化到远离剪切带边界的均匀

场。剪切带内部广义等效应变率非均匀，且最大值远大于均匀场的值，具有明显的塑性流动局部化。

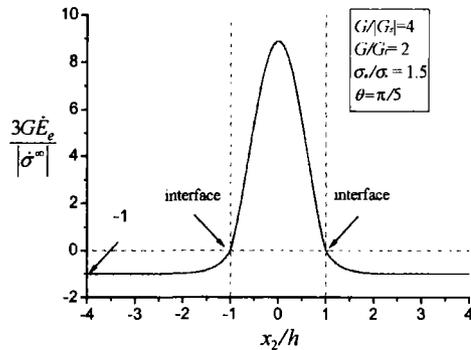


图2 广义等效应变率在剪切带内外的分布

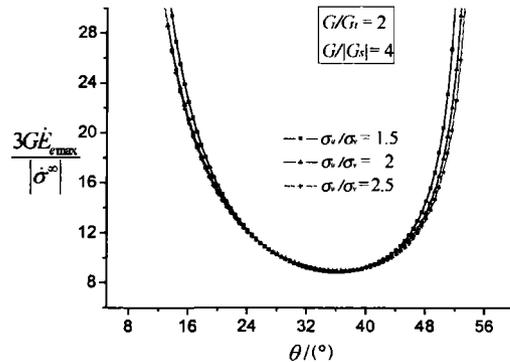


图3 所有可能角度的最大广义等效应变率

给定  $G_s = -G/4$ ,  $G_t = G/2$ , 图3给出了不同  $\sigma_u/\sigma_y$  下每一个可能倾斜角  $\theta$  处最大广义等效应变率  $3G\dot{\epsilon}_{e,max}/|\dot{\sigma}^\infty|$ 。可以发现最大广义等效应变率随可能倾斜角先降低，再在一个较小范围内趋于常数，然后随可能倾斜角度增大而增大。而  $\sigma_u/\sigma_y$  取值对广义等效应变率影响有限。对于图3给定材料，最可能形成剪切带的角度对应着最大广义等效应变率在所有可能角度中的最小值，因为此角度对应的最大广义等效应变率首先达到。图3中最可能形成剪切带的角度近似为  $37^\circ$ 。

## 5 结论

应用一种简化塑性应变梯度理论，分析了单轴拉伸下剪切带初始形成厚度及可能的剪切带倾斜角度，得到解析理论结果。广义等效应变率在剪切带内表现出强烈的非均匀性，在剪切带中心达到最大，且是远处均匀应变率的几十倍，表现出明显的塑性流动局部化。材料软化模量对剪切带初始厚度的影响远比线性硬化模量的影响明显，且材料最终拉伸强度与屈服强度的比值对剪切带初始厚度的影响并不显著。最可能形成剪切带的方向对应于所有可能角度中最大等效应变率取最小值的角度，与实验观察定性一致<sup>[15-16]</sup>。本文的结果可为工程预测真实金属材料发生初始塑性流动局部化的厚度及倾斜角度提供借鉴。

## 致谢

感谢国家自然科学基金项目（项目编号：10972220，10732050 及 11021262）的资助。

## 参考文献

1. Aifantis E C. On the microstructural origin of certain inelastic models. *Trans ASME J Eng Mater Tech*, 1984, 106: 326~330
2. Aifantis E C. The physics of plastic deformation. *Int J Plast*, 1987, 3: 211~247
3. Zbib H M, Aifantis E C. On the gradient-dependent theory of plasticity and shear banding. *Acta Mech*, 1992, 92: 209~225
4. Fleck N A, Hutchinson J W. A discussion of strain gradient plasticity theories and application to shear bands. *The international symposium on material instabilities in solids, Netherlands*, 1998
5. Shi M X, Huang Y, Hwang K C. Plastic flow localization in mechanism-based strain gradient plasticity. *Int J Mech Sci*, 2000, 42: 2115~2131
6. Shi Z, Huang Y, Song J, Hwang K C, Li M. Study of plastic shear Localization via the flow theory of mechanism-based strain gradient plasticity. *J Eng Mech -ASCE*, 2009, 135: 132~138
7. Oda M, Kazama H. Microstructure of shear bands and its relation to the mechanisms of dilatency and failure of dense granular soils. *Geotechnique*, 1998, 48: 465~481
8. Gardiner B S, Tordesillas A. Micromechanics of shear bands. *Int J Solids Struct*, 2004, 41: 5885~5901
9. Oda M, Iwashita K. Study on couple stress and shear band development in granular media based on numerical simulation analyses. *Int J Eng Sci*, 2000, 38: 1713~1740
10. Chen S H, Wang T C. Strain gradient theory with couple stress for crystalline solids. *Eur J Mech A-Solids*, 2001, 20: 739~756
11. Fleck N A, Hutchinson J W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41: 1825~1857
12. Chen S H, Wang T C. A new hardening law for strain gradient plasticity. *Acta Mater*, 2000, 48: 3997~4005
13. Smyshlyaev V P, Fleck N A. The role of strain gradients in the grain size effect for polycrystals. *J Mech Phys Solids*, 1996, 44: 465~495
14. Chen S H, Feng B, Wei YG, Wang TC. Prediction of the initial thickness of shear band localization based on a reduced strain gradient theory. *Int J Solids Struct*, 2011, (in press)
15. Donovan P E. Compressive deformation of amorphous Pd40Ni40p20. *Materials Science and Engineering*, 1988, 98: 487~490
16. Volkert C A, Donohue A, Spaepen F. Effect of sample size on deformation in amorphous metals. *J Appl Phys*, 2008, 103: 083539