

薄板弯曲大变形高阶非线性偏微分方程推导 与优化算法研究*

侯祥林^{1)†} 郑夕健¹⁾ 张良²⁾ 刘铁林³⁾

1) (沈阳建筑大学交通与机械工程学院, 沈阳 110168)

2) (中国科学院力学研究所, 北京 100080)

3) (沈阳建筑大学土木工程学院, 沈阳 110168)

(2012年2月21日收到; 2012年3月10日收到修改稿)

针对薄板弯曲大变形问题, 运用变分原理, 建立了薄板弯曲大变形问题的高阶非线性偏微分方程. 运用有限差分法和动态设计变量优化算法原理, 以离散坐标点的上未知挠度为设计变量, 以离散坐标点的差分方程组构建目标函数, 提出了薄板弯曲大变形挠度求解的动态设计变量优化算法, 编制了相应的优化求解程序. 分析了具有固定边界、均布载荷下的矩形薄板挠度的典型算例. 通过与有限元的结果对比, 表明了本文求解算法的有效性和精确性, 提供了直接求解实际工程问题的基础.

关键词: 高阶非线性偏微分方程, 薄板弯曲大变形, 动态设计变量优化算法, 程序设计

PACS: 02.30.Jr, 02.60.Lj, 02.60.Pn, 87.10.Pq

1 引言

薄板弯曲变形问题是弹性力学中最重要的研究问题, 其实质是求解高阶偏微分方程的问题. 基于一些假设条件, 薄板弯曲小变形问题可以转化为弹性曲面微分方程: $D\nabla^4 w = q$, 这是一个四阶线性的偏微分方程, 针对不同的边界条件, 已经有了一套完整的求解理论, 通过构造解析解和差分方法均可获得问题的求解^[1-6].

薄板弯曲大变形问题是具有广泛工程实际意义的高阶非线性偏微分方程问题. 由于非线性偏微分方程的复杂性, 无论运用解析法和差分法都是比较困难的. 尽管偏微分方程的常微分方程化分析能够求解一些问题^[5-14], 但有效的研究方法仍集中在数值方法上. 直接运用有限差分法, 由于不能获得相应的线性代数方程组, 也难以构建收敛的迭代表达式, 不能直接求解这类方程. 有限单元法是最为普遍的方法, 应用 ANSYS 等软件, 可以获得位移

计算, 但并非是直接求解非线性偏微分方程, 而是基于分片连续的假设, 通过边界协调来实现求解的, 在单元边界上光滑性较差, 计算结果受到单元划分数量和单元模式的影响.

本文在二阶非线性偏微分方程优化算法研究基础上^[15-17], 运用变分原理^[18], 推导了描述薄板大变形问题的非线性偏微分方程组, 并简化获得薄板弯曲大挠度的高阶非线性偏微分方程. 将有限差分法和动态设计变量优化算法相结合, 构建了离散网格坐标点上的未知挠度的优化程序算法, 完成了薄板弯曲大变形问题算例分析.

2 薄板弯曲大变形问题非线性偏微分方程的建立

2.1 基于变分原理的几何大变形薄板微分方程组的推导

设: $\{\mathbf{V}\} = \{u, v, w\}^T$, $\{\mathbf{f}\} = \{f_x, f_y, f_z\}$,

* 国家自然科学基金(批准号: 10972144)、辽宁省自然科学基金(批准号: 201102181)和辽宁省教育厅科学研究项目(批准号: L2010445)资助的课题.

† E-mail: drhouxl@tom.com

$\{q\} = \{q_x, q_y, q_z\}$, 分别为薄板的位移、体力和面力矢量, $\{\varepsilon\}, \{\sigma\}$ 为薄板上任意点应变和应力矢量. $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 为薄板中面正应变和切应变, $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ 为薄板中面曲率和扭率. 图 1 是大挠度薄板示意图.

