

文章编号: 1000-4750(2012)08-0063-08

# 柱间有相对运动坐底圆柱群的绕射-辐射分析

曾晓辉, 梁荣娣

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

**摘 要:** 圆柱群是深海海工建筑物的主要承力结构。目前对圆柱群进行的水动力分析大多考虑将圆柱群作为一个整体的情况, 即柱群中各柱无相对运动; 对于柱间有相对运动圆柱群的研究较少。为此, 采用精确代数法研究柱间有相对运动坐底直立圆柱群的绕射-辐射问题。首先开展了柱群中各圆柱做给定单独运动的辐射分析; 之后在有入射波浪的情况下, 分析了各柱有相对运动圆柱群的绕射-辐射问题; 进而求得各圆柱上的水动力、振动幅值等量。作为验证, 先将退化情况的结果与已有文献进行了对比。进一步的计算结果表明, 在某些波数下, 分析中是否考虑柱间相对运动对结果影响较大。

**关键词:** 圆柱群; 相对运动; 辐射; 绕射; 水动力相互作用

中图分类号: P751; O352 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2010.11.0827

## THE DIFFRACTION-RADIATION BY ARRAYS OF BOTTOM-SEATED CIRCULAR CYLINDERS WITH RELATIVE MOTION AMONG CYLINDERS

ZENG Xiao-hui, LIANG Rong-di

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** The cylinder arrays are main load-carrying structures in offshore engineering. Most analyses on the hydrodynamics of cylinder arrays usually consider the instance that cylinder arrays react to loads as one whole body, namely that there is no relative movements between each cylinder of the arrays. Analysis on arrays of cylinders, among which relative motions occur, is comparatively rare. Therefore, the diffraction-radiation problem of arrays of bottom-seated vertical circular cylinders with relative motions among cylinders is analyzed by an exact algebraic method in this paper. Firstly, the radiation problem of cylinder arrays among which each cylinder moves with prescribed independent amplitude is studied. Then the diffraction-radiation problem of cylinder arrays with relative movement in the presence of incident waves is analyzed. In addition, the hydrodynamic forces on the cylinders and oscillation amplitudes of each cylinder are obtained. As a validation, the degenerate case is calculated and compared with the published one. And further calculations indicate that the influences of the relative movements among cylinders on the hydrodynamic responses are obvious in some range of wave numbers.

**Key words:** cylinder arrays; relative motion; radiation; diffraction; hydrodynamic interaction

近些年来, 海洋资源开发利用已经成为我国备受关注的战略问题之一, 而圆柱或圆柱群式结构物是进行海洋开发时经常采用的一类关键结构。无论是作为钻井和采油支撑结构物的深海平台(张力腿

平台、半潜式平台或 SPAR 平台)、承载海上风机的浮式基础、振子式波浪发电单元<sup>[1]</sup>, 还是作为海上机场等超大建筑物的浮体结构, 圆柱群均是其中的主要组成部分。

收稿日期: 2010-11-15; 修改日期: 2011-02-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072246, 10702073); 国家 863 计划项目(2006AA09Z350)

通讯作者: 曾晓辉(1972—), 男, 湖南新化人, 副研究员, 博士, 主要从事深海平台水动力和动力响应研究(E-mail: zxh@imech.ac.cn).

作者简介: 梁荣娣(1985—), 女, 天津人, 硕士生, 主要从事深海平台水动力和动力响应研究(E-mail: liangrongdi@imech.ac.cn).

按照所属具体海洋建筑物的不同,圆柱群又可以分为柱间无相对运动和柱间有相对运动两种。对于深海平台、风机浮式基础等海工建筑物,由于圆柱之间有很强的刚性连接,此时在波浪作用下的圆柱群可视为一个整体进行运动,所以可将其归类于柱间无相对运动的圆柱群;而对于振子式波浪发电单元、海上机场等海工建筑物,考虑到各圆柱之间或者没有连接,或者连接不能视为刚性,这时波浪作用下的圆柱群不能再作为一个整体进行分析而需考虑柱间相对运动,因此将这些海工结构归类为柱间有相对运动圆柱群。

对于穿透水面的直立圆柱群,当其贯穿至海底或深入水下时,可以模型化为坐底圆柱群。坐底圆柱和圆柱群的绕辐射问题已有不少学者开展了研究。McCamy 和 Fuchs(可见文献[2])给出了大直径单个坐底圆柱线性绕射问题的解析解,这也成为后续圆柱群分析的基础之一。进一步,考虑柱间的水动力相互作用,学者们研究了圆柱群的绕射问题。Spring 和 Monkmeyer<sup>[3]</sup>用直接矩阵法给出了坐底柱群绕射问题的解析解,Ohkusu<sup>[4]</sup>采用多次绕射的方法研究了同样问题。Simon<sup>[5]</sup>忽略快速衰减的局部波,引入了基于大间距假设的平面波法。McIver 和 Evans<sup>[6]</sup>对 Simon 的方法进行了发展,采用改进平面波法研究了坐底柱群绕射问题。Linton 和 Evans<sup>[7]</sup>改进了 Spring 和 Monkmeyer 提出的直接矩阵法,将柱群中每个单柱周围的波幅同时解出,得到了速度势的简洁形式。Maniar 和 Newman<sup>[8]</sup>, Evans 和 Porter<sup>[9]</sup>分别利用相互作用理论进一步研究了坐底柱群绕射问题。Oguz Yilma<sup>[10]</sup>提出了利用迭代的方法求柱群绕射解, Duclos<sup>[11]</sup>分析了不规则分布的坐底柱群绕射问题。Walker 和 Eatock Taylor<sup>[12-13]</sup>研究了入射波为新波(New Wave)的圆柱群绕射问题,并分析了带沉箱坐底圆柱群的绕射。Kim<sup>[14]</sup>将 Linton 和 Evan 的方法扩展到了坐底柱群的辐射问题。Siddorn 和 Eatock Taylor<sup>[15]</sup>分析了柱间有给定相对运动圆柱群的辐射问题。除文献[15]外,目前的研究多是将圆柱群作为一个整体,因此所研究的对象实际上大多是柱间无相对运动圆柱群,对于柱间有相对运动圆柱群的问题还值得深入探讨。还需要注意的是:文献[15]分析的只是各柱做给定相对运动圆柱群的辐射问题,而在入射波作用下,各圆柱的运动幅度是待求的未知量而不是给定值。对于这种入射波作用下有相对运动圆柱群的绕射-辐射

