

文章编号: 1005-9865(2012)01-0018-07

海流作用下子母管结构横向涡激振动

崔金声, 高福平, 韩希霆, 臧志鹏

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘要: 基于量纲分析, 设计模型试验研究稳态海流作用下子母管结构的横向涡激振动。通过对结构横向振动位移、水动力载荷和流速的同步测量分析, 研究子母管结构横向涡激振动幅值和频率随约减速度的变化规律以及母管的水动力特性。实验结果表明, 子母管间距比和质量比对管道横向振动和水动力有较大影响。在管间距比为 0.1~0.5 范围内, 子母管结构涡激振动存在明显的不对称性。随着子母管间距比的减小, 结构横向最大振幅增大, 涡激振动的约减速度范围变宽; 随着质量比的增大, 涡激振动的约减速度范围变窄。母管的平均阻力系数随子母管间距比的增大单调递减, 而平均升力系数则呈现非单调变化的特征。

关键词: 海流; 子母管; 涡激振动; 升力系数; 阻力系数

中图分类号: P751 **文献标识码:** A

Vortex-induced transverse vibration of piggyback pipelines in steady current

CUI Jin-sheng, GAO Fu-ping, HAN Xi-ting, ZANG Zhi-peng

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Based on dimensionless analyses, the vortex-induced transverse vibration of piggyback pipelines under the action of ocean currents is investigated experimentally with a newly designed facility. In the experiments, the transverse vibration displacement of the piggyback pipelines, the hydrodynamic pressure around the primary pipe, and the inlet flow velocity are measured synchronously. The variations of vibration amplitude and frequency responses with the reduced flow velocity, and the hydrodynamic pressure on the primary pipe are studied, respectively. Experimental results indicate that the dimensionless gap-to-diameter ratio and the mass ratio have much effect on the transverse vibrations of piggyback pipelines. The asymmetry of the transverse vibration configuration for piggyback pipelines was observed, especially for the examined gap-to-diameter ratio range from 0.1 to 0.5. With the decrease of the gap-to-diameter ratio, the maximum value of transverse vibration amplitude increases and the range of the reduced flow velocity gets wider. With the increase of the mass ratio, the range of the reduced flow velocity gets narrower. The mean drag coefficient decreases monotonously with the increase of the gap-to-diameter ratio, while the variation of the mean lift coefficient with the gap-to-diameter ratio is not monotonous.

Key words: ocean current; piggyback pipelines; vortex-induced vibration; mean drag coefficient; mean lift coefficient

在海洋油气开采工程中, 为满足不同介质运输或信号监测、通信等的需要, 海底管道有时会以不同直径的多束管道型式捆绑铺设于海床上。目前, 比较常见的捆绑管束包括一根大直径的母管和一根(或几根)小直径的子管, 通常称作“子母管”(piggyback pipelines), 如图 1 所示。通常, 子管与母管沿管道轴线方向每隔一段距离通过夹具相连; 两管道之间要么完全接触, 要么存在一定间隙。

近二十年来, 国内外学者对子母管结构水动力特性开展了实验与数值研究。李玉成等人^[1]对波流共同作用下的子母管水动力特性进行研究, 发现子母管的阻力系数随 KC 数的增加而减小。Kalghatgi and Say-

收稿日期: 2011-04-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50509022); 中国科学院“十一五”知识创新工程重要方向资助项目(KJXC2-YW-L07)

作者简介: 崔金声(1984-), 男, 黑龙江哈尔滨人, 工学硕士, 主要从事流固耦合力学研究。E-mail: cuijinsheng1984@gmail.com

通信作者: 高福平。E-mail: fpgao@imech.ac.cn

er^[2] 实验研究了单向流作用下管床间隙比对于子母管结构阻力(拖曳力)系数及升力系数的影响。Kamarudin and Thiagarajan^[3] 数值模拟研究了子管相对于母管不同位置对阻力系数及升力系数的影响。其研究表明,相对于来流方向,当子管位于母管正上方时,阻力最大而升力最小;当位于正前方或正后方时,阻力最小;而当位于前后的位置时,则升力最大。Zhao 等人^[4] 数值模拟了壁面附近子母管结构周围的流场和水动力,分析了管间距比及管床间隙比对于子母管结构的涡脱落、阻力系数及升力系数的影响:平均阻力系数随管间距比的增大而减小,平均升力系数随管间距比的增大而增大。上述关于子母管结构的研究主要针对固定子母管情况,而对于子母管结构涡激振动响应的研究还不够深入。

