

## 双轴拉伸应力下后继屈服面的演化研究

陈岑<sup>1</sup>, 刘芳<sup>2</sup>, 付强<sup>3</sup>, 洪友士<sup>1,\*</sup>

1. 中国科学院力学研究所 非线性国家重点实验室, 北京 100190

2. 武汉理工大学交通学院, 湖北 武汉 430063

3. 中国轻型燃气轮机开发中心, 北京 100009

**摘要:** 屈服面的位置和形状直接影响着材料塑性应变的确定。针对双轴拉伸应力下金属材料的塑性行为, 以一种弹塑性损伤本构理论为基础, 研究了后继屈服面在拉-拉应力空间中的演化。考虑了有限变形效应和耦合硬化效应, 给出了屈服面的确定方法, 并预测了拉-拉应力空间中的初始屈服面(IYS)和后继屈服面, 预测结果显示本文提出的理论模型能一致描述出后继屈服面演化中的前端尖点效应、尾部包氏效应、膨胀/收缩以及移动和畸变。针对两种加工硬化材料(AI 6061-T 6511 和 Annealed 1100 Al)承受轴向拉伸、环向内压、轴向-环向混合比例加载时的后继屈服面, 将模型预测的结果与文献中的实验结果进行对比。结果表明, 所提模型能较好地预测后继屈服面的演化, 并能分析其物理机制, 为后继屈服面的演化研究提供了一种可行的方法。

**关键词:** 构元组集模型; 后继屈服面演化; 耦合硬化效应; 尖点效应; 包氏效应

中图分类号: V219; O344.1 文献标识码: A

金属材料在双轴拉伸应力下的塑性行为一直以来都广受关注<sup>[1-4]</sup>。随着金属板材成型和管件成型等工艺在航空工业和汽车工业中的广泛应用<sup>[5]</sup>, 需要确定材料在双轴拉伸应力下的塑性变形, 尤其是回弹量的大小, 而屈服面的位置及形状直接影响着塑性应变的确定。因此, 研究双轴拉伸应力下屈服面的演化过程具有重要意义。

目前已经有大量的文献记载对屈服面的研究<sup>[6-12]</sup>, 对于初始屈服面(IYS), Tresca 屈服准则、von Mises 屈服准则等理论已经被广泛认可; 而实验结果显示, 后继屈服面的演化中会出现移动和畸变<sup>[10-12]</sup>。目前大部分实验和理论研究都是针对拉-剪应力空间中的, 针对拉-拉应力空间中的研究为数不多。Phillips 和 Das<sup>[7]</sup> 曾研究应

变小于 1% 时的屈服面; Lin<sup>[1]</sup> 和 Kuwabara<sup>[13-15]</sup> 等曾利用十字型试件的双轴拉伸实验来研究屈服面。近期 Khan 等<sup>[12]</sup> 针对两种加工硬化材料, 对薄壁圆管试件施加轴向拉伸、环向内压、轴向-环向混合比例加载, 得到了一系列有限塑性变形下拉-拉应力空间中的屈服面。

另一方面, 许多学者也致力于用理论模型研究拉-拉应力空间中屈服面的演化。Barlat 等<sup>[16]</sup> 曾提出一种各向异性的屈服函数。Korkolis 和 Kyriakides<sup>[17]</sup> 则利用这种屈服函数分析圆管的破裂对后继屈服面的移动和变形的影响; 但这一理论依赖于已确定的屈服函数, 不能解释后继屈服面的畸变和移动等问题。Peeters 等<sup>[18]</sup> 利用一种基于加工硬化/软化的晶体塑性模型预测了材料

收稿日期: 2011-12-28; 退修日期: 2012-02-08; 录用日期: 2012-02-21; 网络出版时间: 2012-03-20 11:02

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20120320.1102.009.html

基金项目: 国家自然科学基金(11021262)

\* 通讯作者. Tel.: 010-82543966 E-mail: hongys@imech.ac.cn

引用格式: Chen C, Liu F, Fu Q, et al. Investigation of subsequent yield surface evolution under biaxial tension. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(12): 2230-2239. 陈岑, 刘芳, 付强, 等. 双轴拉伸应力下后继屈服面的演化研究. 航空学报, 2012, 33(12): 2230-2239.

在复杂应变加载路径下的屈服面,研究了屈服面的形状和大小的改变以及中心点的移动,但缺乏对屈服面演化过程的讨论。尽管晶体模型能描述出材料的微结构及塑性变形机制,但存在参数过多且缺乏物理意义等问题。此外,也有学者将宏观唯象模型与晶体塑性模型相结合,例如 Kowalczyk 和 Gambin<sup>[19]</sup>将材料的微观塑性变形机制引入到经典塑性理论中研究屈服面,也为研究后继屈服面演化提供了一种可能的方法。

本文利用一种基于微观物理机制的宏观模型(构元组集模型)来研究金属材料后继屈服面在拉-拉应力空间中的演化。根据对泛函势和 Cauchy-Born 准则,用弹簧束构元和体积构元共同描述材料的弹性变形和损伤行为<sup>[20-22]</sup>,考虑滑移为晶体塑性的主要变形机制,用滑移构元描述材料的塑性行为<sup>[23-24]</sup>,由这 3 种构元组集得到的弹塑性损伤一体化本构模型称为构元组集模型;在前期的工作中已经基于模型的理论基础研究小变形条件下后继屈服面的演化<sup>[24]</sup>,并将模型推广到有限变形条件下<sup>[25]</sup>,研究有限变形条件下后继屈服面在拉-剪应力空间中的演化<sup>[26-27]</sup>。本文将进一步研究后继屈服面在拉-拉应力空间中的演化,针对两种加工硬化材料,将预测结果与文献<sup>[12]</sup>中的实验结果进行对比,分析后继屈服面演化的物理机制。

## 1 材料本构模型

### 1.1 弹性损伤本构关系

基于对泛函势和 Cauchy-Born 准则,将处于相同取向的原子键看做一个弹簧束构元,将原子嵌入势的作用抽象为体积构元;弹簧束构元和体积构元可用来描述材料的弹性变形和损伤,建立了由 Kirchhoff 应力的 Jaumann 导数  $\overset{\nabla}{\tau}$  和弹性变形率  $D^e$  组成的本构关系<sup>[26]</sup>为

$$\overset{\nabla}{\tau} = C^{ed} : D^e \quad (1)$$

式中:  $C^{ed}$  为弹性损伤切线刚度张量,其分量表达式为

$$C_{ijkl}^{ed} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n f(\lambda^{(s)}) e^{-2\lambda^{(s)}} (n_j^{(s)} n_l^{(s)} \delta_{ik} + n_i^{(s)} n_k^{(s)} \delta_{jl} + n_j^{(s)} n_k^{(s)} \delta_{il} + n_i^{(s)} n_l^{(s)} \delta_{jk}) + \sum_{s=1}^n (f'(\lambda^{(s)}) - 2f(\lambda^{(s)})) \cdot$$

$$e^{-4\lambda^{(s)}} n_i^{(s)} n_j^{(s)} n_k^{(s)} n_l^{(s)} + p'(\theta) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2)$$