问题,目前还未见到有研究发表。

本文研究了入射波作用下,柱间有相对运动坐底圆柱群的绕射-辐射问题,给出了解析分析方法,进而计算了几种圆柱群的速度势、水动力和振动幅值等量。在本文中,第1节开展了柱群中各圆柱做给定单独运动的辐射分析,推导了速度势和辐射力的计算公式。第2节在有入射波浪的情况下,分析了各柱有相对运动圆柱群的绕射-辐射问题,并推导了速度势和每个柱的振动幅值。第3节,先将退化情况的结果与已有文献进行了对比作为验证,之后计算了典型柱群的算例,得到了各柱在不同给定运动模式下的辐射力。接下来,考虑入射波作用引起柱间有待定相对运动的情况,在不同水深、间距情况下,计算了柱群中各柱的振幅,并与相同情况下的整体运动幅值进行了对比。最后一节给出本文的几点结论。

## 1 各柱做给定独立运动圆柱群的辐射分析

本小节研究柱间有相对运动圆柱群的辐射问题,考虑柱群中的各圆柱做给定运动的情况。与通常的无相对运动圆柱群的区别在于:此时各圆柱的运动幅值、方向均可以不同,因此各柱之间存在相对运动,组成柱间有相对运动的圆柱群。

### 1.1 速度势

如图1所示,由 $N$ 个铅直坐底圆柱组成的圆柱群位于深度为 $d$ 的水中。取 $xOy$ 为总体坐标系, $xOy$ 平面位于静水面上, $Oz$ 轴铅直向上。各圆柱半径为 $a_i$ , $i=1,\dots,N$ , $N$ 个原点在圆心 $O_i$ 的局部极坐标系为 $O_i r_i \theta_i z$ 。于是,第 $j$ 个柱体中心 $O_j$ 在第 $i$ 柱局部柱坐标系中的坐标可记为 $(R_{ij}, \alpha_{ij}, z)$ , $i, j=1,\dots,N$ 。

设流体为无粘、不可压缩的理想流体,运动无旋,可采用势流理论,波陡和浮体运动足够小,考虑线性稳态问题。此时速度势和位移等物理量均为频率为 $\omega_0$ 的简谐函数,可以分离出时间因子 $e^{-i\omega_0 t}$ 。则流场中总速度势 $\Phi_{RD}$ 可写为:

$$\Phi_{RD}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\varphi_{RD}(x, y, z)e^{-i\omega_0 t}\} \quad (1)$$

考虑到圆柱群中各柱体间的水动力相互作用,速度势 $\varphi_{RD}$ 可分解为两部分:一部分为柱群中各个单柱做微幅振动所产生的辐射势;另一部分是由该柱之外其它柱体发射出来的波浪在该柱周围产生

的绕射势。于是，做给定独立运动圆柱群的总波浪速度势  $\varphi_{RD}$  可表示成为上述辐射势和绕射势之和：

$$\varphi_{RD} = \varphi_R + \varphi_{D1} = \sum_{s=1}^2 \sum_{i=1}^N (\varphi_{Rs}^i + \varphi_{D1s}^i) \quad (2)$$

本文只考虑纵荡和横荡两个运动模式，分别用  $s=1, 2$  来表示。 $\varphi_{Rs}^i$  为圆柱  $i$  做第  $s$  个运动模式微幅振动所产生的辐射势， $\varphi_{D1s}^i$  为其它柱发射出来的波作用于  $i$  后产生的绕射势， $\varphi_R$  为总辐射势， $\varphi_{D1}$  为总绕射势。

设柱群中第  $i$  个柱体在平衡位置作圆频率为  $\omega_0$  的微幅简谐振动，则瞬时位移为：

$$\xi_s^i(t) = \text{Re}\{\zeta_s^i e^{-i\omega_0 t}\} \quad (3)$$

$\zeta_s^i$  表示  $i$  柱体在第  $s$  个运动模式下的振动幅值。

相应的振动速度为：

$$\dot{\xi}_s^i(t) = \text{Re}\{-i\omega_0 \zeta_s^i e^{-i\omega_0 t}\} \quad (4)$$

$i$  柱体在第  $s$  个运动模式下以  $\zeta_s^i$  为振幅做独立运动时，可将  $i$  柱体在第  $s$  个运动模式下的辐射势设为：

$$\Phi_{Rs}^i(x, y, z, t) = \text{Re}\{\varphi_{Rs}^i(x, y, z) e^{-i\omega_0 t}\} \quad (5)$$

辐射势应满足的物面条件为：

$$\frac{\partial \Phi_{Rs}^i}{\partial r_i} = \dot{\xi}_s^i(t) \cdot r_{is} \quad (6)$$