涡激振动是诱发海底管道疲劳断裂的主要原因,是海洋工程关注的热点问题。Feng^[5] 较早通过模型实验研究了空气中刚性圆柱的横向涡激振动特性,分别描述了振动振幅和频率随约减速度的变化规律。Anand^[6] 实验研究了水中圆柱的横向涡激振动响应,发现在频锁阶段振动频率并没有明显“锁定”在固有频率上,而是随约减速度缓慢增长。Sumer 等人^[7] 对波流作用下近壁面振动管道的水动力特性进行了实验研究,发现管道在横向振动时所受阻力和升力均大于固定管道,近壁面附近升力的增大更明显。Govardhan and Williamson^[8] 实验研究了远离壁面条件下圆柱涡激振动幅频响应、尾涡模式等,并将涡激振动幅值随约减速度的变化过程分为三个阶段,每一阶段对应不同的尾涡模式。Yang 等人^[9] 详细讨论了质量比和间隙比等参数对近刚性壁面管道涡激振动的影响。海底管道一般直接铺设在海床上,周围海床的冲刷对管道涡激振动的影响不能忽视。Gao 等人^[10] 通过涡激振动与土体冲刷耦合试验,分析研究了管道从“悬空起动”到“涡激振动触发”,最后达到“极限平衡状态”的整个动力过程。在数值模拟研究方面,何长江和段忠东^[11] 采用动网格的动态层铺模型和滑移网格模型并基于 FLUENT 软件,建立了圆柱横流向涡激振动的计算模型。Zhao and Cheng^[12] 数值模拟分析了海流中振动管道附近的局部冲刷规律。然而,以上关于管道振动和冲刷的研究主要针对“单一管道”结构型式。对于“子母管”结构而言,子管的存在会使母管周围的流场发生改变,进而影响管道所受水动力及涡激振动特性。

将基于量纲分析设计模型实验,研究单向流作用下远离壁面子母管结构的横向涡激振动和水动力特性。采用有机玻璃管制作模型,安装于振动支架的底部,放置于实验水槽内;母管表面布置微型压力传感器测量表面压力,经过积分得到母管所受阻力及升力;激光位移传感器测量子母管结构横向振动位移,经过 FFT 得到振动频率。研究中改变流速、子母管管间距、质量比等因素,探讨它们对子母管结构涡激振动的影响。

1 量纲分析

海流载荷作用下“子母管”结构涡激振动响应是流体与结构之间的动力耦合作用的宏观表征。子母管结构振动幅值(A)、振动频率(f)以及母管所受阻力(\bar{F}_D)和升力(\bar{F}_L)分别与流体和结构的主要特征物理参量相关:

$$A = \lambda_1(\rho, U, \mu, D, d, \delta, m, f_n, c) \tag{1}$$

$$f = \lambda_2(\rho, U, \mu, D, d, \delta, m, f_n, c) \tag{2}$$

$$\bar{F}_D = \lambda_3(\rho, U, \mu, D, d, \delta, m, f_n, c) \tag{3}$$

$$\bar{F}_L = \lambda_4(\rho, U, \mu, D, d, \delta, m, f_n, c) \tag{4}$$

式中: ρ 为流体密度, U 为流速, μ 为流体动力粘滞系数, D 为母管管径, d 为子管管径, δ 为子母管间距, m 为子母管单位长度质量, f_n 为子母管水中固有频率, c 为子母管结构的阻尼系数。这里仅考虑子管位于母管正上方的情况(见图 1),即不考虑子管和母管之间的空间偏角。