薄板产生大挠度时的几何方程为

$$\varepsilon_x = u_x + \frac{1}{2}w_x^2,$$

$$\varepsilon_y = v_y + \frac{1}{2}w_y^2,$$

$$\gamma_{xy} = u_y + v_x + w_x w_y$$

和

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -w_{xx},$$

$$\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -w_{yy},$$

$$2\chi_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2w_{xy}.$$

设 t 为薄板厚度, E 为薄板的弹性模量. 薄板上任意点的应变可以描述为

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_x + z\chi_x, \varepsilon_y + z\chi_y, \gamma_{xy} + 2z\chi_{xy}\}^T \\ &= \left\{ u_x + \frac{1}{2}w_x^2 - zw_{xx}, v_y + \frac{1}{2}w_y^2 - zw_{yy}, u_y \right. \\ &\quad \left. + v_x + w_x w_y - 2zw_{xy} \right\}^T. \end{aligned}$$

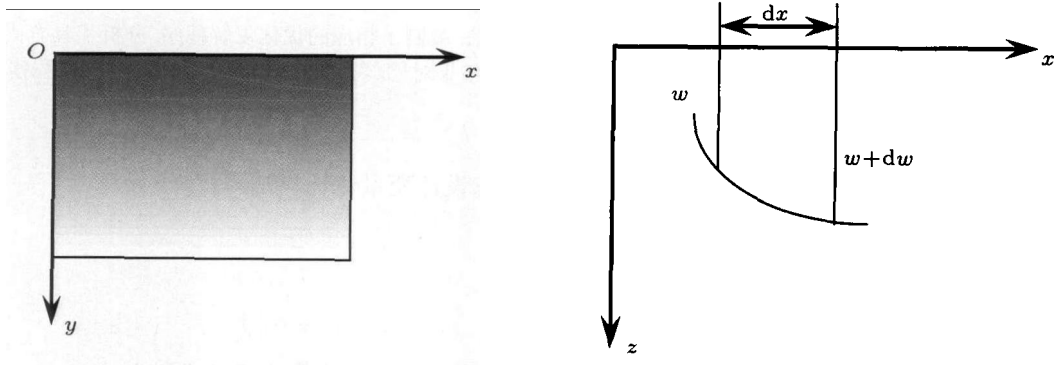


图 1 大挠度薄板示意图

由广义虎克定律, 获得薄板上任意点的应力描述为:

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} [(\varepsilon_x + z\chi_x) + \mu(\varepsilon_y + z\chi_y)] \\ \frac{E}{1-\mu^2} [(\varepsilon_y + z\chi_y) + \mu(\varepsilon_x + z\chi_x)] \\ \frac{E}{2(1+\mu)} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{xy}) \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + z(\chi_x + \mu\chi_y) \\ (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + z(\chi_y + \mu\chi_x) \\ \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy} + (1-\mu)z\chi_{xy} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} \left[\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right) + \mu \left(v_y + \frac{1}{2}w_y^2 \right) \right] - z(w_{xx} + \mu w_{yy}) \\ \left[\left(v_y + \frac{1}{2}w_y^2 \right) + \mu \left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right) \right] - z(w_{yy} + \mu w_{xx}) \\ \frac{1-\mu}{2} (u_y + v_x + w_x w_y) - (1-\mu)z w_{xy} \end{pmatrix}.$$

薄板势能可以表示为:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{V\}^T \{f\} \right) dV \\ &\quad - \int_S \{V\}^T \{q\} dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_V \left[\left(\frac{1}{2} (\varepsilon_x + z\chi_x, \varepsilon_y + z\chi_y, \gamma_{xy} + 2z\chi_{xy}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} - \{V\}^T \{f\} \right) \right] dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_S \{ \mathbf{V} \}^T \{ \mathbf{q} \} dx dy \\
 & = \int_D F(u, v, w, u_x, u_y, v_x, v_y, w_x, \\
 & \quad w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) dx dy.
 \end{aligned}$$