其中， $r_{is}$  为  $i$  圆柱单位外法向量分量， $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}) = (\cos \theta_i, \sin \theta_i, 0)$ 。

于是辐射速度势  $\varphi_{Rs}^i$  需满足的拉普拉斯方程和海底、自由面、物面、无穷远处边界条件如下：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 \varphi_{Rs}^i = 0, & \text{流场处处满足} \\ \frac{\partial \varphi_{Rs}^i}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \varphi_{Rs}^i, & \text{自由面 } z = 0 \\ \frac{\partial \varphi_{Rs}^i}{\partial z} = 0, & \text{海底 } z = -d \\ \frac{\partial \varphi_{Rs}^i}{\partial r_i} = v_s^i r_{is}, & \text{柱面 } r_i = a_i \\ \lim_{r_i \rightarrow \infty} \sqrt{r_i} \left( \frac{\partial \varphi_{Rs}^i}{\partial r_i} - ik_0 \varphi_{Rs}^i \right) = 0, & \text{无穷远处辐射条件} \end{array} \right. \quad (7)$$

其中， $v_s^i = -i\omega_0 \zeta_s^i$  为  $i$  柱体物面上在第  $s$  个运动模式方向上的速度。

满足 Laplace 方程、自由面、海底以及无穷远处边界条件的辐射势可写为：

$$\varphi_{Rs}^i = -i\omega_0 \zeta_s^i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ B_{m0s}^i f_0(z) H_m(k_0 r_i) + \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} B_{mns}^i f_n(z) K_m(k_n r_i) \right] e^{im\theta_i} \quad (8)$$

其中：

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{m0s}^i = r_s^{(m)} \frac{2C_0}{k_0 H_m'(k_0 a_i)} \int_{-d}^0 f_0(z) dz \\ B_{mns}^i = r_s^{(m)} \frac{2C_n}{k_n K_m'(k_n a_i)} \int_{-d}^0 f_n(z) dz, \quad n > 0 \\ f_0(z) = \frac{\cosh[k_0(z+d)]}{\cosh(k_0 d)} \\ f_n(z) = \frac{\cos[k_n(z+d)]}{\cos(k_n d)}, \quad n > 0 \end{array} \right.$$

$k_0$  为波数，它为满足色散关系  $\omega_0^2 = gk_0 \cdot \tanh(k_0 d)$  的正特征根； $k_n$  为满足色散关系  $\omega_0^2 = -gk_n \cdot \tan(k_n d)$  ( $n > 0$ ) 的正特征根。当  $s=1$  时， $i$  柱做纵荡运动， $\sum_m r_1^{(m)} e^{im\theta_i} = \cos \theta_i$ ，则有  $r_1^{(-1)} =$

$r_1^{(1)} = \frac{1}{2}$ ；当  $s=2$  时， $i$  柱做横荡运动， $\sum_m r_2^{(m)} e^{im\theta_i} =$

$\sin \theta_i$ ，则有  $r_2^{(-1)} = -\frac{1}{2i}$ ， $r_2^{(1)} = \frac{1}{2i}$ 。

$H_m = J_m + iY_m$  为第一类 Hankel 函数， $J_m$  和  $Y_m$  分别为第一类和第二类 Bessel 函数， $K_m$  为第一类修正的 Bessel 函数。

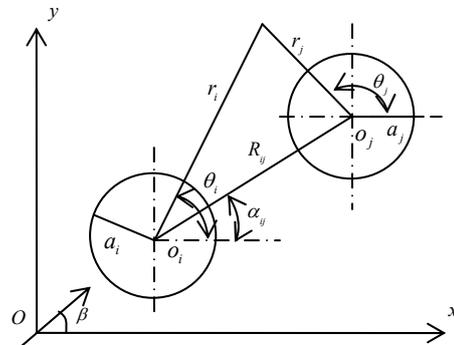


图 1 坐标系示意图

Fig.1 Sketch of coordinate systems

$\varphi_{D1s}^i$  表示第  $i$  柱以外各柱的速度势在第  $i$  柱引起的绕射势，体现了各柱之间的水动力相互作用，可设为：

$$\varphi_{D1s}^i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ C_{m0s}^i Z_{m0}^i f_0(z) H_m(k_0 r_i) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{mns}^i Z_{mn}^i f_n(z) K_m(k_n r_i) \right] e^{im\theta_i} \quad (9)$$

其中： $Z_{m0}^i = \frac{J_m'(k_0 a_i)}{H_m'(k_0 a_i)}$ ； $Z_{mn}^i = \frac{I_m'(k_n a_i)}{K_m'(k_n a_i)}$ ； $C_{m0s}^i$  和

$C_{mns}^i$  为待定参数, 由柱面边界条件确定。则柱群总速度势  $\varphi_{RD}$  为:

$$\begin{aligned} \varphi_{RD} = & \sum_{s=1}^2 \sum_{i=1}^N (\varphi_{Rs}^i + \varphi_{D1s}^i) = \\ & \sum_{s=1}^2 \left\{ (\varphi_{Rs}^j + \varphi_{D1s}^j) + \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (-i\omega_0 \zeta_s^i B_{m0s}^i + \right. \right. \\ & \left. \left. C_{m0s}^i Z_{m0}^i) f_0(z) H_m(k_0 r_i) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i\omega_0 \zeta_s^i B_{mns}^i + \right. \right. \\ & \left. \left. C_{mns}^i Z_{mn}^i) f_n(z) K_m(k_n r_i) \right] e^{im\theta_i} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