根据 Buckingham Π 定理,选取 D, U, ρ 三个相互独立的物理量为基本量,则子母管无量纲振幅(A/D)、无量纲振动频率(f/f_n)、阻力系数(\bar{C}_D)、升力系数(\bar{C}_L)可分别表达为如下无量纲量的函数,即

$$A/D = \lambda'_1(\delta/D, \zeta, Re, m^*, Vr, d/D) \tag{5}$$

$$f/f_n = \lambda'_2(\delta/D, \zeta, Re, m^*, Vr, d/D) \tag{6}$$

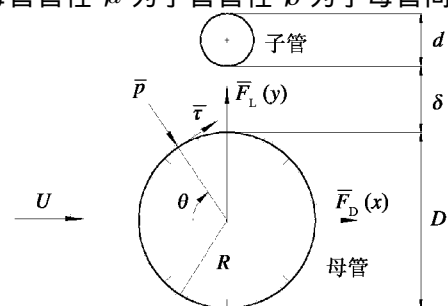


图 1 子母管结构示意图

Fig. 1 Configuration of piggyback pipelines

$$\bar{C}_D = \lambda'_3(\delta/D, \zeta, Re, m^*, Vr, d/D) \quad (7)$$

$$\bar{C}_L = \lambda'_4(\delta/D, \zeta, Re, m^*, Vr, d/D) \quad (8)$$

式中: δ/D 为子母管间距比; $\zeta = c/4\pi m f_n$ 为结构阻尼比; $Re = \rho U D / \mu$ 为雷诺数; $m^* = 4m / \pi \rho D^2$ 为结构质量比; $Vr = U / f_n D$ 为约减速度; d/D 为子母管的管径比; 阻力系数 $\bar{C}_D = \bar{F}_D / 0.5 \rho D U^2$; 升力系数 $\bar{C}_L = \bar{F}_L / 0.5 \rho D U^2$ 。

2 “子母管”涡激振动实验装置

试验水槽为中国科学院力学所流固耦合综合模拟水槽,该水槽尺寸为 $52 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}$ (长 \times 宽 \times 高)。基于上述量纲分析,专门设计了“子母管”结构涡激振动试验装置,如图2所示。“子母管”模型采用有机玻璃管制作,母管管道模型外径 80 mm ,壁厚 5 mm ,长 960 mm ,内部可添加配重以改变模型质量比(m^*);子管模型为直径 20 mm 的有机玻璃棒。“子母管”结构模型通过轻质滑杆和弹簧系统与水平横杆固定支架连接;两侧的滑轮限位装置使滑杆只在竖直方向上运动,即实现模型横向单自由度振动。

子母管结构涡激振动采用激光位移传感器进行测量。通过对结构振动时程变化进行快速傅立叶变换可分析得到模型振动频率。为测量管道模型受到的动水压力,沿母管周向等间距布置了8个微型压力传感器,压力传感器探头表面与管道外表面齐平。使用超声波多普勒测速仪测量流速,测量点位于管道模型正前方约 3 m 处。流速变化范围 $0.0 \sim 0.8 \text{ m/s}$,实验水深 0.5 m 。在试验过程中,对上述管道振动位移、管道动水压力和来流速度等参数进行多通道信号同步采集,便于对子母管结构涡激振动的流固耦合分析。