式中:  $\lambda^{(s)}$  为第  $s$  个弹簧束构元的变形;  $f(\lambda^{(s)})$  为弹簧束构元上的力;  $n_i^{(s)}$  为弹簧束构元的方向矢量在  $i$  方向上的方向余弦;  $\delta_{ik}$  为克罗内克  $\delta$  符号;  $\theta$  为体积构元的变形;  $p(\theta)$  为体积构元上的力。

### 1.2 弹塑性损伤本构关系

考虑滑移为晶体塑性的主要变形机制,将单晶塑性理论推广到多晶体,用滑移构元来描述材料的塑性行为<sup>[24-25]</sup>。

第  $\alpha$  个滑移构元的运动学和动力学变量为滑移量  $\gamma^{(\alpha)}$  和分解剪应力  $\tau^{(\alpha)}$ ,  $P^{(\alpha)}$  和  $Q^{(\alpha)}$  分别为第  $\alpha$  个滑移构元的对称和反对称张量,基于 Schmid 定律,由分解剪应力与宏观应力场之间的关系,可得到分解剪应力率为<sup>[26]</sup>

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau} : P^{(\alpha)} + \tau : \dot{P}^{(\alpha)} = (P^{(\alpha)} : C^{ed} + Q^{(\alpha)} \cdot \tau - \tau \cdot Q^{(\alpha)}) : (D - D^p) = \lambda^{(\alpha)} : (D - D^p) \quad (3)$$

式中:  $\tau$  为 Kirchhoff 应力;  $D^p$  为塑性变形率;  $\lambda^{(\alpha)}$  的表达式为

$$\lambda^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} : C^{ed} + Q^{(\alpha)} \cdot \tau - \tau \cdot Q^{(\alpha)} \quad (4)$$

根据广义 Schmid 定律,当分解剪应力达到其临界值时,滑移构元开动,当分解剪应力的增量与其临界值的增量保持一致时,滑移构元持续开动。在滑移过程中,临界分解剪应力率与滑移率之间存在线性化的关系,对于持续开动的滑移构元有<sup>[26]</sup>

$$\begin{cases} \dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} & \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} > 0 \\ \dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} & \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} < 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $h_{\alpha\beta}$  为滑移硬化模量,表示第  $\alpha$  个滑移构元滑移一单位时对第  $\beta$  个滑移构元分解剪应力临界值的影响。每个滑移构元上都有正负两个临界值,  $\sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} > 0$  时表示第  $\alpha$  个滑移构元分解剪应力正的临界值  $\tau_{+cr}^{(\alpha)}$  由于硬化而改变,并沿正临界值的方向开动,此方向为主动开动方向,其反方向为被动开动方向;反之,亦然<sup>[27]</sup>。

对于开动的滑移构元,将式(3)代入到式(5)中,考虑塑性变形的速度梯度正对称部分  $D^p$  和反对称部分  $W^p$  与二阶张量  $P^{(\alpha)}$  和  $Q^{(\alpha)}$  以及滑移率之间的关系,对于开动的滑移构元  $\alpha$ ,滑移率为<sup>[26]</sup>

$$\dot{\gamma}^{(a)} = \sum_{\beta=1}^m (g_{a\beta})^{-1} \lambda^{(\beta)} : D \quad (6)$$

式中:

$$g_{a\beta} = h_{a\beta} + \lambda^{(a)} : P^{(\beta)} \quad (7)$$

由式(1)、式(5)和式(6)可以得到

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \dot{\tau} + \tau \cdot W^e - W^e \cdot \tau + \tau \cdot W^p - W^p \cdot \tau = \\ C^{ed} : (D - D^p) - \sum_{a=1}^m \dot{\gamma}^{(a)} (Q^{(a)} \cdot \tau - \tau \cdot Q^{(a)}) = \\ &\left( C^{ed} - \sum_{a=1}^m \sum_{\beta=1}^m (g_{a\beta})^{-1} \lambda^{(a)} \otimes \lambda^{(\beta)} \right) : D \quad (8) \end{aligned}$$

式中:  $W^e$  为弹性变形的速度梯度的反对称部分;  $\otimes$  表示张量并积。式(8)对所有开动的滑移构元求和。

定义  $C^{epd}$  为弹塑性损伤刚度张量, 即

$$C^{epd} = C^{ed} - \sum_{a=1}^m \sum_{\beta=1}^m (g_{a\beta})^{-1} \lambda^{(a)} \otimes \lambda^{(\beta)} \quad (9)$$

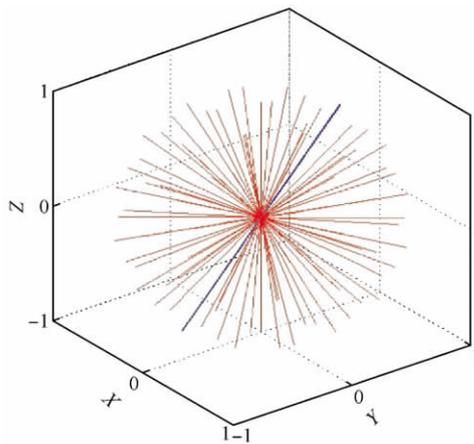
式中: 弹性损伤刚度张量  $C^{ed}$  可由式(2)计算得到。

本文将利用滑移构元的力学性质预测后继屈服面在拉-拉应力空间中的演化, 针对以滑移为主要变形机制的金属材料, 弹性变形和损伤量较小, 因此损伤可以忽略。

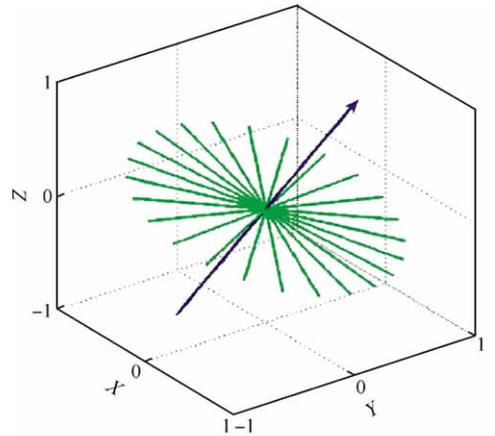
## 2 屈服面的预测

### 2.1 构元的离散

数值计算中需要将弹簧束构元和滑移构元进行离散, 图 1(a) 为将弹簧束构元在空间中离散为 46 个方向, 将弹簧束构元的方向作为滑移构元的法向, 对于每一个法向, 在其垂直平面内均匀地取 12 个滑移方向 (如图 1(b) 所示), 滑移构元在空间中离散的数目为  $46 \times 12 = 552$ 。