应用贝塞尔加法理论, 将  $\varphi_{RD}$  在  $j$  柱坐标系下展开, 可得:

$$\begin{aligned} \varphi_{RD} = & \sum_{s=1}^2 \left\{ (\varphi_{Rs}^j + \varphi_{D1s}^j) + \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (-i\omega_0 \zeta_s^i B_{m0s}^i + \right. \right. \\ & \left. \left. C_{m0s}^i Z_{m0}^i) f_0(z) \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{m-l}(k_0 R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(m-l)} J_l(k_0 r_j) \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. e^{il\theta_j} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i\omega_0 \zeta_s^i B_{mns}^i + C_{mns}^i Z_{mn}^i) f_n(z) \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{l=-\infty}^{\infty} K_{m-l}(k_n R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(m-l)} (-1)^l I_l(k_n r_j) e^{il\theta_j} \right] \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

$\varphi_{RD}$  须满足柱面条件, 即  $r_j = a_j$  时, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{RD}}{\partial r_j} = & \sum_{s=1}^2 v_s^j r_{js}, \quad \text{又因为 } \frac{\partial \varphi_{Rs}^j}{\partial r_j} = v_s^j r_{js}, \quad \text{则有:} \\ & \frac{\partial (\varphi_{RD} - \sum_{s=1}^2 \varphi_{Rs}^j)}{\partial r_j} = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^2 \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ C_{m0s}^j Z_{m0}^j f_0(z) k_0 H'_m(k_0 r_j) + \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} C_{mns}^j Z_{mn}^j f_n(z) k_n K'_m(k_n r_j) \right] e^{im\theta_j} + \right. \\ & \left. \left\{ \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (-i\omega_0 \zeta_s^i B_{m0s}^i + C_{m0s}^i Z_{m0}^i) f_0(z) \cdot \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{m-l}(k_0 R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(m-l)} k_0 J'_l(k_0 r_j) e^{il\theta_j} + \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} (-i\omega_0 \zeta_s^i B_{mns}^i + C_{mns}^i Z_{mn}^i) f_n(z) \sum_{l=-\infty}^{\infty} K_{m-l}(k_n R_{ij}) \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \left. e^{i\alpha_{ij}(m-l)} (-1)^l k_n I'_l(k_n r_j) e^{il\theta_j} \right] \right\} \right\}_{r_j=a_j} = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

将式(13)第二项中的  $m$  和  $l$  互换, 由  $e^{im\theta}$  的正交性, 我们得到:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^2 \left\{ C_{m0s}^j + \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{l=-\infty}^{\infty} [(-i\omega_0 \zeta_s^i B_{l0s}^i + C_{l0s}^i Z_{l0}^i) \cdot \right. \\ & \left. H_{l-m}(k_0 R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(l-m)} \right] \right\} = 0, \\ & \sum_{s=1}^2 \left\{ C_{mns}^j + \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{l=-\infty}^{\infty} [(-i\omega_0 \zeta_s^i B_{lns}^i + C_{lns}^i Z_{ln}^i) \cdot \right. \\ & \left. K_{l-m}(k_n R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(l-m)} (-1)^m \right] \right\} = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

当  $i$  柱体在第  $s$  个运动模态下的振动幅值  $\zeta_s^i$  给定后, 由式(14)即可解得系数  $C_{m0s}^j$ 、 $C_{mns}^j$ 。将式(14)代入式(11), 经过整理可得到当单独某柱或某几个柱同时做给定振幅运动时, 柱群中  $j$  柱速度势  $\varphi_{RD}^j$  的简洁表达式:

$$\begin{aligned} \varphi_{RD}^j = & \sum_{s=1}^2 \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ f_0(z) [(-i\omega_0 \zeta_s^j B_{m0s}^j + C_{m0s}^j Z_{m0}^j) \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. H_m(k_0 r_j) - C_{m0s}^j J_m(k_0 r_j)] + \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) [(-i\omega_0 \zeta_s^j B_{mns}^j + C_{mns}^j Z_{mn}^j) K_m(k_n r_j) - \right. \right. \\ & \left. \left. C_{mns}^j I_m(k_n r_j)] \right\} e^{im\theta_j} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

## 1.2 辐射力

求得  $\varphi_{RD}^j$  后, 进一步即可得当某柱单独做给定振幅运动或某几个柱同时做给定运动时, 在  $j$  柱上产生的  $k$  方向的辐射力  $F_{kRD}^j$ :

$$\begin{aligned} F_{kRD}^j = & -\rho \iint_{S_{B0}} [-i\omega_0 \varphi_{RD}^j] \cdot n_k^j dS = \\ & i\omega_0 \rho \iint_{S_{B0}} \varphi_{RD}^j |_{r_j=a_j} \cdot n_k^j dS \quad (16) \end{aligned}$$

其中:  $\mathbf{n}^j = (n_1^j, n_2^j) = (-\cos\theta_j, -\sin\theta_j)$ ;  $S_{B0}$  表示柱体湿表面;  $F_{xRD}^j$  和  $F_{yRD}^j$  分别表示在  $j$  柱上产生的  $x$  方向和  $y$  方向的辐射力。

## 2 柱间有相对运动圆柱群在入射波作用下的绕射-辐射分析

下面考虑在入射波作用下, 柱间有相对运动圆柱群的绕射-辐射问题。此时流场中总速度势  $\Phi_w$  为:

$$\Phi_w(x, y, z, t) = \text{Re}\{\varphi_w(x, y, z) e^{-i\omega_0 t}\} \quad (17)$$