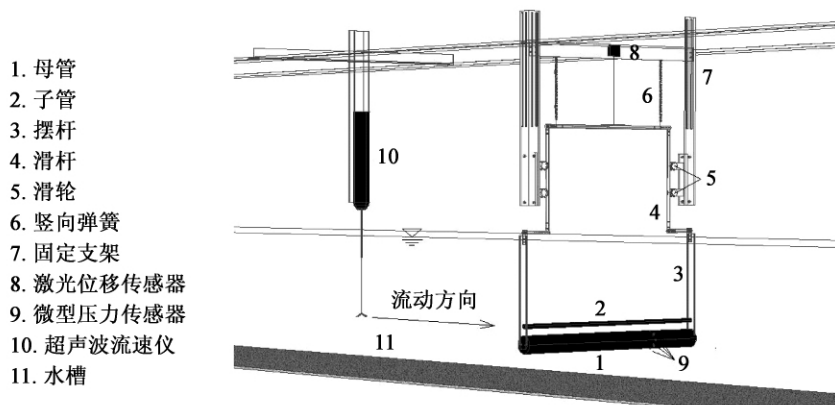


图2 子母管涡激振动实验装置示意

Fig. 2 Experimental setup for VIV of piggyback pipelines

3 实验结果分析

3.1 子母管结构涡激振动振幅和频率响应

图3给出了不同子母管管间距比条件下,“子母管”结构横向涡激振动位移(a_y)随流速(U)的变化曲线。实验参数条件:母管外径 $D = 80 \text{ mm}$,子管外径 $d = 20 \text{ mm}$,结构质量比 $m^* = 1.48$,结构固有频率 $f_n = 0.603 \text{ Hz}$,阻尼比 $\zeta = 0.067$,流速变化范围 $U = 0.0 \sim 0.8 \text{ m/s}$ 。在“子母管”结构远离壁面或管床间隙比较大 ($> 1.0 D$) 条件下,单独母管($\delta/D \approx \infty$)的横向涡激振动具有对称性,即向上和向下的振幅基本相同,如图3(a)所示。随着子母管间距比的减小,尤其在 $0.1 < \delta/D < 0.5$ 范围内,子母管结构涡激振动的不对称性趋于明显,如图3(c)所显示的 $\delta/D = 0.25$ 的情况。而当子母管间距趋近于零时(即子母管壁面接触时),涡激振动的不对称性有所减弱,如图3(d)所示。当子母管间距减小时,特别是当子母管完全接触时,子母管结构可视为等效直径增大且上下非对称的圆柱体。可见,子母管间距比的变化对子母管涡激振动有较大影响。

图4给出了子母管间距比 δ/D 对横向振动无量纲振幅 A/D 及无量纲振动频率 f/f_n 随约减速度 Vr 变化的影响。由图4(a)可知,子母管结构涡激振动触发的约减速度基本都在 $Vr = 3.5 \sim 4.5$ 之间,但是管间距比对最大振幅和振动范围有较大影响。分析振幅曲线可以看出,管间距比 $\delta/D = 0.5$ 和 0.375 时的子母管最大振幅与单独母管($\delta/D \approx \infty$)的最大振幅相当,均在 $0.69D \sim 0.73D$ 之间;随着管间距比的减小,子母管最大

振幅在 $\delta/D=0.25、0.125$ 和 0 时分别达到 $0.8D、0.82D$ 和 $0.9D$, 最大振幅总体上呈现增大的趋势。同时, 管间距比 $\delta/D=0.5$ 和 0.375 时的子母管涡激振动所对应的约减速度范围与单独母管 ($\delta/D \approx \infty$) 相近, 随着管间距比的减小, 涡激振动所对应的约减速度范围也逐步扩大。在实验速度范围内 ($0 < U < 0.8 \text{ m/s}$) 较小间隙比条件时没有观察到明显的振幅减小。由图 4 (b) 可以看出, 子母管间隙比 δ/D 对横向振动无量纲频率的影响不大, 涡激振动频率变化规律基本一致: 子母管横向振动无量纲频率 f/f_n 随 V_r 数增加而增大, 且在起振的阶段, 振动频率在 Strouhal 频率附近; 随着流速的增加, 振动频率逐渐偏离并小于 Strouhal 频率。