若略去体力, 则

$$\begin{aligned}
 & F(u, v, w, u_x, u_y, v_x, v_y, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) \\
 & = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\varepsilon} \}^T \{ \boldsymbol{\sigma} \} dz - \{ \mathbf{V} \}^T \{ \mathbf{q} \} \\
 & = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_x \frac{Et}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \varepsilon_y \frac{Et}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \right. \\
 & \quad + \gamma_{xy} \frac{Et}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} + \int_{-t/2}^{t/2} \left[\chi_x \frac{Ez^2}{1-\mu^2} (\chi_x + \mu\chi_y) \right. \\
 & \quad \left. + \chi_y \frac{Ez^2}{1-\mu^2} (\chi_y + \mu\chi_x) + 2\chi_{xy} \frac{Ez^2}{1+\mu} \chi_{xy} \right] dz \left. \right\} \\
 & \quad - \{ \mathbf{V} \}^T \{ \mathbf{q} \} \\
 & = \frac{1}{2} \frac{Et}{(1-\mu^2)} \left[\varepsilon_x (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon_y (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^2 \right] \\
 & \quad + \frac{1}{24} \frac{Et^3}{1-\mu^2} \left[\chi_x (\chi_x + \mu\chi_y) + \chi_y (\chi_y + \mu\chi_x) \right. \\
 & \quad \left. + 2(1-\mu) \chi_{xy} \chi_{xy} \right] - (uq_x + vq_y + wq_z) \\
 & = \frac{1}{2} \frac{Et}{(1-\mu^2)} \left[\left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 + \left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + 2\mu \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1-\mu}{2} (u_y + v_x + w_x w_y)^2 \right] \\
 & \quad + \frac{1}{24} \frac{Et^3}{1-\mu^2} \left[w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\mu w_{xx} w_{yy} \right. \\
 & \quad \left. + 2(1-\mu) w_{xy}^2 \right] - (uq_x + vq_y + wq_z),
 \end{aligned}$$

则:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi = & \iint_D (F_u \delta u + F_v \delta v + F_w \delta w + F_{u_x} \delta u_x \\
 & + F_{u_y} \delta u_y + F_{v_x} \delta v_x + F_{v_y} \delta v_y \\
 & + F_{w_x} \delta w_x + F_{w_y} \delta w_y + F_{w_{xx}} \delta w_{xx} \\
 & + F_{w_{yy}} \delta w_{yy} + F_{w_{xy}} \delta w_{xy}) dx dy.
 \end{aligned}$$

在满足固定边界条件下, 应用变分原理:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi = & 0, \\
 F_u - \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y}) = & 0, \\
 F_v - \frac{\partial}{\partial x} (F_{v_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{v_y}) = & 0, \\
 F_w - \frac{\partial}{\partial x} (F_{w_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{w_y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_{w_{xx}}) \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (F_{w_{yy}}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (F_{w_{xy}}) = 0,
 \end{aligned}$$

可得在固定边界条件下的非线性偏微分方程组:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & 12(u_{xx} + w_x w_{xx}) + 12\mu(v_{yx} + w_y w_{xy}) \\
 & \quad + 6(1-\mu)(u_{yy} + v_{xy} \\
 & \quad + w_{xy} w_y + w_x w_{yy}) \\
 & = -\frac{q_x}{A}, \\
 & 6(1-\mu)(u_{yx} + v_{xx} + w_{xx} w_y + w_x w_{xy}) + \\
 & \quad 12(v_{yy} + w_y w_{yy}) + 12\mu(u_{xy} + w_x w_{xy}) \\
 & = -\frac{q_y}{A}, \\
 & t^2(w_{xxxx} + w_{yyyy} + 2w_{xxyy}) \\
 & \quad - 6[(2u_x + 3w_x^2)w_{xx} + 2u_{xx}w_x \\
 & \quad + (2v_y + 3w_y^2)w_{yy} + 2v_{yy}w_y \\
 & \quad + (u_{xy} + v_{xx} + w_{xx}w_y)w_y \\
 & \quad + (u_{yy} + v_{xy} + w_x w_{yy})w_x \\
 & \quad + 2(u_y + v_x + 2w_x w_y)w_{xy}] \\
 & \quad + 6\mu[2(u_y + v_x)w_{xy} - 2w_{xx}v_y \\
 & \quad - 2u_x w_{yy} + v_{xx}w_y + u_{yy}w_x - w_x v_{yy} \\
 & \quad - u_{xy}w_y] = \frac{q_z}{A},
 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

其中 $A = \frac{1}{12} \frac{Et}{(1-\mu^2)}$.