$\varphi_w$  可以分解为:

$$\varphi_w = \varphi_I + \varphi_D + \varphi_R \quad (18)$$

其中： $\varphi_I$ 为入射势； $\varphi_D$ 为绕射势； $\varphi_R$ 为辐射势。绕射势 $\varphi_D$ 可以分为两部分： $\varphi_{D0}$ 为入射波引起的绕射势， $\varphi_{D1}$ 为其它柱向外发射的波引起的绕射势，即：

$$\begin{cases} \varphi_D = \varphi_{D0} + \varphi_{D1} \\ \varphi_{ID} = \varphi_I + \varphi_{D0} \end{cases} \quad (19)$$

则式(18)可变为：

$$\varphi_w = \varphi_{ID} + \varphi_{RD} \quad (20)$$

### 2.1 速度势

对于坐底圆柱群的绕射问题，Liton 和 Evans<sup>[7]</sup>已经给出了简洁形式的解。其柱群中  $j$  速度势  $\varphi_{ID}^j$  可写为：

$$\varphi_{ID}^j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^j [Z_{m0}^j H_m(k_0 r_j) - J_m(k_0 r_j)] e^{im\theta_j} \quad (21)$$

式中， $A_m^j$ 为复系数。

在确定坐底柱群绕射势之后，可以容易得到激振力。接下来需要分析由入射波所引起的圆柱运动导致的辐射势。分析过程与上一节中无入射波时各柱做给定独立运动的情况类似，要同样利用式(14)求得系数  $C_{m0s}^j$ 、 $C_{mns}^j$ 。但需要指出的是，此时  $\zeta_s^i$  并不是给定的，而是待求的未知数。此时求解式(14)只是暂时将系数  $C_{m0s}^j$ 、 $C_{mns}^j$  中用未知系数  $\zeta_s^i$  表示，须结合后面的运动方程最终求解。同理可知， $\varphi_{RD}$  与式(15)有相同的表达式，只是此时  $\varphi_{RD}$  含有的  $\zeta_s^i$  为未知数。

### 2.2 振动幅值

作用在  $j$  柱  $k$  方向上的激振力  $F_{kID}^j$  为：

$$\begin{aligned} F_{kID}^j &= -\rho \iint_{S_{B0}} [-i\omega_0 \varphi_{ID}^j] \cdot n_k^j dS = \\ &= -i\omega_0 \rho \iint_{S_{B0}} \varphi_{ID}^j |_{r_j=a_j} \cdot n_k^j dS \end{aligned} \quad (22)$$

考虑柱群水动力相互作用的辐射力  $F_{kRD}^j$  的表达式与上一节式(16)相似，只不过此时  $F_{kRD}^j$  中含有  $s \times N$  个未知数  $\zeta_s^i$ 。

至此，我们已得到了激振力和辐射力表达式，于是就可以得到  $j$  柱在  $k$  方向上的运动方程( $k=1,2$  分别表示  $x$  方向和  $y$  方向)：

$$F_{kRD}^j (\zeta_s^i) + \omega_0^2 M_j \zeta_k^j = -F_{kID}^j \quad (23)$$

其中， $M_j$  为  $j$  柱的质量。联立式(14)、式(15)、式(16)、式(22)、式(23)，即可求解系数  $C_{m0s}^j$ 、 $C_{mns}^j$  和速度势

$\varphi_{RD}$ ，进而可以得到激振力  $F_{kID}^j$ 、辐射力  $F_{kRD}^j$  和振动幅值  $\zeta_s^i$ 。

## 3 计算结果

### 3.1 给定独立运动柱群的辐射解

为验证程序，首先计算问题的退化解——坐底柱群绕射问题，并与已有结果进行对比。图 2 是 Oguz Yimaz<sup>[10]</sup>的算例：入射波浪作用于柱间距为  $4a$  正方形排列的 4 柱结构的情况。图 3 是 Maniar H D 和 Newman J N<sup>[8]</sup>的算例：一排 9 柱间距为  $8a$  的情况。我们计算了上述两个问题，并与之进行对比。从图 2 和图 3 中可以看出我们的解与相应文献的结果吻合很好。

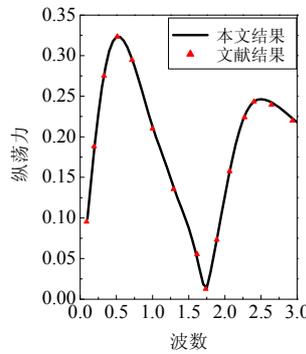


图 2 与[10]对比

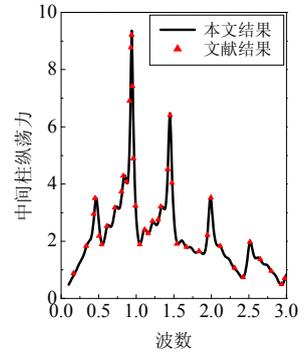


图 3 与[8]对比

Fig.2 Comparison with [10] Fig.3 Comparison with [8]

下面分析各圆柱做独立运动时坐底柱群的辐射问题。考察如图 4 所示的典型等间距坐底四柱结构，每个圆柱的半径为  $a$ ，水深为  $d$ ，柱间距为  $4a$ 。

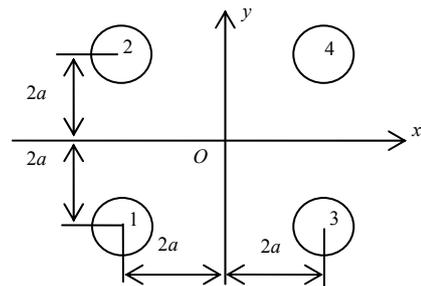


图 4 四柱结构坐标系

Fig.4 Sketch coordinate systems of four cylinders

首先计算的是，1 个圆柱单独以单位速度振动，其它圆柱静止时，求得的辐射力实部和虚部随波数的变化情况，横坐标是无量纲波数  $k_0 a$ ，纵坐标是

辐射力的实部  $\frac{\text{Re}[F_{kRS}^j]}{\rho g \pi a^2 d \sqrt{g/a}}$  和虚部  $\frac{\text{Im}[F_{kRS}^j]}{\rho g \pi a^2 d \sqrt{g/a}}$ ，