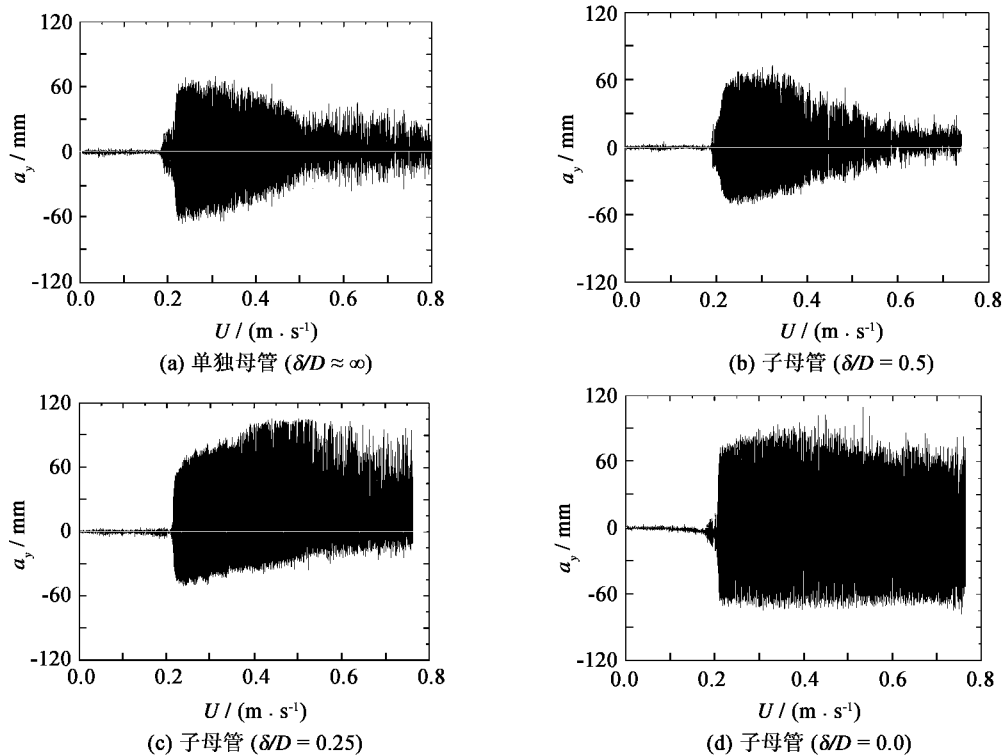


图 3 不同管间距比条件下管道横向位移随流速的变化 ($D=80 \text{ mm}$, $d/D=0.25$, $m^*=1.48$, $f_n=0.603 \text{ Hz}$, $\zeta=0.067$)

Fig. 3 Development of VIV amplitudes with velocity for various gap-to-diameter ratios ($D=80 \text{ mm}$, $d/D=0.25$, $m^*=1.48$, $f_n=0.603 \text{ Hz}$, $\zeta=0.067$)

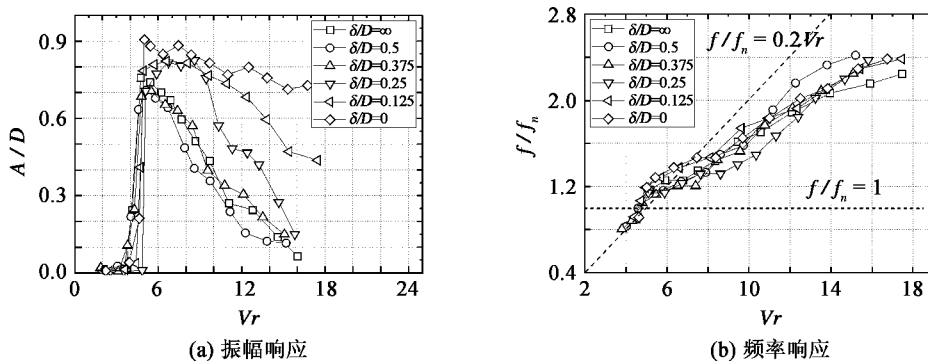


图 4 不同管间距比条件下管道横向振幅及频率响应 ($D=80 \text{ mm}$, $d/D=0.25$, $m^*=1.48$, $f_n=0.603 \text{ Hz}$, $\zeta=0.066$)

Fig. 4 Transversal VIV amplitude and frequency response for various gap-to-diameter ratios ($D=80 \text{ mm}$, $d/D=0.25$, $m^*=1.48$, $f_n=0.603 \text{ Hz}$, $\zeta=0.066$)

图 5 给出了子母管质量比 m^* 对横向振动无量纲振幅 A/D 及无量纲频率 f/f_n 随约减速度 V_r 变化情况。由图 5 (a) 可知, 随着质量比增大, 子母管结构涡激振动所在的约减速度范围减小, 即结构涡激振动时受流体作用力的影响减小。由图 5 (b) 可以看出, 在所模拟的小质量比范围内 ($1.17 < m^* < 1.48$), 质量比参数对涡激振动频率随约减速度变化规律的影响较小。