(a) Forty-six discrete directions of spring-bundle component



(b) Twelve slip directions of slip component perpendicular to the direction of a spring-bundle component

图 1 构元空间离散示意图

Fig 1 Discrete directions of components in 3-D space

### 2.2 屈服面的确定方法

对于开动的滑移构元  $\alpha$ , 有

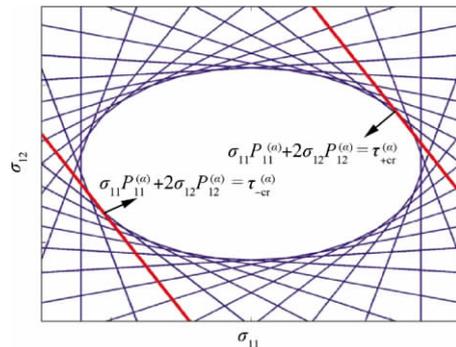
$$\tau : P^{(\alpha)} - \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} = 0 \quad (10)$$

考虑到弹性变形较小, 并在 Cauchy 应力空间中讨论屈服面, 式(10)在  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{12}$  和  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{22}$  应力空间中可以分别表示为

$$\sigma_{11} P_{11}^{(\alpha)} + 2\sigma_{12} P_{12}^{(\alpha)} = \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} \quad (11)$$

$$\sigma_{11} P_{11}^{(\alpha)} + \sigma_{22} P_{22}^{(\alpha)} = \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} \quad (12)$$

在  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{12}$  应力空间中, 由式(11), 第  $\alpha$  个滑移构元的分解剪应力的正负临界值能确定两条临界线, 也就确定了屈服面的两个边界, 如图 2(a) 所示, 遍历所有滑移构元的临界线所形成的包络面就是屈服面。因此, 能确定所有滑移构元的分解剪应力临界值, 屈服面就能唯一被确定。类似的, 由式(12),  $\sigma_{11}$ - $\sigma_{22}$  应力空间中能确定如图 2(b) 所示的包络面。图 2 中滑移构元的分解剪应力临界值都为初始临界值, 得到的是初始屈服面, 它们与 Tresca 屈服准则相符合。



(a) Yield surface in tension-torsion stress space

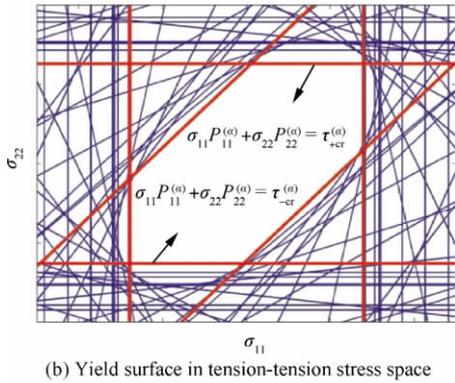


图 2 模型预测的屈服面

Fig 2 Yield surfaces predicted by present model

随着载荷的变化, 滑移构元的临界值会发生改变, 临界线也会随之移动, 同时不断有新的构元开动, 更多的滑移构元会影响到包络面的形状, 后继屈服面的形状和大小也会随之改变, 所以通过滑移构元上分解剪应力临界值的变化就可以得到后继屈服面的演化。

### 2.3 滑移构元的力学性质

滑移构元的力学性质主要由滑移硬化模量  $h_{a\beta}$  来反映, 它由两部分组成<sup>[26]</sup>:

$$h_{a\beta} = h_i^{(a,\beta)} + h_k^{(a,\beta)} = h_i \text{sign}(\mathbf{P}^{(a)} : \mathbf{P}^{(\beta)}) + (h_{kl}^{(a,\beta)} \mathbf{P}^{(a)} : \mathbf{P}^{(\beta)} + (h_{ks}^{(a)} - h_{kl}^{(a,\beta)}) \delta_{a\beta} \mathbf{P}^{(a)} : \mathbf{P}^{(\beta)}) \quad (13)$$

式中:  $h_i^{(a,\beta)}$  为等向硬化部分;  $h_k^{(a,\beta)}$  为随动硬化部分;  $h_{ks}^{(a)}$  和  $h_{kl}^{(a,\beta)}$  分别为随动硬化中的自硬化和潜在硬化部分。

考虑到幂指数硬化模型能较好地描述宏观应力-应变关系, 等向硬化系数  $h_i$  采用幂指数来计算为

$$h_i = 2a_{\text{iso}} d_{\text{iso}} [ |\epsilon^p| + (\tau_{+cr}^0 / a_{\text{iso}})^{1/d_{\text{iso}}} ]^{d_{\text{iso}} - 1} \quad (14)$$

式中:  $\epsilon^p$  为 von Mises 等效塑性应变;  $a_{\text{iso}}$  和  $d_{\text{iso}}$  为等向硬化计算参数;  $\tau_{+cr}^0$  为滑移构元临界分解剪应力的初始值。

类似的, 自硬化系数  $h_{ks}^{(a)}$  也采用幂指数函数计算为

$$h_{ks}^{(a)} = 2c_{\text{ks}} m_{\text{ks}} [ |\gamma^{(a)}| + (\tau_{+cr}^0 / c_{\text{ks}})^{1/m_{\text{ks}}} ]^{m_{\text{ks}} - 1} \quad (15)$$

式中:  $c_{\text{ks}}$  和  $m_{\text{ks}}$  为自硬化计算参数。

同时, 考虑先开动的滑移构元影响次开动和未开动的滑移构元以及硬化矩阵具有对称性, 潜在硬化系数  $h_{kl}^{(a,\beta)}$  为

$$h_{kl}^{(a,\beta)} = q \min(h_{ks}^{(a)}, h_{ks}^{(\beta)}) \quad (16)$$

式中:  $q$  反映了先开动的滑移构元对次开动和未开动滑移构元的影响, 决定了潜在硬化影响的大小。通常取  $0 \leq q \leq 1$ ;  $q = 0$  时, 表示先开动的滑移构元对次开动和未开动滑移构元没有影响;  $q = 1$  时, 这种影响达到最大。