2.2 固定边界薄板弯曲大变形的非线性偏微分方程的简化模型

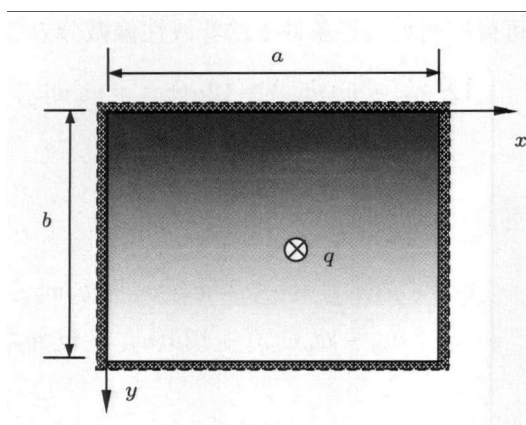
针对实际问题中 x, y 方向变形量 u, v 和 z 方向变形量 w 满足: $u, v \ll w$ 且相对应的导数项为高阶小量. 受力满足: $q_z = q, q_x = q_y = 0$ 作用. 这样忽略 (1) 式中第三个方程中的含 u, v 和相应的导数项, 它就转化为关于 $w(x, y)$ 的非线性高阶偏微分方程, 可以独立求解. 在此条件下, (1) 式中的前两个方程为转化为关于 u, v 二元高阶非线性偏微分方程组, 若只探讨 w 的求解, 那么简化 (1) 式中的第三方程得到 (2) 式, 反映薄板弯曲大变形问题. 也

就是求解高阶非线性偏微分方程问题, 而边界条件为固定边界 (3). 其中: $D = At^2 = \frac{1}{12} \frac{Et^3}{(1-\mu^2)}$.

$$(w_{xxxx} + w_{yyyy} + 2w_{xxyy}) - 6(3w_x^2 w_{xx} + 3w_y^2 w_{yy} + w_{xx} w_y^2 + w_x^2 w_{yy} + 4w_x w_y w_{xy})/t^2 = \frac{q}{D}, \quad (2)$$

$$w|_L = 0, w_x|_L = w_y|_L = 0. \quad (3)$$

下面分析四边固支约束的矩形薄板弯曲大变形求解.



3 薄板弯曲大变形问题非线性偏微分方程的优化算法

3.1 高阶偏微分方程的差分与无量纲化

图 2 为矩形固定边界, 应用等距离 h 网格分割, 分割线直线方程:

$$x_l = lh, l = 1, 2, \dots, nl,$$

$$y_m = mh, m = 1, 2, \dots, nm.$$

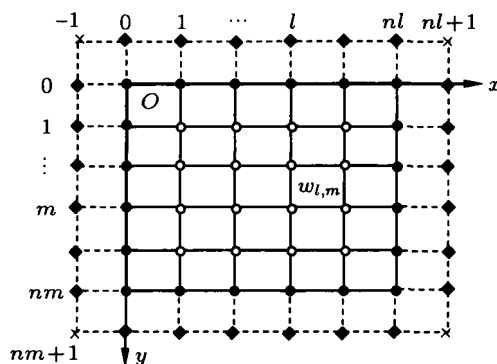


图 2 固支板与差分网格区域

图中: \bullet 为边界点, \blacklozenge 为辅助点, \circ 为未知点, \times 为不使用点.

