

# 平面加载条件下材料失稳行为研究

马 维\* 李相旺

中国科学院力学研究所, 北京, 100190

**摘 要** 本文研究平面加载条件下材料的失稳行为。应用线性摄动方法, 通过严格的数学推导得到材料失稳的一般准则。该准则物理意义上表示平面加载条件下材料热软化效应大于应变硬化效应时材料发生失稳。考虑了剪应力、正应力、热传导效应和应变率敏感性等因素对材料失稳行为的影响。失稳形式可以是局部热软化失稳, 也可以是非局部的热软化失稳或者长时稳态的塑性流动变形。基于该一般准则, 得到了四种特殊加载状态下的失稳准则。应用失稳相图清晰地刻画了材料在平面应变加载条件下的失稳行为。表明材料失稳形式取决于剪切变形和拉压变形的塑性耗散功率的相对比值。

**关键词** 复合应力, 失稳准则, 热软化, 应变硬化, 非局部热软化失稳

## 1 引言

作为破坏的先兆, 材料在外载荷作用下可能发生失稳。即应力或载荷强度迅速减小, 而应变或变形持续增大。如简单剪切加载条件下材料发生的局部热软化失稳, 即剪切带失稳。单向拉伸加载条件下材料会发生颈缩失稳, 简单压缩加载条件下材料会发生压缩灾变失稳现象。长期以来人们对材料失稳现象开展了广泛研究<sup>[1-5]</sup>。这些早期工作中, Bai<sup>[2]</sup>采用一维摄动分析方法对材料绝热剪切局部失稳现象进行了较透彻的分析。其他人的工作<sup>[3-5]</sup>主要涉及失稳现象的数学表述和理论分析, 较少描述材料失稳行为的物理图像。平面加载条件下材料失稳是一普遍现象。开展相关课题研究, 进一步深入认识复合应力引起的材料失稳机制的物理实质是十分必要的。

本文应用线性摄动方法研究平面应变状态下材料的失稳行为。首先建立平面应变条件下材料失稳的物理模型。然后给出模型相应的数学描述, 即相关的控制方程。之后对控制方程进行线性摄动分析, 由此建立平面应变条件下材料失稳的准则。通过与简单剪切条件下材料失稳行为的比较, 采用失稳相图方法研究复合应力加载条件下材料的失稳行为。

## 2 平面加载条件下材料失稳的物理模型

考虑图 1 所示平面构型。假设构型的轴向尺寸远大于平面内尺寸, 或远小于平面内尺寸。作用的静、动载荷平行于构型平面, 沿构型长度方向均匀分布。因此, 将该平面构型

\* 作者 E-mail: watwm@imech.ac.cn

处理成平面应变或平面应力情形。本文以平面应变状态情形进行讨论。假设材料变形的塑性功大部分转化为热, 即有  $q=KW_p$ , 其中  $q$  为热流矢量, 功热转换系数  $K=0.9$ <sup>[6]</sup>。此外, 因材料的弹性变形远小于塑形变形, 分析过程中忽略材料的弹性变形。

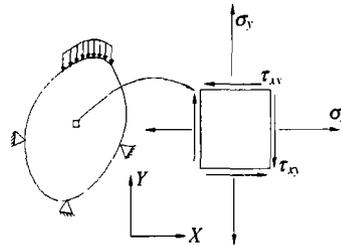


图1 平面应变构型

### 3 材料失稳的线性扰动分析

平面应变加载条件下, 平面构型的控制方程由下面应变协调方程、运动微分方程和能量守恒方程组成:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ \rho \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x \partial y} \\ \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = K (\tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + \sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\rho$  是密度,  $c$  是比热容,  $\lambda$  是热传导系数,  $\sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y$ 。对式(1)施加如下微小扰动:

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij0} + \Gamma'_{ij} = \Gamma_{ij0} + \delta \Gamma_{ij} e^{\alpha t + i k_1 (x+y)}, \quad \Gamma'_{ij} \ll \Gamma_{ij0} \quad (2)$$