将式(13)代入到式(5)中, 得到

$$\begin{cases} \dot{\tau}_{+cr}^{(a)} = \sum_{\beta=1}^m (h_i^{(a,\beta)} + h_k^{(a,\beta)}) \dot{\gamma}^{(\beta)} = \\ \dot{\tau}_{+cr(i)}^{(a)} + \dot{\tau}_{+cr(k)}^{(a)} \quad \sum_{\beta=1}^m h_{a\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} > 0 \\ \dot{\tau}_{-cr}^{(a)} = \sum_{\beta=1}^m (h_i^{(a,\beta)} + h_k^{(a,\beta)}) \dot{\gamma}^{(\beta)} = \\ \dot{\tau}_{-cr(i)}^{(a)} + \dot{\tau}_{-cr(k)}^{(a)} \quad \sum_{\beta=1}^m h_{a\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} < 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中: 滑移构元主动开动方向上的临界分解剪应力率被分为了等向硬化部分  $\dot{\tau}_{\pm cr(i)}^{(a)}$  和随动硬化部分  $\dot{\tau}_{\pm cr(k)}^{(a)}$ 。考虑到主动开动方向的分解剪应力临界值的改变会影响被动开动方向的分解剪应力临界值, 对于等向硬化部分, 主动开动方向的分解剪应力临界值的增加使被动开动方向的分解剪应力临界值减少相同的量, 对随动硬化部分, 引入参数  $b$  来反映这种影响, 由此得到被动开动方向上的临界分解剪应力率为

$$\begin{cases} \dot{\tau}_{-cr}^{(a)} = \dot{\tau}_{-cr(i)}^{(a)} + \dot{\tau}_{-cr(k)}^{(a)} = -\dot{\tau}_{+cr(i)}^{(a)} + b \dot{\tau}_{+cr(k)}^{(a)} \\ \sum_{\beta=1}^m h_{a\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} > 0 \\ \dot{\tau}_{+cr}^{(a)} = \dot{\tau}_{+cr(i)}^{(a)} + \dot{\tau}_{+cr(k)}^{(a)} = -\dot{\tau}_{-cr(i)}^{(a)} + b \dot{\tau}_{-cr(k)}^{(a)} \\ \sum_{\beta=1}^m h_{a\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} < 0 \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $b = 0$  时, 被动开动方向不受影响;  $b = 1$  时被动开动方向与主动开动方向的分解剪应力临界值产生相同的变化。

### 2.4 后继屈服面及其几何特征

实验证明后继屈服面会出现明显的尖点效应和包氏效应, 并伴随有畸变、膨胀/收缩等现象产

生<sup>[10-12]</sup>, 尽管后继屈服面的演化相当复杂, 在本模型中, 确定了滑移构元的分解剪应力临界值, 就能对屈服面的演化进行预测。

### 2.4.1 尖点效应

计算参数  $q$  在形成包络面时主要影响主动开动方向临界线的移动, 决定屈服面前端的形状。图 3 为单轴拉伸时  $q$  取不同值对后继屈服面形状和大小的影响, 计算中只考虑随动硬化部分, 不考虑主动开动方向上分解剪应力临界值的改变对被动开动方向上的影响, 即  $h_i = 0, b = 0$ , 取  $m_{ks} = 1.0, c_{ks} = 1.0 \text{ MPa}$ 。  $q = 0$  时, 不考虑潜在硬化的影响, 与初始屈服面相比, 后继屈服面“前凸”的程度最大, 尖点效应最明显;  $q = 1.0$  时, 后继屈服面前端没有发生变化, 只是沿加载方向平移,  $q$  的值越小, 屈服面前端的尖点效应越明显。因此, 控制计算参数  $q$  能预测屈服面前端的尖点效应。

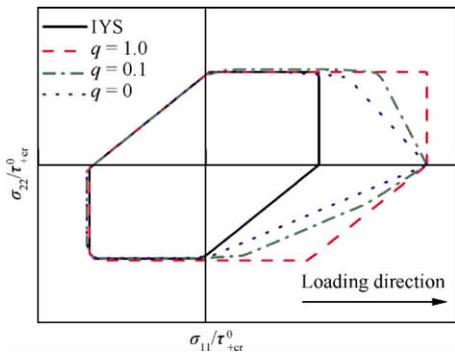


图 3 单轴拉伸时模型对后继屈服面尖点效应的预测  
Fig. 3 Prediction for vertex effect of subsequent yield surfaces under uniaxial tension

### 2.4.2 包氏效应

计算参数  $b$  在形成包络面时决定被动开动方向的临界线相对主动开动方向移动的距离, 图 4 为单轴拉伸时  $b$  取不同值对后继屈服面形状和大小的影响, 计算中不考虑等向硬化部分, 将潜在硬化的影响取为最大, 即  $h_i = 0, q = 1.0$ , 取  $m_{ks} = 1.0, c_{ks} = 1.0 \text{ MPa}$ 。从图 4 中可以观察到明显的包氏效应:  $b = 0$  时屈服面后端不移动, 等同于不考虑包氏效应;  $b = 1.0$  时屈服面的前端和后

端移动的距离相同, 等同于经典包氏效应;  $b$  为其他值时, 等同于附加包氏效应。因此, 控制参数  $b$  能预测屈服面的包氏效应。

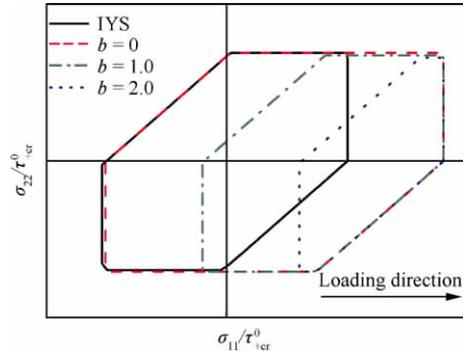


图 4 单轴拉伸时模型对后继屈服面包氏效应的预测  
Fig. 4 Prediction for Bauschinger effect of subsequent yield surfaces under uniaxial tension