设: $w = \frac{q}{D} h^4 W, cs = \left(\frac{q}{D} h^4 / t\right)^2$, (2) 式简化为

$$[(W_{xxxx} + W_{yyyy} + 2W_{xxyy}) - cs \cdot 6(3W_x^2 W_{xx}$$

$$+ 3W_y^2 W_{yy} + W_{xx} W_y^2 + W_x^2 W_{yy} + 4W_x W_y W_{xy})] h^4 - 1 = 0.$$

应用泰勒级数展开, 可以获得截断误差 $O(h^2)$ 的 $w(x, y)$ 相关导数在 x_l, y_m 处的近似值:

$$\left\{ \begin{aligned} (W_x)_{l,m} &\approx \frac{W_{l+1,m} - W_{l-1,m}}{2h}; (W_y)_{l,m} \approx \frac{W_{l,m+1} - W_{l,m-1}}{2h}, \\ (W_{xx})_{l,m} &\approx \frac{W_{l+1,m} + W_{l-1,m} - 2W_{l,m}}{h^2}; (W_{yy})_{l,m} \approx \frac{W_{l,m+1} + W_{l,m-1} - 2W_{l,m}}{h^2}, \\ (W_{xy})_{l,m} &\approx \frac{W_{l+1,m+1} + W_{l-1,m-1} + 2W_{l,m} - W_{l,m+1} - W_{l,m-1} - W_{l+1,m} - W_{l-1,m}}{2h^2}, \\ (W_{xxxx})_{l,m} &\approx \frac{W_{l+2,m} - 4W_{l+1,m} + 6W_{l,m} - 4W_{l-1,m} + W_{l-2,m}}{h^4}, \\ (W_{yyyy})_{l,m} &\approx \frac{W_{l,m+2} - 4W_{l,m+1} + 6W_{l,m} - 4W_{l,m-1} + W_{l,m-2}}{h^4}, \\ (W_{xxyy})_{l,m} &\approx \frac{1}{h^4} (W_{l+1,m+1} + W_{l+1,m-1} - 2W_{l+1,m} + W_{l-1,m+1} + W_{l-1,m-1} - 2W_{l-1,m} \\ &\quad - 2(W_{l,m+1} + W_{l,m-1} - 2W_{l,m})). \end{aligned} \right. \quad (4)$$

将 (4) 式代入 (2) 式, 获得差分方程组:

$$\begin{aligned}
 P_{l,m} = & P_{l,m}(W_{l-2,m}, W_{l-1,m}, W_{l,m}, \\
 & W_{l+1,m}, W_{l+2,m}, W_{l,m-2}, W_{l,m-1}, \\
 & W_{l,m}, W_{l,m+1}, W_{l,m+2}) \\
 = & 0, \quad l = 1, 2, \dots, nl - 1; \\
 & m = 1, 2, \dots, nm - 1.
 \end{aligned}$$

边界条件 (3) 式转化为

$$\begin{aligned}
 W_{0,m} = 0, W_{nl,m} = 0, m = 1, 2, \dots, nm, \\
 W_{l,0} = 0, W_{l,nm} = 0, l = 1, 2, \dots, nl.
 \end{aligned} \quad (5)$$

在较高精度下, 虚节点边界表示为

$$\begin{aligned}
 W_{-1,m} = & 3W_{1,m} - W_{2,m}/2, W_{nl+1,m} \\
 = & 3W_{nl-1,m} - W_{nl-2,m}/2, \\
 & m = 0, 1, 2, \dots, nm + 1, \\
 W_{l,-1} = & 3W_{l,1} - W_{l,2}/2, W_{l,nm+1} \\
 = & 3W_{l,nm-1} - W_{l,nm-2}/2, \\
 & l = 0, 1, 2, \dots, nl + 1.
 \end{aligned}$$

3.2 均布载荷作用下的弯曲大变形问题优化求解模型

将求解薄板大变形非线性偏微分方程挠度计算问题, 转化为无约束优化问题:

$$\min(f(\mathbf{z})) \quad (6)$$

其中 $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ 称为设计变量, 表示坐标网格节点的未知函数值, $z_i, i = 1, 2, \dots, n, n$ 为设计变量总维数, $f(\mathbf{z})$ 为目标函数.