图 5~图 10 给出的都是这种力。图形中注释“ $j-i$ ”代表  $i$  柱做  $s$  运动模式时  $j$  柱上的辐射力，例如，

图标中“1-2 纵荡-横荡”代表由于2柱以单位速度做横荡运动时引起1柱x方向的辐射力。图5和图6分别给出了1柱或2柱做不同模态运动时得到的1柱或2柱不同方向上的辐射力。从5图可以看出1柱做纵荡引起的1柱x方向的辐射力要比做横荡引起x方向的辐射力要大得多，实部大2倍以上，虚部大8倍以上。图5和图6对比发现，1柱做纵荡引起1柱x方向的辐射力要比2柱做纵荡引起1柱x方向的辐射力要大很多。从图6中可以看出2柱做纵荡引起1柱y方向的辐射力与2柱做横荡引起1柱x方向的辐射力是具有对称性的。

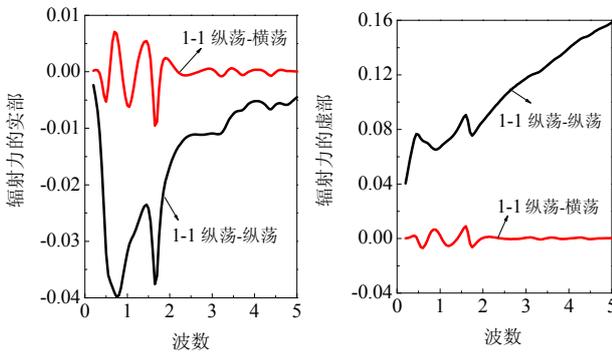


图5 1-1 纵荡-纵荡和纵荡-横荡  
Fig.5 1-1 surge-surge and surge-sway

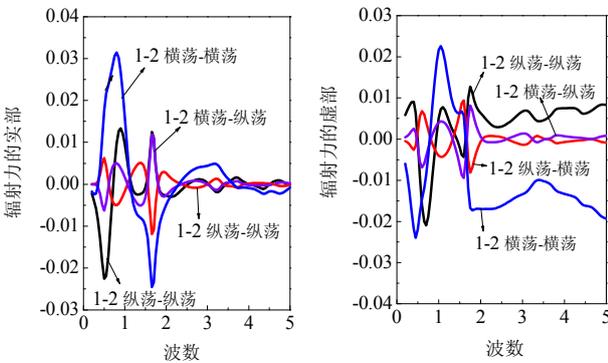


图6 1-2 纵荡-纵荡、纵荡-横荡、横荡-纵荡和横荡-横荡  
Fig.6 1-2 surge-surge, surge-sway, sway-surge and sway-sway

在计算了一个柱单独运动的情况后，我们进一步计算了任意2个柱作同方向和不同方向独立运动的情况。图形中注释“j-i+k”代表i柱和k柱做s运动模态时j柱的辐射力。例如，图标中“(1\2\3\4)-1+2 纵荡-纵荡+横荡”代表1柱以单位速度做纵荡运动同时2柱也以单位速度做横荡运动时所引起的1柱、2柱、3柱和4柱x方向的辐射力。图7和图8即为柱群中某两个柱运动，其它两柱静止时，各柱辐射力的实部和虚部随波数变化的

情况。对比图7图8可以看出，1柱和2柱同时做纵荡作用时，各柱x方向的辐射力要比y方向的辐射力大数倍。

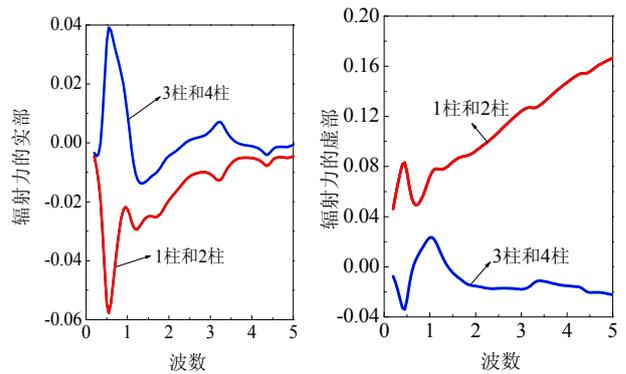


图7 (1\2\3\4)-1+2 纵荡-纵荡+纵荡  
Fig.7 (1\2\3\4)-1+2 surge-surge+surge

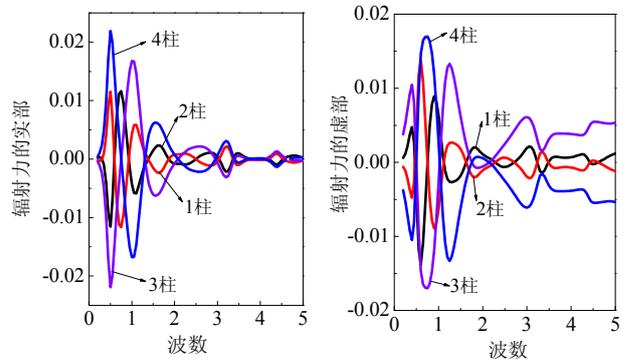


图8 (1\2\3\4)-1+2 横荡-纵荡+纵荡  
Fig.8 (1\2\3\4)-1+2 sway-surge+surge

图9和图10所示为，1柱和2柱分别做不同模态的运动时，引起各柱x方向和y方向辐射力的实部和虚部。从图9和图10中可以看出1柱和2柱分别做不同模态的运动时，引起各柱x方向和y方向辐射力的实部和虚部，其数量级大小相当。