### 2.4.3 畸变与收缩

图 5 为单轴拉伸时参数  $q$  和  $b$  共同作用下后继屈服面形状和大小的改变, 计算中不考虑等向硬化即  $h_i = 0$ , 取  $m_{ks} = 1.0, c_{ks} = 1.0 \text{ MPa}$ ,  $q = 0.005$ ,  $b$  的值分别取 1.0、1.5、2.0。从图 5 中可以看出, 参数  $q$  决定潜在硬化的影响, 后继屈服面前端出现明显的尖点效应, 参数  $b$  决定包氏效应的影响, 后继屈服面尾部移动, 两者的共同作用使屈服面呈现出前端突出、尾部缩进的特征, 同时上下两端的边界线变短甚至消失, 屈服面整体收缩, 呈现出负的交叉效应。因此, 通过控制参数  $q$  和  $b$  能预测出屈服面的畸变与收缩。

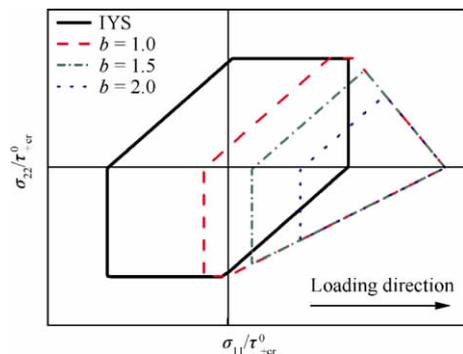


图 5 单轴拉伸时模型对后继屈服面畸变与收缩的预测  
Fig. 5 Prediction for distortion and contraction of subsequent yield surfaces under uniaxial tension

### 2.4.4 膨胀

通过式(18)可以看出,对于临界分解剪应力率的等向硬化部分  $\dot{\tau}_{\pm cr(i)}^{(a)}$ ,主动开动方向上的分解剪应力临界值的改变对被动开动方向的影响等同于参数  $b$  取  $-1.0$  时的情形,屈服面尾部会向与加载相反的方向移动。图6是单轴拉伸时参数  $a_{iso}$  取不同值对后继屈服面形状和大小的影响,在计算中取  $m_{ks} = 1.0$ ,  $c_{ks} = 1.0 \text{ MPa}$ ,  $q = 0.005$ ,  $b = 1.0$ ,  $d_{iso} = 1.0$ ,  $a_{iso}$  分别取  $1.0 \times 10^{-7}$ ,  $0.02$ ,  $2.000 \text{ MPa}$ ,  $a_{iso}$  的值越大,等向硬化系数  $h_i$  的值就越大,屈服面膨胀的程度也越大,正的交叉效应就越明显。因此,控制等向硬化系数能预测屈服面的膨胀。

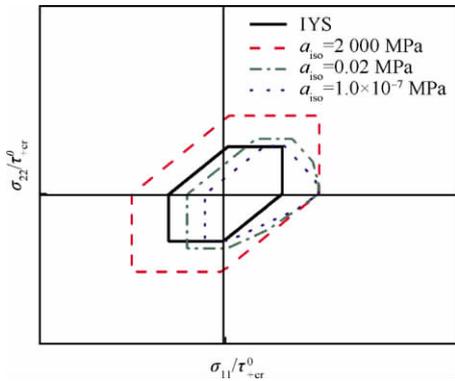


图6 单轴拉伸时模型对后继屈服面膨胀的预测  
Fig.6 Prediction for expansion of subsequent yield surfaces under uniaxial tension

## 3 理论预测与实验结果对比

Khan 等<sup>[12]</sup>对空心圆管试件施加轴向拉伸、环向内压、以及轴向-环向混合比例加载3种载荷,分别得到了低加工硬化材料(Al 6061-T 6511)和高加工硬化材料(Annealed 1100 Al)在拉-拉应力空间中的屈服面。在这一节中,将针对这一实验结果进行预测。

### 3.1 理论计算过程

计算中通过给定应力来得到每个滑移构元上的分解剪应力临界值。

- 1) 由第  $n$  步的 Kirchhoff 应力  ${}^n \tau$  计算得到每个滑移构元的分解剪应力  ${}^n \tau^{(a)} = \tau : \mathbf{P}^{(a)}$ 。
- 2) 由第  $n-1$  步的分解剪应力临界值  ${}^{n-1} \tau_{\pm cr}^{(a)}$

来判断每个构元的状态,只要有一个构元的分解剪应力超过临界值,即  ${}^n \tau^{(a)} > {}^{n-1} \tau_{+cr}^{(a)}$  或  ${}^n \tau^{(a)} < {}^{n-1} \tau_{-cr}^{(a)}$ ,则进入第3)步计算,否则进入第  $n+1$  步的计算。

3) 对于满足  ${}^n \tau^{(a)} > {}^{n-1} \tau_{+cr}^{(a)}$  或  ${}^n \tau^{(a)} < {}^{n-1} \tau_{-cr}^{(a)}$  的构元,第  $n$  步的临界分解剪应力率为  ${}^n \dot{\tau}_{\pm cr}^{(a)} = \tau^{(a)} - {}^{n-1} \tau_{\pm cr}^{(a)}$ ;其他构元则有  ${}^n \dot{\tau}_{\pm cr}^{(a)} = 0$ 。

4) 根据第  $n-1$  步的应变和构元的滑移量,由式(13)、式(14)和式(15)计算滑移硬化模量  $h_{a\beta}$ ,计算构元的滑移率为  ${}^n \dot{\gamma} = h_{a\beta}^{-1} {}^n \dot{\tau}_{\pm cr}^{(a)}$ ,并更新构元的滑移量为  ${}^n \gamma = {}^n \dot{\gamma} + {}^{n-1} \gamma$ ,式中  $h_{a\beta}$  为滑移硬化模量矩阵。

5) 计算所有滑移构元的临界分解剪应力率为  ${}^n \dot{\tau}_{\pm cr} = h_{a\beta} {}^n \dot{\gamma}$ ,其中,等向硬化和随动硬化分别为  ${}^n \dot{\tau}_{\pm cr(i)} = h_i^{(a,\beta)} {}^n \dot{\gamma}$ ,  ${}^n \dot{\tau}_{\pm cr(k)} = h_k^{(a,\beta)} {}^n \dot{\gamma}$ 。

6) 更新每个滑移构元的分解剪应力临界值,主动开动方向为  ${}^n \tau_{+cr}^{(a)} = {}^{n-1} \tau_{+cr}^{(a)} + {}^n \dot{\tau}_{+cr}^{(a)}$ ,被动开动方向为  ${}^n \tau_{-cr}^{(a)} = {}^{n-1} \tau_{-cr}^{(a)} + {}^n \dot{\tau}_{-cr}^{(a)} b - {}^n \dot{\tau}_{\pm cr(i)}^{(a)}$ 。