其中,  $\Gamma = \sigma, \tau, \varepsilon, \gamma, \theta (i, j = x, y)$ 。上式中的  $\Gamma_{ij0}$  为方程系(1)的一组基本解,  $\Gamma'_{ij}$  是对基本解施加的微小扰动,  $\delta \Gamma_{ij}$  是扰动幅值,  $\alpha$  是扰动增长率,  $k_1$  是波数。将式(2)代入式(1), 得到特征方程:

$$\alpha^3 + [C + (A+1)k^2] \alpha^2 + (Ak^2 + 1 - B)k^2 \alpha + k^4 + \beta \left\{ [E + (2A+1)k^2] \alpha^2 + \left[ 5Ak^2 + 2(1-B) + \frac{3}{2}(F-D) \right] k^2 \alpha + \frac{3}{2}Ek^2 + 5k^4 \right\} = 0 \quad (3)$$

这里引入指标参数  $\beta$ 。当  $\beta = 0$  时, 方程(3)简化为简单剪切情况下判断材料发生局部剪切失稳的特征方程<sup>[2]</sup>。当  $\beta = 1$  时, 方程(3)为平面应变情况下判断材料发生失稳的特征方程。特征方程中各无量纲量定义如下:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\lambda \alpha_1}{c Q_0}, k^2 = \frac{\lambda^2 k_1^2}{\rho c^2 Q_0} \\ A = \frac{c R_0}{\lambda}, B = \frac{K P_0 \tau_{xy0}}{\rho c Q_0}, C = \frac{\lambda K P_0 \dot{\gamma}_{xy0}}{\rho c^2 Q_0} \\ D = \frac{K P_0 \sigma_{kk0}}{\rho c Q_0}, E = \frac{\lambda K P_0 \dot{\varepsilon}_{kk0}}{\rho c^2 Q_0}, F = \frac{K P_0 R_0 \dot{\varepsilon}_{kk0}}{\rho c Q_0} \end{cases} \quad (4)$$

其中字母上方的“.”表示对时间微分。假设材料为各向同性，不考虑材料的应变率历史效应，本构方程形式为 $\sigma = f(\varepsilon, d\varepsilon/dt, \theta)$ ，由本构方程微分可得

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} d\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} d\theta \\ &= Q_0 d\varepsilon_{ij} + R_0 d\dot{\varepsilon}_{ij} - P_0 d\theta \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $Q_0, R_0, P_0$  分别表示应变硬化效应、应变率敏感性以及热软化效应。具体表达式为

$$Q_0 = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0, R_0 = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \right)_0 = \frac{R_{ij}^*}{\dot{\varepsilon}_{ij0}}, P_0 = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right)_0 \quad (6)$$

特征方程(3)中，如果扰动增长率 $\alpha$ 有正实根，则材料可能发生失稳。

与简单剪切加载情形不同，平面应变加载条件下，对于不同正应力和剪应力强度之比，材料可能发生局部热软化失稳，也可能发生非局部热软化失稳。如果一个正应力和剪应力为零，非零正应力为正，则材料可能发生颈缩失稳。仅在简单剪切加载条件下，材料可能发生剪切带失稳；在长波( $k \rightarrow 0$ )和短波( $k \rightarrow \infty$ )情形下，特征方程(3)的解为零或负实数，此时材料变形为稳定的塑性流动。因此材料如果发生失稳，一定是在特定的波长或波数发生。为确定材料失稳发生相关的波数  $k_m$ ，并使特征方程(3)具有最大正实根 $\alpha_m$ 。由极值条件  $d\alpha_m/dk_m^2 = 0$  可得失稳函数  $G_1$  和  $G_2$ 。其具体形式为

$$\begin{cases} G_1 = 4(A\alpha_m + 1)(\alpha_m + C) + 4\beta(A\alpha_m + 1)[E + 5(\alpha_m + C) + 5\beta E] \\ G_2 = \left\{ \begin{aligned} &[(A+1)\alpha_m - (B-1)] + \\ &\beta \left[ (2A+1)\alpha_m - 2 \left( B-1 + \frac{3}{4}D - \frac{3}{4}F \right) + \frac{3}{2}Et_c \right] \end{aligned} \right\}^2 \end{cases} \quad (7)$$