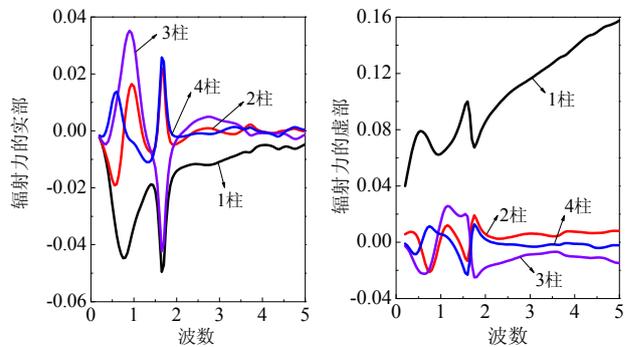


图9 (1\2\3\4)-1+2 纵荡-纵荡+横荡  
Fig.9 (1\2\3\4)-1+2 surge-surge+sway

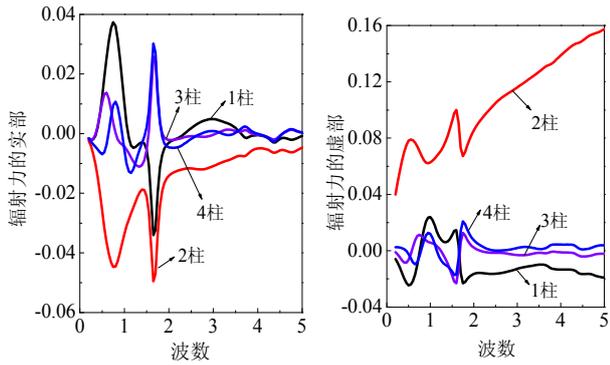


图 10 (1/2/3/4)-1+2 横荡-纵荡+横荡  
Fig.10 (1/2/3/4)-1+2 sway-surge+sway

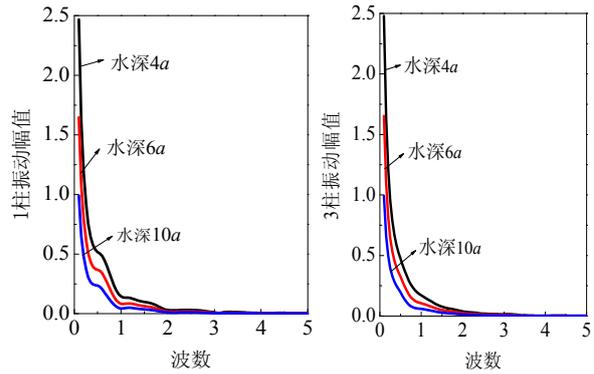


图 12 不同水深时 1 柱和 3 柱的振动幅值  
Fig.12 Amplitudes of cylinder 1 and 3 in cylinder arrays with different water depth

### 3.2 入射波作用下有柱间相对运动柱群的绕射-辐射解

当入射波浪作用于柱间有相对运动圆柱群时，会引起各柱作振幅不同的运动。图 11~图 14 所示的结果仍然以图 4 所示的柱群排列作为研究对象，得到的振动幅值无量纲化为  $|\zeta|/A$ ， $A$  为波幅。

图 11 表示的是不同柱间距情况下，1 柱和 3 柱纵荡振动幅值随波数的变化，由于对称性，1 柱和 2 柱振幅相同，3 柱和 4 柱的振幅相同。由图 11 我们可以看出，振幅随间距变化并不明显，只是在波数 0.5~1.5 之间有波动，而且随间距增加波动平缓，3 柱振幅比 1 柱振幅随波数变化更为平缓。

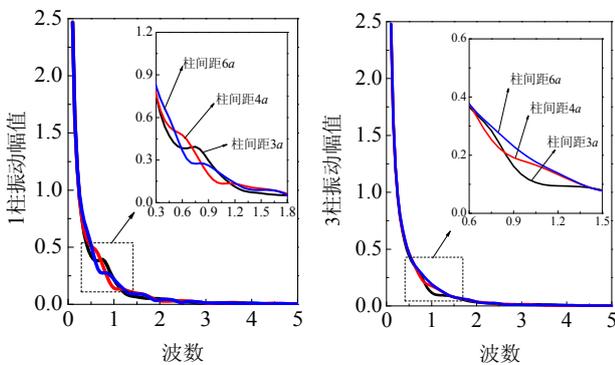


图 11 不同间距时 1 柱和 3 柱的振动幅值  
Fig.11 Amplitudes of cylinder 1 and 3 in cylinder arrays with different spacing

图 12 显示的是不同水深对振幅的影响。可以看出随水深的增加，1 柱和 3 柱的振幅都逐渐变小。同样，在波数 0.5~1.5 之间振幅有小波动，3 柱振幅比 1 柱振幅曲线更为平滑。

### 3.3 与整体运动的对比

在 3.2 节中，我们分析了有入射波作用时不同间距和水深下柱间有相对运动柱群中各柱的振幅变化情况。下面将结果与柱间无相对运动柱群的振幅作对比。图 13 给出不同间距情况下，有相对运