7) 由每个构元的分解剪应力临界值,根据2.2节中的方法确定屈服面。

8) 计算第  $n$  步的塑性应变,并由式(9)计算弹塑性损伤刚度。

### 3.2 参数标定方法

由于本文的预测方法不受加载路径的影响,由轴向拉伸的实验数据确定计算参数,对同种材料都采用相同的计算参数<sup>[27]</sup>。

1) 对于初始各向同性材料,每个滑移构元的临界分解剪应力的初始值都相同,由拉伸的屈服点或者剪切的屈服点确定,即

$$\tau_{+cr}^0 = \frac{\sigma_s}{2} \text{ 或 } \tau_{+cr}^0 = \tau_s \quad (19)$$

2) 考虑到后继屈服面前端的尖点效应,由屈服面“前凸”的程度确定参数  $q$ 。

3) 考虑到后继屈服面的包氏效应,由屈服面尾部缩进的距离与前端移动距离的比值来确定参数  $b$ 。

4) 等向硬化计算参数  $a_{iso}$ 、 $d_{iso}$  由后继屈服面整体的膨胀或收缩情况来确定,后继屈服面收缩时,不考虑等向硬化。因此低加工硬化材料(Al 6061-T 6511)的等向硬化系数  $h_i$  为0。

5) 通常,参数  $b$  和等向硬化参数  $a_{iso}$ 、 $d_{iso}$  都

需要考虑同种加载路径下多个后继屈服面的形状变化,优化后确定。在以上参数标定后,通过拟合应力-应变曲线来确定自硬化参数  $m_{ks}$ 、 $c_{ks}$  的值。

表 1 和表 2 为计算时两种加工硬化材料采用的参数。

表 1 屈服面演化计算参数(低加工硬化材料 Al 6061-T 6511)

Table 1 Parameters for the simulation of yield surface evolution (low work hardening aluminum alloy Al 6061-T 6511)

$E$ /GPa	$\nu$	$c_{ks}$ /MPa	$m_{ks}$	
70.55	0.364	187	0.08	
$q$	$b$	$\tau_{+cr}^0$ /MPa	$a_{iso}$ /MPa	$d_{iso}$
0.005	2.3	60.8		

表 2 屈服面演化计算参数(高加工硬化材料 Annealed Al 1100)

Table 2 Parameters for the simulation of yield surfaces evolution (high work hardening aluminum alloy annealed Al 1100)

$E$ /GPa	$\nu$	$c_{ks}$ /MPa	$m_{ks}$	
70.49	0.364	43.5	0.18	
$q$	$b$	$\tau_{+cr}^0$ /MPa	$a_{iso}$ /MPa	$d_{iso}$
0.01	1.5	3.8	11.0	0.16

### 3.3 初始屈服面

图 7 中给出了模型预测的初始屈服面与实验结果的对比,预测得到初始屈服面呈六边形,与 Tresca 屈服准则相对应。

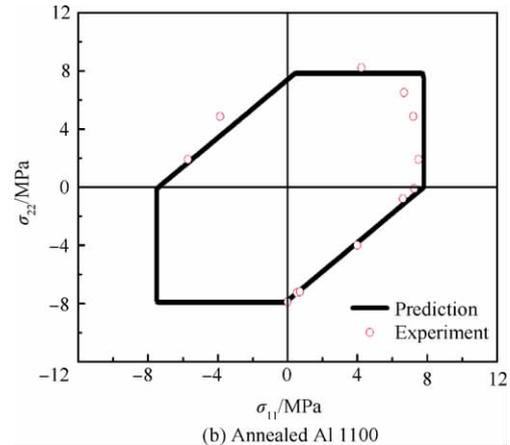
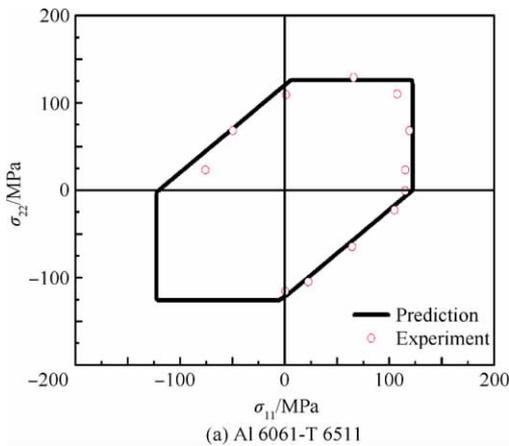
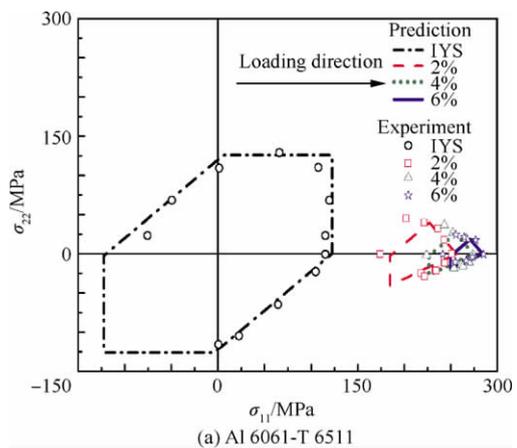


图 7 模型预测的初始屈服面与实验结果对比  
Fig. 7 Comparison of initial yield surfaces between prediction and experimental data

### 3.4 后继屈服面

实验中采用了 3 种加载方式,低加工硬化材料(Al 6061-T 6511)分别为:轴向拉伸(2%, 4%, 6%)、环向内压(2%, 4%, 6%)以及轴向-环向混合比例加载(2%, 4%, 6%);高加工硬化材料(Annealed 1100 Al)分别为:轴向拉伸(2%, 8%, 16%)、环向内压(2%, 8%, 12%)以及轴向-环向混合比例加载(2%, 8%, 12%)。图 8~图 10 是模型预测的后继屈服面与实验结果的对比。

从图 8~图 10 中可以看出,模型预测结果与实验结果基本符合,两种材料的后继屈服面前端突出,尾部缩进;随着应变的增加,低加工硬化材料(Al 6061-T 6511)的后继屈服面收缩,呈现负的交叉效应,高加工硬化材料(Annealed 1100 Al)