令式(7)中 $\beta=0$ 得一维简单剪切情形下对应的失稳函数  $F_1$  和  $F_2$ <sup>[2]</sup>。若特征方程(3)有正实根，在  $G_1, G_2-\alpha_m$  平面上函数  $G_1$  和  $G_2$  应有大于零的交点，表示平面应变加载条件下材料可能发生失稳。由此得到平面应变加载条件下材料发生失稳的临界条件：

$$KP_0 \left( 2\tau_{xy0} + \sigma_{kk0} - R_0 \dot{\varepsilon}_{kk0} - \frac{\lambda}{c} t_c \dot{\varepsilon}_{kk0} \right) - \frac{4}{3} \sqrt{6KP_0 \rho \lambda Q_0 (\dot{\varepsilon}_{kk0} + \dot{\gamma}_{xy0})} > 2\rho c Q_0 \quad (8)$$

上式左边表示材料的热软化效应，右边表示材料的应变硬化效应。因此物理意义上表明：变形过程中材料热软化效应大于应变硬化效应时，材料发生失稳。此时材料的失稳形式较复杂。可以是局部热软化失稳，也可以是非局部热软化失稳以及长时均匀塑性流动等。由式(8)可见：剪应力、正应力、应变率敏感性和热传导效应均对材料失稳行为产生明显影响。不等式左边圆括号第一项和第二项表示剪应力和正应力所做塑性功引起材料的热软化效应。可看出，正应力产生的塑性功增强了热软化效应，从而促进了材料失稳的发生；圆括号第三项表示正应变率相关的硬化效应，减小了材料失稳发生的可能性；圆括号第四项表示热传导效应和正应变率敏感性对材料热软化效应的综合影响。热传导效应对材料失稳行为产生明显影响。当特征时间  $t_c \rightarrow 0$ ，即扰动增长率较大时，该项对热软化效应的影响可忽略不计，表明材料已发生局部热软化失稳；而当  $t_c$  较大时，即扰动增长率较小时，该项

表明热传导效应总是减弱材料热软化效应,材料可能发生非局部热软化失稳;不等式左边的根号项表示与热传导效应、剪应变率及正应变率相关的材料硬化效应对材料热软化效应的影响。易见,该项始终削弱了材料的热软化效应,抑制材料局部热软化失稳的发生。数值上根号项为高阶小量,所以圆括号项对材料热软化效应起主控作用。

可见,平面应变加载条件下的材料的失稳条件式(8)涉及了多种影响因素,在描述材料失稳行为时具有较普遍的意义。对特殊加载情形,可从该条件得到相应的材料失稳准则。

1) 绝热条件,即  $\lambda=0$

此时失稳条件(8)具有形式:

$$KP_0(2\tau_{xy0} + \sigma_{kk0} - R_0\dot{\epsilon}_{kk0}) > 2\rho c Q_0 \quad (9)$$

上式即为绝热条件下在平面应变加载条件下材料的失稳准则。表明剪应力和正应力所做塑性功产生的热软化效应超过应变硬化效应和正应变率所产生的硬化效应时失稳发生。与正应变率相关的应变率敏感性使材料的塑性流动趋于稳定。当剪应力强度远大于正应力强度时,即有  $\tau_{xy0} \gg \sigma_{kk0}$  时,材料的失稳形式表现为局部化绝热剪切失稳;当正应力强度远大于剪应力强度时,即  $\sigma_{kk0} \gg \tau_{xy0}$  时,材料失稳行为表现为平面动态加载条件下的长时塑性流动变形;当仅存在一个拉伸应力作用时,材料失稳表现为颈缩现象。

2) 无应变硬化,即  $Q_0=0$

此时式(8)具有形式:

$$KP_0\left(2\tau_{xy0} + \sigma_{kk0} - R_0\dot{\epsilon}_{kk0} - \frac{\lambda}{c}t_c\dot{\epsilon}_{kk0}\right) > 0 \quad (10)$$

上式即为平面应变加载状态下材料无应变硬化的失稳准则。表明剪应力和正应力所做塑性功产生的热软化效应克服了与正应变率相关的硬化效应、热传导和正应变率敏感性对热软化效应的消弱时,材料发生失稳。如果  $\lambda=0$ ,材料失稳的形式可以是绝热剪切失稳;如果材料发生变形所经历的特征时间较大,即  $t_c \gg 0$ ,材料可能发生非局部热软化失稳。