针对力学模型的对称性, 取 1/4 区域的坐标网格节点挠度未知量作为动态设计变量, 此时设计变量总数:

$$n = \text{int} \left[\frac{nl + 1}{2} \right] \text{int} \left[\frac{nm + 1}{2} \right].$$

未知函数值 $W_{l,m}$ 与动态设计变量 $z_i, i = 1, 2, \dots, n$ 对应关系可以表示为: $W_{l,m} = z_{l+\text{int}[(nl+1)/2](m-1)}, l = 1, 2, \dots, \text{int}[(nl+1)/2], m = 1, 2, \dots, \text{int}[(nm+1)/2]$, 其他 3/4 对称区域上的坐标网格节点挠度由对称关系表示为

$$\begin{aligned}
 W_{nl-l,m} = & W_{l,m}, \\
 W_{l,nm-m} = & W_{l,m}, \\
 W_{nl-l,nm-m} = & W_{l,m}, \\
 & l = 1, 2, \dots, \text{int}[(nl+1)/2], \\
 & m = 1, 2, \dots, \text{int}[(nm+1)/2].
 \end{aligned}$$

对应的目标函数表达为

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\text{int}(\frac{nl+1}{2})} \sum_{m=1}^{\text{int}(\frac{nm+1}{2})} P_{l,m}^2. \quad (7)$$

由于节点数目随网格划分而变化, 设计变量维数 n 随之改变, 目标函数的构成形式也发生相应变化, 相应问题转化为动态设计变量优化问题.

3.3 程序求解模块构成

程序设计采用 Visual-Fortran 设计, 程序结构组成包括: 1) 主程序; 2) 采用共轭梯度法无约束优化子程序; 3) 一维搜索的进退法和区间离散比较法子程序; 4) 梯度函数计算子程序; 5) 动态设计变量目标函数子程序段; 6) 微分方程逼近子程序段.

3.4 多维问题无约束共轭梯度法优化搜索

程序主体为多变量无约束优化问题, 采用具有二次收敛精度的共轭梯度方法优化搜索过程: 对于任意的初始值 $\mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{s}^{(1)} = -\mathbf{g}^{(1)} = \text{grad}[f(\mathbf{z}^{(0)})], \mathbf{g}^{(k)} = \text{grad}[f(\mathbf{z}^{(k)})], \mathbf{s}^{(k+1)} = -\mathbf{g}^{(k+1)} + \frac{[\mathbf{g}^{(k+1)}]^T \cdot \mathbf{g}^{(k+1)}}{[\mathbf{g}^{(k)}]^T \cdot \mathbf{g}^{(k)}} \mathbf{s}^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n$. 则新点为: $\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{s}^{(k)}$, 其中 $\alpha^{(k)}$ 是由一维搜索法确定最优步长. 经过一轮 n 次搜索计算, $\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{z}^{(n)}$, 继续计算, 直到目标函数达到限定值 $f(\mathbf{z}^{(k)}) < \varepsilon$ 时, 输出结果. 若不满足条件时, 从上 1 轮优化点重新开始. 图 3 实线表示共轭梯度法每次的搜索方向.

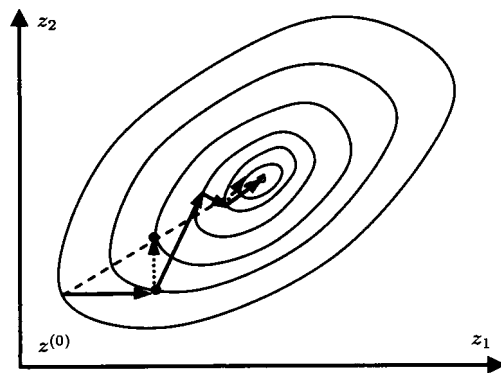


图 3 共轭梯度法搜索过程示意图

3.5 一维搜索过程的区间离散比较法

一维搜索过程是求解关于 $\alpha^{(k)}$ 对应目标函数 $f(\mathbf{z}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{s}^{(k)})$ 的极小点, 分为搜索区间的确

定和区间上极小值点的确定, 常用进退法确定一维搜索区间, 黄金分割法获得区间最小值点. 尽管黄金分割法是良好的一维搜索算法, 但是由于非线性目标函数的复杂性, 在一维搜索过程中, 目标函数可能会出现图 4 的情况. 其中图 4(a) 是单谷函数, 图 4(b) 是非单谷函数两种情况. 若目标函数为单谷函数时, 黄金分割法是可用的; 若目标函数不是

单谷函数时, 黄金分割法将无法使用来确定区间上最小值点. 由于函数的连续性, 一维搜索区间上一定有极小值点. 若采用区间离散比较的方法将很容易确定极小值. 区间离散比较方法原理就是将搜索区间分点, 通过比较所有分点的目标函数值, 确定极小值点和所对应的位置, 完成一次一维搜索过程. 这是程序设计中发现与实际应用的有效方法.