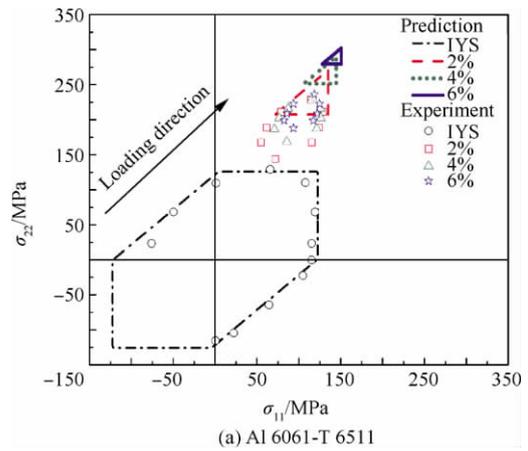
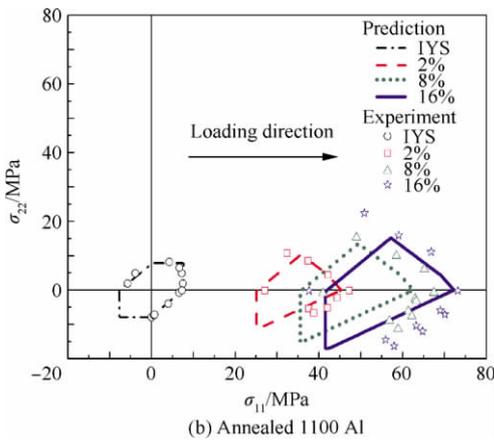


图 8 轴向拉伸时模型预测结果与实验结果对比

Fig. 8 Comparison of subsequent yield surfaces in axial loading between prediction and experimental data

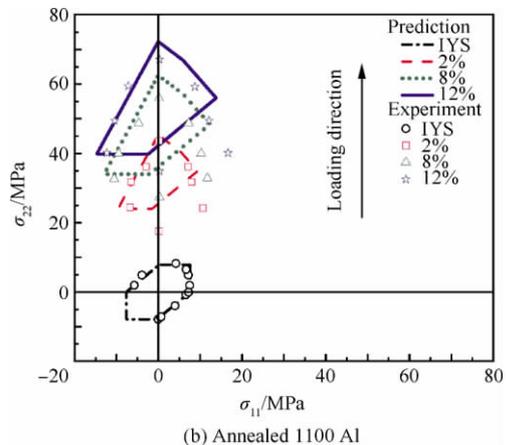
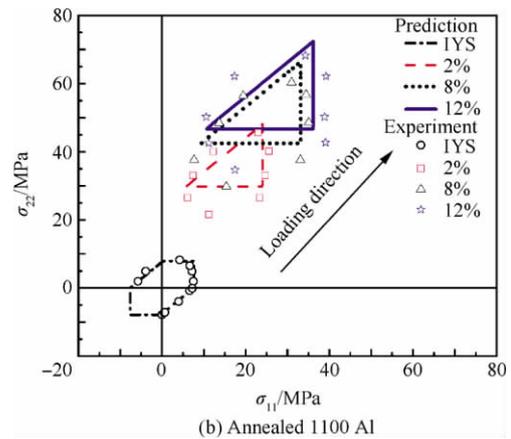
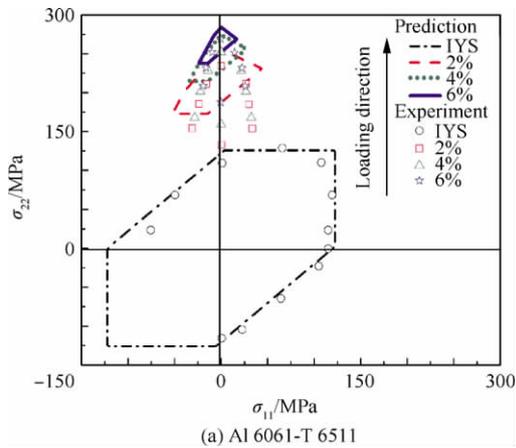


图 9 环向内压时模型预测结果与实验结果对比

Fig. 9 Comparison of subsequent yield surfaces in hoop loading between prediction and experimental data

图 10 轴向-环向混合比例加载时模型预测结果与实验结果对比

Fig. 10 Comparison of subsequent yield surfaces in combined axial and hoop loading between prediction and experimental data

的后继屈服面膨胀,呈现正的交叉效应。后继屈服面前端突出是由于潜在硬化的影响,而尾部缩进则是由于包氏效应,两者共同作用下屈服面收缩,而在等向硬化的作用下屈服面膨胀。

由于实验中采用了  $10 \mu\epsilon$  的偏移应变定义屈服点,而计算中则是严格按照比例极限来定义屈服点,并且采用了预应变加载,因此,预测结果与实验结果存在一定的差异。