3) 准静态加载

在准静态加载条件下,可忽略材料的应变率敏感效应。此时式(8)具有形式:

$$KP_0(2\tau_{xy0} + \sigma_{kk0}) > 2\rho c Q_0 \quad (11)$$

上式即为平面准静态加载条件下材料的失稳准则。表明剪应力和正应力所做塑性功产生的热软化效应超过应变硬化效应时,材料发生失稳。与一维简单剪切情形<sup>[2]</sup>的失稳准则不同,这里正应力对材料失稳产生影响。正应力使热软化效应明显加剧,失稳更易发生。此时,因为没有应变率影响,由塑性功转化的热量能够充分地传输到材料的整个区域,热软化区域并非限制在狭小区域内,所以材料不易发生局部绝热剪切失稳,往往发生非局部热软化失稳。仅当正应力趋于零时,材料才可能发生局部绝热剪切失稳。

4) 无热软化,应变软化,  $P_0=0, Q_0<0$

此时式(8)为

$$2\rho c Q_0 < 0 \quad (12)$$

上式始终成立,说明应变软化阶段材料已发生失稳或经历长时均匀塑性流动变形。

## 4 结果与讨论

为描述平面应变加载条件下正应力和正应变率对材料失稳行为的影响, 采用失稳相图对式(7)中失稳函数  $G_1$  和  $G_2$  的特性进行分析, 研究不同应力和应变率加载条件下材料的失稳行为。以 AISI 4340 钢作为模拟材料, 为考虑材料应变硬化、应变率敏感性和热软化效应应采用 Johnson-Cook 本构模型<sup>[8]</sup>。相关参数的选取是基于该材料正交切削过程的数值模拟结果<sup>[7]</sup>。即等效塑性应变为 3、剪应变率和正应变率为  $10^5 \text{ s}^{-1}$ 、正应力和剪应力等于 0.2 GPa 以及温度为  $800^\circ\text{C}$ ,  $Q_0=3.3\times 10^7 \text{ Pa}$ ,  $R_0=100 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $P_0=1.1\times 10^6 \text{ Pa}\cdot\text{C}^{-1}$ 。由此可确定式(4)中的各无量纲量为:  $A\sim 10^3$ ,  $B\sim 10^1$ ,  $C\sim 10^{-5}$ ,  $D\sim 10^1$ ,  $E\sim 10^{-5}$ ,  $F\sim 10^{-1}$ 。AISI 4340 钢的材料参数及其 J-C 模型中的参数取于文献[8]。

做材料失稳相图的前提条件是简单剪切加载和平面应变加载条件下塑性功率相等, 即

$$\dot{W}_s^1 = \dot{W}_n^2 + \dot{W}_s^2 \quad (13)$$

其中,  $\dot{W}_s^1$ 、 $\dot{W}_n^2$  和  $\dot{W}_s^2$  分别为简单剪切加载条件下剪切变形、平面应变加载条件下拉压变形和剪切变形的塑性功率。

图 2 为平面加载条件下应力和应变率比例变化时材料的失稳相图。对于简单剪切和平面应变两种加载情形, 函数  $F_1$  和  $G_1$  均表现出随应变率增加先减后增的变化规律。所以函数  $F_1$  和  $G_1$  的存在下包络线 (如图中虚点线所示)。平面加载情形包络线  $OCD$  始终位于简单剪切情形包络线  $OAB$  的上方。表明平面加载条件下材料发生局部热软化失稳的概率相对较小; 图中由  $y$  轴、一维包络线  $OA$  和垂线  $L$  限定的区域  $OAEG$  为局部热软化失稳区, 其各相点表示材料发生局部剪切失稳的条件。垂线  $L$  经过函数  $F_2$  与一维包络线交点  $A$  为该局部热软化失稳区的右边界, 物理上表示材料失稳的极值条件。垂线  $L$  右边区域为非局部热软化失稳区。 $y$  轴左边区域为稳态塑性变形区; 剪应变率减小时垂线  $L$  向左移动, 表示局部热软化失稳区缩小。反之, 剪应变率增大垂线  $L$  向右移动, 表示局部热软化失稳区增大, 相应的失稳概率随之变化。因此, 若平面加载条件下的失稳函数  $G_1$  和  $G_2$  的交点落在区域  $OAEG$  内, 材料发生局部热软化失稳; 若  $G_1$  和  $G_2$  交点落在垂线  $L$  右边区域, 材料发生非局部的热软化失稳; 若  $G_1$  和  $G_2$  交点落在  $y$  轴左边, 即扰动增长率为负, 表明材料变形为稳态的塑性流动, 不发生失稳。图中相点  $P$  和  $Q_1$  分别表示均匀和非均匀简单剪切加载条件下材料发生局部热软化失稳的条件。可以看出,  $Q_1$  点的横坐标值要略大于  $P$  点。表明非均匀剪切情形材料更易发生局部热软化失稳。数学上  $P$  和  $Q_1$  点的差异由临界条件式(8)中的高阶小量产生。