动的各柱运动振幅与无相对运动振幅随波数的变化情况。从中可以看出在波数 0.5~1.2 之间，除个别波数以外，有相对运动情况比无相对运动情况的振幅要大 27% 以上，有时甚至高于一倍，而且无相对运动情况的振幅在此波数之间波动要更明显。图 14 显示的是不同水深的情况，与不同间距的情况类似，波数 0.5~1.2 之间，大部分波数对应的有相对运动情况振幅要大 39% 以上，有时甚至高于一倍，其它波数下趋于一致。

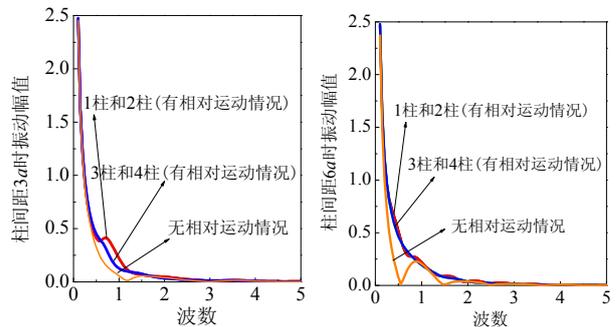


图 13 不同间距时无相对运动和有相对运动各柱的振动幅值对比  
Fig.13 Amplitude comparisons of each cylinder in arrays with or without relative motions in the case of different spacing

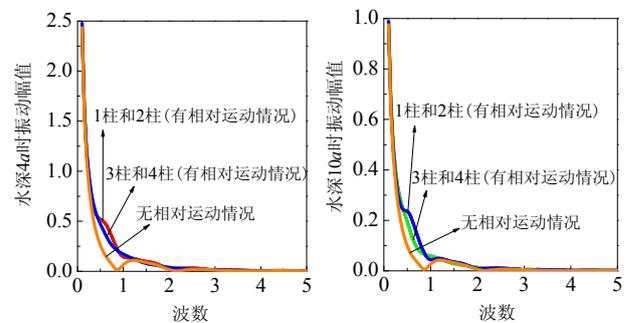


图 14 不同水深时无相对运动和有相对运动各柱的振动幅值对比  
Fig.14 Amplitude comparisons of each cylinder in arrays with or without relative motions in the case of different water depth

## 4 结论

本文针对柱群中各圆柱之间存在相对运动的坐底圆柱群开展水动力研究。首先分析了其中各圆柱做不同给定运动的辐射问题,在此基础上进一步研究了入射波作用下各柱运动幅度待定的圆柱群的绕射-辐射问题,给出了柱间有相对运动坐底圆柱群绕射-辐射问题的解析分析方法。采用该方法,本文进行了典型圆柱群的绕射-辐射分析,计算了其速度势、水动力和振动幅值。从中可看出:

(1) 各柱运动模态和幅度大小不同致使变量数目增加,因而速度势、水动力等的求解比整体运动柱群要复杂许多。

(2) 对于给定运动辐射问题,各柱辐射力的大小与运动方向明显相关,与运动方向同向的辐射力通常要大于其它方向上的力。

(3) 对于入射波作用下的绕射-辐射问题,计算结果表明:对于不同柱间距,振幅在波数 0.5~1.5 之间变化较明显,显示出柱间距变化只在该区域有影响。对于不同水深,振幅随水深的增加而减小。不论间距变化还是水深变化,与柱间无相对运动柱群的运动幅度相比,均可看出在波数 0.5~1.2 区域,柱间有相对运动柱群的振幅明显增大,在某些波数下甚至可达一倍以上。

### 参考文献:

- [1] Falcão António F de O. Wave energy utilization: A review of the technologies [J]. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2010, 14(3): 899—918.
- [2] Chakrabarti S K. Hydrodynamics of offshore structures [M]. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1987: 250—253.
- [3] Spring B H, Monkmeyer P L. Interactions of plane waves with vertical cylinders [C]. *Proceeding of 14th*

- International Conference on Coastal Engineering*. Copenhagen: American Society of Civil Engineers, 1974.
- [4] Ohkusu M. The Dynamics of marine vehicles and structures in waves [M]. London: Mechanical Engineering Publications Limited, 1974: 107—112.
- [5] Simon M J. Multiple scattering in arrays of axisymmetric wave-energy devices [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1982, 120: 1—25.
- [6] McIver P, Evans D V. Approximation of wave forces on cylinder arrays [J]. *Applied Ocean Research*, 1984, 6(2): 101—107.
- [7] Linton C M, Evans D V. The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, 215: 549—569.
- [8] Maniar H D, Newman J N. Wave diffraction by a long array of cylinders [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, 339: 309—330.
- [9] Evans D V, Porter R. Trapping and near-trapping by arrays of cylinders in waves [J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1999, 35(1/2): 149—179.
- [10] Yilmaz Oguz. An iterative procedure for the diffraction of water waves by multiple cylinders [J]. *Ocean Engineering*, 2004, 31(11/12): 1437—1446.
- [11] Duclos G, Clement A H. Wave propagation through arrays of unevenly spaced vertical piles [J]. *Ocean Engineering*, 2004, 31(13): 1655—1668.
- [12] Walker D A G, Eatock Taylor R. Wave diffraction from linear arrays of cylinders [J]. *Ocean Engineering*, 2005, 32(17/18): 2053—2078.
- [13] Walker D A G, Eatock Taylor R, Taylor P H, Zang J. Wave diffraction and near-trapping by a multi-column gravity-based structure [J]. *Ocean Engineering*, 2008, 35(2): 201—229.
- [14] Kim M H. Interaction of waves with N vertical circular cylinders [J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 1992, 119(6): 671—689.
- [15] Siddorn P, Eatock Taylor R. Diffraction and independent radiation by an array of floating cylinders [J]. *Ocean Engineering*, 2008, 35(13): 1289—1303.