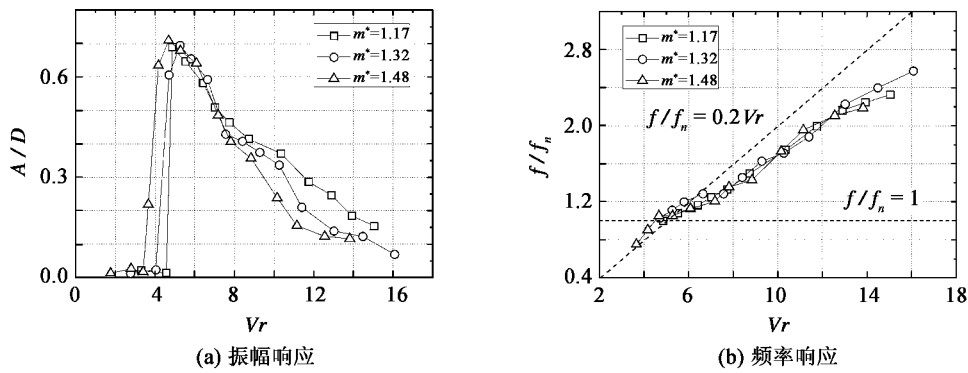


图5 不同质量比条件下子母管横向振幅及频率响应($D=80\text{ mm}$, $d/D=0.25$, $\delta/D=0.5$)

Fig. 5 Transversal VIV amplitude and frequency response for various mass ratios ($D=80\text{ mm}$, $d=0.25$, $\delta/D=0.5$)

3.2 子母管结构的水动力特性

对于子母管结构而言,人们还关注子管的存在对母管所受水动力载荷特性的影响。柱体水动力可分解为水平阻力和垂向升力,主要来自于压差阻力和摩擦阻力的贡献。对于水平阻力而言,母管单位长度上由于动水压力引起的平均流向力为 $\bar{F}_p = \int_0^{2\pi} p \cos(\theta) R d\theta = \int_0^{2\pi} (\bar{p} - p_0) \cos(\theta) R d\theta$, 其中 \bar{p} 为总水压力, p_0 为静水压力, θ 为受力点法向方向与水平方向夹角, R 为母管半径,如图1所示。单位长度上由摩擦力引起的平均流向力为 $\bar{F}_f = \int_0^{2\pi} \bar{\tau} \sin(\theta) R d\theta$, 其中 $\bar{\tau}$ 为母管所受流体摩擦力。母管所受平均阻力即以上二者之和,即 $\bar{F}_D = \bar{F}_p + \bar{F}_f = \int_0^{2\pi} [(\bar{p} - p_0) \cos\theta + \bar{\tau} \sin\theta] R d\theta$ 。Achenbach^[13] 研究表明, $Re \geq 10^4$ 时,由摩擦力引起的流向力只占全部阻力的2%~3%,因此可略去摩擦阻力项,即母管所受平均阻力可表示为

$$\bar{F}_D \approx \int_0^{2\pi} (\bar{p} - p_0) \cos(\theta) R d\theta \quad (9)$$

同理,平均升力的表达式为

$$\bar{F}_L \approx \int_0^{2\pi} (\bar{p} - p_0) \sin(\theta) R d\theta \quad (10)$$

母管单位长度上所受平均阻力 \bar{F}_D 及升力 \bar{F}_L 可由式(11、12)计算:

$$\bar{F}_D \approx \sum_{i=1}^8 (\bar{p}_i - p_{i0}) \cos\theta_i R \Delta\theta \quad (11)$$

$$\bar{F}_L \approx - \sum_{i=1}^8 (\bar{p}_i - p_{i0}) \sin\theta_i R \Delta\theta \quad (12)$$

式中: i 表示压力传感器的编号, \bar{p}_i 为第 i 个传感器总压强, p_{i0} 为第 i 个传感器静水压强, θ_i 为第 i 个传感器表面压力点法向方向与水平方向夹角, R 为母管半径, $\Delta\theta$ 为圆周等分后的角度(本实验中为8等分,即 $\Delta\theta = \pi/4$)。规定流动方向为 x 轴正向,垂直于底面指向水面方向为 y 轴正向,阻力正向为 x 轴正向,升力正向为 y 轴正向,如图1所示。