图 2(a)为拉剪复合应力加载条件下材料的失稳相图。当拉伸变形与剪切形变塑性耗散功率之比增大至 1:4 时, 函数  $G_1$  和  $G_2$  的交点由相点  $Q_1$  左移至局部热软化失稳区的  $Q_2$  处, 说明材料可发生绝热剪切失稳, 但发生绝热剪切失稳的难度增大; 当拉伸变形与剪切形变塑性耗散功率之比增大至 3:1 时, 函数相点由  $Q_2$  移动至塑性变形形态转变点  $Q_3$ 。此时, 若材料维持应变硬化( $Q_0>0$ ), 拉伸变形塑性耗散功率的增加使相点移动到稳态塑性变形区域。材料塑性变形为稳定的, 不发生绝热剪切失稳; 若材料发生应变软化( $Q_0<0$ ), 拉伸变形塑性耗散功率的微小增加使相点  $Q_3$  迅速移动到非局部热软化失稳区, 如相点  $Q_4$  所示。这时材料发生非局部热软化失稳或长时稳态的塑性流动变形。在简单拉伸加载条件下材料将发生颈缩失稳。

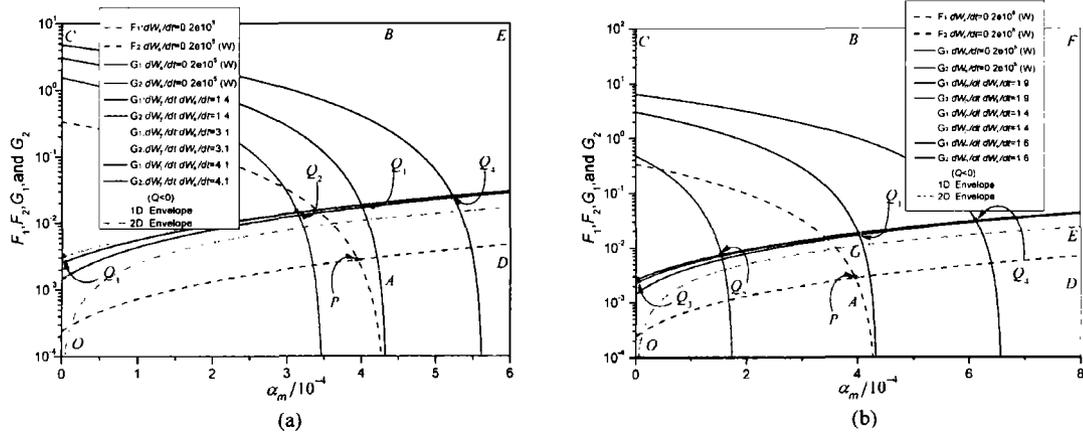


图 2 拉剪(a)和压剪(b)复合应力加载条件下材料的失稳相图

图 2(b)为压剪复合应力加载条件下材料的失稳相图。可见当压缩变形与剪切形变塑性耗散功率之比由 0:1 增加至 1:9 时，函数  $G_1$  和  $G_2$  的交点由相点  $Q_1$  左移到局部热软化区的相点  $Q_2$  处。即  $Q_2$  对应于局部热软化失稳条件。因为相点  $Q_2$  的横坐标  $\alpha_m$  小于  $Q_1$ ，表明随剪应力强度的减小，压应力强度的增大，剪切形变塑性耗散功率占总耗散功率的比例减小。材料更难发生绝热剪切失稳。当压缩变形与剪切形变塑性耗散功率之比增加到 1:4 时，相点从  $Q_2$  左移至  $Q_3$ 。该点横坐标趋于 0，对应于材料塑性变形形态的转变条件。当  $\alpha_m < 10^{-5}$  即  $t_c > 10^5$  时，式(8)函数  $G_2$  中  $Et_c$  项的数量级为  $10^0$ ，对材料失稳行为产生明显影响。此时若材料继续维持应变硬化，即有  $Q_0 > 0$  和  $E > 0$ 。压缩变形塑性耗散功率的增加使相点  $Q_3$  移动到  $\alpha_m < 0$  的区域，表明材料不发生失稳，塑性变形为稳定的；若材料发生应变软化，即  $Q_0 < 0$  和  $E < 0$ 。压缩变形塑性耗散功率的微量增加使相点  $Q_3$  迅速移动到非局部热软化失稳区（如图中  $Q_4$  点所示）。表明材料发生非局部热软化失稳或长时稳态的塑性流动。如果加载条件为简单压缩，材料将发生压缩灾变失稳。这时材料压缩变形耗散功率仅占总能量的 21%。

比较图 2 (a)和(b)的结果可见：正应力分别为拉应力和压应力时，对应的形拉伸变形与剪切形变塑性耗散功率临界比值分别为 3:1 和 1:4。表明平面应变加载条件下，材料发生局部热软化失稳行为为具有较强压力敏感性。这个结果与 Walker 和 Shaw<sup>[9]</sup>的实验观察一致。Walker 和 Shaw 在实验中发现压剪复合应力加载条件下，随压应力强度的增加材料更难发生剪切局部化失稳。

## 5 结论

本文应用线性摄动分析方法得到了平面加载条件下材料失稳的临界判据，讨论了特殊加载情况下材料的失稳模式，分析了平面应变加载状态下材料的失稳行为。得到以下主要结论：