#### 4 结论

1) 对于以滑移为主要塑性变形机制的金属材料,本文采用的本构模型能较好地预测后继屈服面在拉-拉应力空间中的演化,包括尖点效应、

包氏效应、畸变、膨胀/收缩等。

2) 后继屈服面的畸变、膨胀/收缩对材料的塑性行为有至关重要的影响,工程计算时,应当采用能反映后继屈服面形状和大小变化的塑性理论。

### 参 考 文 献

- [1] Lin S B, Ding J L, Zbib H M, et al. Characterization of yield surfaces using balanced biaxial tests of cruciform plate specimens. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1993, 28(5): 617-622.
- [2] Stout M G, Hecker S S. Role of geometry in plastic instability and fracture of tubes and sheet. *Mechanics of Materials*, 1983, 2(1): 23-31.
- [3] Vegter H, van den Boogaard A H. A plane stress yield function for anisotropic sheet material by interpolation of biaxial stress states. *International Journal of Plasticity*, 2006, 22(3): 557-580.
- [4] Woodthor J, Pearce R. The anomalous behaviour of aluminium sheet under balanced biaxial tension. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1970, 12(4): 341-347.
- [5] Ahmetoglu M, Sutter K, Li X J, et al. Tube hydroforming: current research, applications and need for training. *Journal of Materials Processing Technology*, 2000, 98(2): 224-231.
- [6] Rees D W A. An examination of yield surface distortion and translation. *Acta Mechanica*, 1984, 52(1-2): 15-40.
- [7] Phillips A, Das P K. Yield surfaces and loading surfaces of aluminum and brass: an experimental investigation at room and elevated temperatures. *International Journal of Plasticity*, 1985, 1(1): 89-109.
- [8] Wu H C, Yeh W C. On the experimental determination of yield surfaces and some results of annealed 304 stainless steel. *International Journal of Plasticity*, 1991, 7(8): 803-826.
- [9] Khan A S, Wang X. An experimental study on subsequent yield surface after finite shear prestraining. *International Journal of Plasticity*, 1993, 9(8): 889-905.
- [10] Khan A S, Kazmi R, Pandey A, et al. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part I: a very low work hardening aluminum alloy (Al6061-T 6511). *International Journal of Plasticity*, 2009, 25(9): 1611-1625.
- [11] Khan A S, Pandey A, Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part II: a very high work hardening aluminum alloy (annealed 1100 Al). *International Journal of Plasticity*, 2010, 26(10): 1421-1431.
- [12] Khan A S, Pandey A, Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part III: yield surface in tension-tension stress space (Al 6061-T 6511 and annealed 1100 Al). *International Journal of Plasticity*, 2010, 26(10): 1432-1441.
- [13] Kuwabara T, Ikeda S, Kuroda K. Measurement and analysis of differential work hardening in cold-rolled steel sheet under biaxial tension. *Journal of Materials Processing Technology*, 1998, 80-81: 517-523.
- [14] Kuwabara T, Kuroda M, Tvergaard V, et al. Use of abrupt strain path change for determining subsequent yield surface: experimental study with metal sheets. *Acta Materialia*, 2000, 48(9): 2071-2079.
- [15] Kuwabara T. Advances in experiments on metal sheets and tubes in support of constitutive modeling and forming simulations. *International Journal of Plasticity*, 2007, 23(3): 385-419.
- [16] Barlat F, Brem J C, Yoon J W, et al. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—Part 1: theory. *International Journal of Plasticity*, 2003, 19(9): 1297-1319.
- [17] Korkolis Y P, Kyriakides S. Inflation and burst of aluminum tubes. Part II: an advanced yield function including deformation-induced anisotropy. *International Journal of Plasticity*, 2008, 24(9): 1625-1637.
- [18] Peeters B, Kalidindi S R, Teodosiu C, et al. A theoretical investigation of the influence of dislocation sheets on evolution of yield surfaces in single-phase B. C. C. polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2002, 50(4): 783-807.
- [19] Kowalczyk K, Gambin W. Model of plastic anisotropy evolution with texture-dependent yield surface. *International Journal of Plasticity*, 2004, 20(1): 19-54.
- [20] Deng S C, Liu J X, Liang N G, et al. Validation of component assembly model and extension to plasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2007, 47(3): 244-259.
- [21] Zhang J, Liang N G, Deng S C, et al. Study of the damage-induced anisotropy of quasi-brittle materials using the component assembling model. *International Journal of Damage Mechanics*, 2008, 17(3): 197-221.
- [22] Deng S C, Liang N G, Lu H X. The elasto-damage theory of the components assembling model. *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*, 2009, 52(1): 1-12.
- [23] Liang N G, Liu H Q, Wang T C. A meso elastoplastic constitutive model for polycrystalline metals based on equivalent slip systems with latent hardening. *Science in China: Series A*, 1998, 41(8): 887-896.
- [24] Fu Q, Liu F, Zhang J, et al. A physically motivated model for the evolution of subsequent yield surfaces. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(5): 880-888. (in Chinese)
- 付强, 刘芳, 张晶, 等. 一种基于物理机制的后继屈服面演化模型. *力学学报*, 2010, 42(5): 880-888.

- [25] Liu F, Fu Q, Chen C, et al. An elasto-plastic damage constitutive theory based on Pair functional potentials and slip mechanism. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2010, 23(6): 686-697.
- [26] Liu F, Fu Q, Chen C, et al. An elasto-plastic damage constitutive theory and its prediction of evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants. *International Journal of Plasticity*, 2011, 27(9): 1355-1383.
- [27] Fu Q, Liu F, Chen C, et al. A study on the evolution of subsequent yield surfaces with finite deformation. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(11): 23-30. (in Chinese)  
付强, 刘芳, 陈岑, 等. 有限变形下的后继屈服面演化规律研究. *工程力学*, 2011, 28(11): 23-30.

Tel: 010-82543962  
E-mail: chencen@lnm.imech.ac.cn

刘芳 女, 博士。主要研究方向: 材料弹塑性损伤本构关系。

Tel: 010-82543962  
E-mail: liufang@lnm.imech.ac.cn

付强 男, 博士, 工程师。主要研究方向: 材料弹塑性损伤本构关系。

Tel: 010-82543962  
E-mail: fuhchiang@gmail.com

洪友士 男, 博士, 研究员, 博士生导师。主要研究方向: 材料力学性能与内部结构。

Tel: 010-82543966  
E-mail: hongys@imech.ac.cn

作者简介:

陈岑 女, 博士研究生。主要研究方向: 材料弹塑性损伤本构关系及其应用。

## Investigation of Subsequent Yield Surface Evolution Under Biaxial Tension

CHEN Cen<sup>1</sup>, LIU Fang<sup>2</sup>, FU Qiang<sup>3</sup>, HONG Youshi<sup>1</sup>, \*

1. LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

2. School of Transportation, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China

3. China National Light Weight Gas Turbine Development Center, Beijing 100009, China

**Abstract:** The shape and position of the yield surface of a metallic material have a direct bearing on the determination of its plastic deformation. In this paper, the evolution of the yield surface in a tension-tension stress space is investigated based on the elasto-plastic damage constitutive theory as an endeavor to understand the plastic behavior of metallic materials under biaxial tension. The initial yield surface (IYS) and subsequent yield surfaces are predicted with the consideration of the finite deformation effect and the mixed hardening effect, which shows the vertex effect in the forward part, Bauschinger effect in the rear part, and expansion/contraction, translation and distortion of the subsequent surfaces. For a low work hardening aluminum alloy (Al 6061-T 6511) and a high work hardening aluminum alloy (annealed 1100 Al) under axial, hoop, and combined axial and hoop loading, the theoretical prediction is favorably compared with the experimental results in the literature. The physical mechanism of the evolution of subsequent yield surfaces is elucidated. It provides a feasible method to study the evolution of subsequent yield surfaces.

**Key words:** component assembling model; evolution of subsequent yield surfaces; mixed hardening effect; vertex effect; Bauschinger effect

Received: 2011-12-28; Revised: 2012-02-08; Accepted: 2012-02-21; Published online: 2012-03-20 11:02

URL: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20120320.1102.009.html

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (11021262)

\* Corresponding author. Tel.: 010-82543966 E-mail: hongys@imech.ac.cn