图6给出了子母管中母管的平均升力系数及平均阻力系数随 Re 数和管间距比的变化。随着 Re 数的增大,各管间距比条件下的平均阻力系数 \bar{C}_D 均逐渐减小(见图6(a))。对比分析图中曲线可知,子母管中母管的平均阻力系数大于单独母管($\delta/D \approx \infty$)的,而振动管道的平均阻力系数大于单独固定母管的。随着 Re 数的增大,各管间距比条件下的母管的平均升力系数 \bar{C}_L 的绝对值总体上均呈现减小的趋势,如图6(b)所示。对于子母管,管间距比 δ/D 越小,平均阻力系数 \bar{C}_D 越大,以 $Re = 3.5 \times 10^4$ 为例, $\delta/D=0$ 时的 \bar{C}_D 是 $\delta/D=0.5$ 时的1.5倍,其他 Re 数时大约在1.3~1.6倍之间,如图6(c)所示。管间距比 δ/D 对平均升力系数 \bar{C}_L 的影响如图6(d),由图可知,当 $\delta/D=0$ 时, $\bar{C}_L < 0$,母管所受平均升力为负,方向向下;当 $\delta/D \geq 0.125$ 时, \bar{C}_L 在0附近,基本上大于0,母管所受平均升力为正,方向向上。在图6(d)中,当 $Re = 2.5 \times 10^4 \sim 3.5 \times 10^4$ 时,管间距比 $\delta/D=0.25$ 的母管 \bar{C}_L 最大,受到向上的升力最大。不同于平均阻力系数,平均升力系数在 $\delta/D=0.0 \sim 0.5$ 范围内随子母管间距比呈非单调变化趋势。

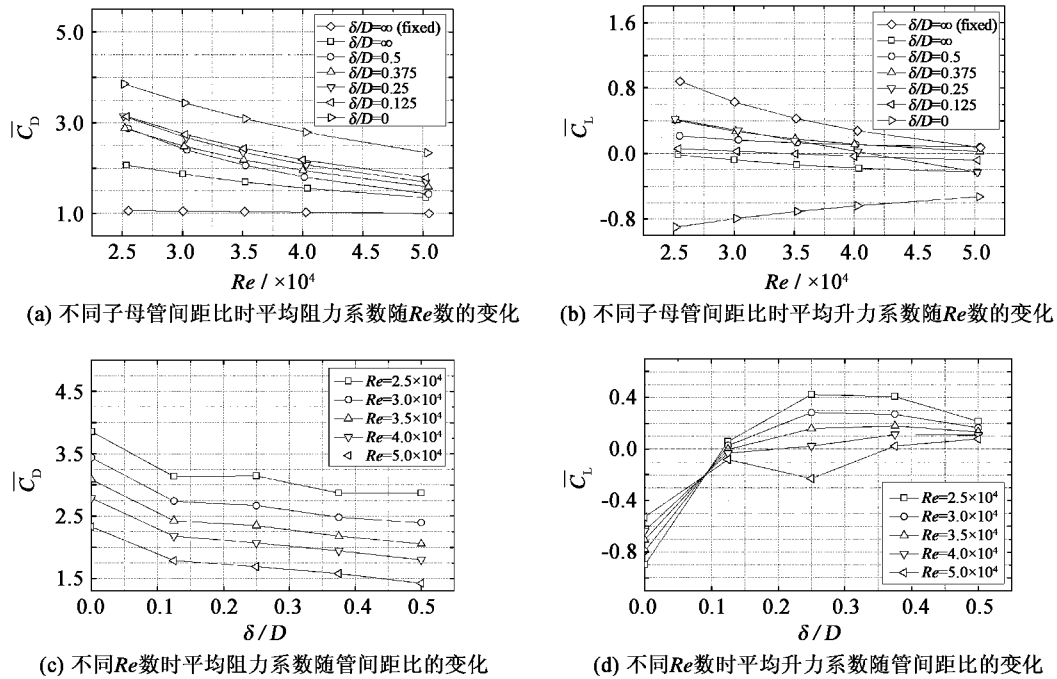


图 6 不同条件下子母管结构母管上的平均阻力系数和平均升力系数 ($D = 80 \text{ mm}$, $d/D = 0.25$, $m^* = 1.48$, $f_n = 0.603 \text{ Hz}$, $\zeta = 0.066$)

Fig. 6 Mean drag coefficient and mean lift coefficient on the primary cylinder for various Reynolds numbers and various gap-to-diameter ratios ($D = 80 \text{ mm}$, $d/D = 0.25$, $m^* = 1.48$, $f_n = 0.603 \text{ Hz}$, $\zeta = 0.066$)

4 结 语

对单向流作用下远离壁面的子母管结构横向涡激振动进行实验模拟, 研究了子母管结构横向涡激振动的振幅、振动频率及母管所受阻力、升力的变化特性, 并与单独管道的涡激振动特性进行对比分析, 主要结论如下:

1) 随着流速的增加, 子母管结构横向振动出现在 $Vr = 4.0 \sim 4.5$ 附近, 振幅迅速达到最大值, 大约 $0.7D \sim 0.9D$ 之间, 此后逐渐减小。在起振阶段 ($Vr = 4.0 \sim 6.0$) 振动频率在 Strouhal 频率附近, 而后随着流速的增加, 振动频率逐渐偏离并小于 Strouhal 频率。

2) 通常, 子母管结构横向涡激振动具有明显的不对称性。子母管结构的向上振幅 (偏向子管方向) 明显大于向下的振幅, 特别是在子母管间距比 $\delta/D = 0.1 \sim 0.5$ 时, 振动不对称性尤为明显。当子管与母管的管间距趋于 0 时, 振动不对称性有所减弱。

3) 子母管的管间距比 δ/D 及质量比 m^* 影响子母管的横向涡激振动特性。随着子母管间距比的减小, 最大振幅呈现增大的趋势, 振动对应的约减速度范围变宽。在所研究的小质量比范围内 ($1.17 < m^* < 1.48$) 随着质量比增大, 振动对应的约减速度范围变窄; 管间距比和质量比对子母管无量纲振动频率的影响较小。

4) 母管的平均阻力系数 \bar{C}_D 随管间距比 δ/D 的减小而增大, 随 Re 数的增大而减小, 并且振动子母管中母管的 \bar{C}_D 大于单独振动母管的 \bar{C}_D , 振动管道的 \bar{C}_D 大于单独固定管道的 \bar{C}_D 。当 $\delta/D = 0$ 时, $\bar{C}_L < 0$; 当 $\delta/D \geq 0.125$ 时, \bar{C}_L 在 0 附近, 基本上大于 0。随着 Re 数的增大, 母管的平均升力系数 \bar{C}_L 绝对值减小。平均升力系数在 $\delta/D = 0.0 \sim 0.5$ 范围内随子母管间距比呈非单调变化趋势。

参考文献:

- [1] 李玉成,张宁川,孙 娟. 波流共同作用下近底子母管线的水动力特征[J]. 水动力学研究与进展: A 辑,1994,9(1): 51-59.
- [2] Kalghatgi S G, Sayer P G. Hydrodynamic forces on piggyback pipeline configurations[J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 1997, 123(1): 16-22.
- [3] Kamarudin M H, Thiagarajan K P. Analysis of current-induced forces on offshore pipeline bundles [C] // Fifth International Conference on CFD in the Process Industries. 2006.
- [4] Zhao M, Cheng L, Teng B. Numerical modeling of flow and hydrodynamic forces around a piggyback pipeline near the seabed [J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 2007, 133(4): 286-295.
- [5] Feng C C. The Measurement of Vortex-Induced Effects on Flow Past Stationary and Oscillating Circular and D-Section Cylinders [D]. Vancouver, Canada: The University of British Columbia, 1968.
- [6] Anand N M. Free Span Vibrations of Submarine Pipelines in Steady and Wave Flows [D]. Thondheim, Norway: The Norwegian Institute of Technology, 1985.
- [7] Sumer B M, Fredsøe J, Jensen B L, et al. Forces on vibrating cylinder near wall in current and waves [J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 1994, 120(3): 233-250.
- [8] Govardhan R, Williamson C H K. Modes of vortex formation and frequency response of a freely vibrating cylinder [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2000, 420: 85-130.
- [9] Yang B, Gao F P, Wu Y X, et al. Experimental study on vortex-induced vibrations of submarine pipeline near seabed boundary in ocean currents [J]. China Ocean Engineering, 2006, 20(1): 113-121.
- [10] Gao F P, Yang B, Wu Y X, et al. Steady current induced seabed scour around a vibrating pipeline [J]. Applied Ocean Research, 2006, 28: 291-298.
- [11] 何长江,段忠东. 二维圆柱涡激振动的数值模拟[J]. 海洋工程, 2008, 26(1): 57-63.
- [12] Zhao M, Cheng L. Numerical investigation of local scour below a vibrating pipeline under steady currents [J]. Coastal Engineering, 2010, 57(4): 397-406.
- [13] Achenbach E. Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to $Re = 5 \times 10^5$ [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1968, 34(4): 625-639.