1) 不同于简单剪切加载条件下材料的失稳准则，平面加载条件下的失稳准则考虑了正应力、正应变率对材料失稳行为的影响，失稳形式可以是局部热软化失稳，或是非局部的热软化失稳。当材料热软化效应超过应变硬化效应时材料发生失稳。与剪应力和剪应变率

一样,正应力、正应变率和热传导效应等均对热软化效应产生明显影响。因此是控制材料失稳行为的主要因素。

2) 通过失稳相图分析表明材料发生失稳的临界条件和模式与加载状态相关,并取决于拉压变形和剪切变形塑性耗散功率的比值。在拉剪复合应力加载条件下,当该塑性耗散功率之比增大到 3:1 时材料不发生局部热软化失稳;在压剪复合应力加载条件下,当该塑性耗散功率之比增大到 1:4 时材料不发生局部热软化失稳。在材料塑性变形的临界状态,如果材料维持应变硬化,材料变形表现出稳态的塑性流动;如果材料发生应变软化,材料或发生非局部热软化失稳,或经历长时稳态的塑性流动变形。材料的局部热软化失稳行为表现出较强的压力敏感性。

## 致谢

本文工作得到国家自然科学基金(批准号:10972227)和国家重大基础研究计划项 973 目(批准号:2009CB724401)资助。

## 参考文献

1. Recht R F. Catastrophic thermoplastic shear. *Journal of Applied Mechanics*, 1964,31: 189~193
2. Bai Y L. Thermo-plastic instability in simple shear. *J. Mech. Phys. Solids*, 1982,30: 195~207
3. Fressengeas C., Molinari A. Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35(2): 185~211
4. Anand L, Kim K H, Shawki T G. Onset of shear localization in viscoplastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35(4): 407~429
5. Zbib H M, Jubran J S. Dynamic shear banding: a three-dimensional analysis. *International Journal of Plasticity*, 1992, 8: 619~641
6. Taylor G I, Quinney H. The latent energy remaining in a metal after cold working. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1934,143: 307~326
7. 李相旺. 平面加载条件下材料失稳行为及切削过程去除机理研究. 硕士论文, 中国科学院力学研究所, 北京 2011
8. Gordon R. Johnson, William H. Cook. Fracture characteristic of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 1985, 21(1): 31~48
9. Thomas J. Walker, Milton C. Shaw. On deformation at large strains. *Proc. 10th Int. Mach. Tool Des. and Res. Conf. Pergamon Press, Oxford*,1969: 241~252