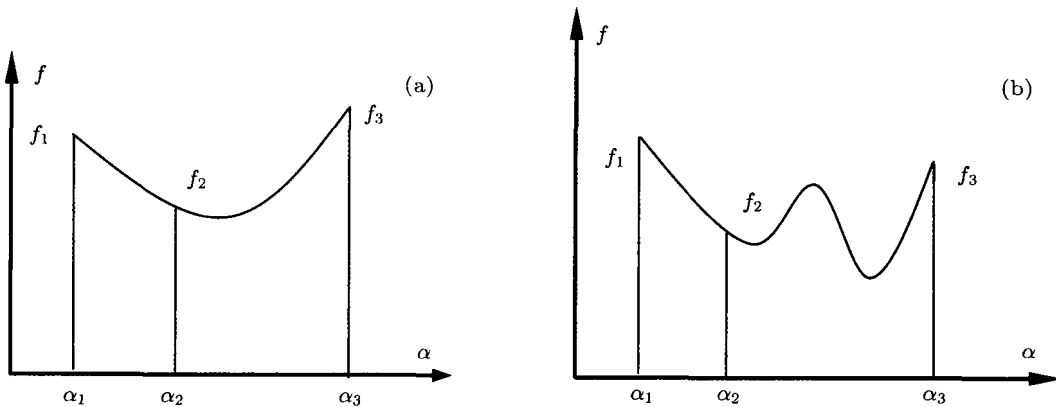


图 4 实际程序求解过程可能出现的情况 (a) 单谷函数; (b) 非单谷函数

3.6 梯度函数求解的差商算法

目标函数 $f(z)$ 是 z_1, z_2, \dots, z_n 复杂显函数, 具有复杂嵌套关系, 梯度的程序计算 $\text{grad}[f(z)] = \left[\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right]^T$, 是可以采用差商代替偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z_j} \approx \frac{f(z_j) - f(z)}{dz_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, 其中 $z = [z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_n]^T$, $z_j = [z_1, z_2, \dots, z_j + dz_j, \dots, z_n]^T$, 这是程序求解过程的实用求解方法.

3.7 计算精度判定

采用对称等距网格点划分条件下, 网格中心节点具有最大挠度, 采用两次划分的最大挠度差值的逼近精度来确定计算精度. 设第 k 次网格划分时最大的设计变量优化值为 $z_{\max}^{(k)}$, 设第 $k+1$ 次网格划分时最大的设计变量优化值为 $z_{\max}^{(k+1)}$.

逼近程度评定可描述为

$$\delta = |(z_{\max}^{(k+1)} - z_{\max}^{(k)}) / z_{\max}^{(k)}| < e_3. \quad (8)$$

4 算例分析

设矩形板薄板, 长 $a = 1000 \text{ mm}$, 宽 $b = 500 \text{ mm}$, 板厚为 $t = 10 \text{ mm}$, $t/b = 1/50$, 属于薄板. 薄板材料的弹性模量 $E = 200000 \text{ MPa}$, $\mu = 0.3$, $q = 1 \text{ MPa}$. 设定一维区间离散比较法的分点精度为: $e_1 = 10^{-5}$, 多维共轭梯度法精度 $e_2 = 10^{-4}$. 设计变量初值为: $z_{0i} = 10 \text{ rand}()$, $i = 1, 2, \dots, n$. 取 $nl = 15$, $nm = 7$, 动态设计变量数量为: $n = (15 + 1)/2 \cdot (7 + 1)/2 = 32$, 网格步长为 $h = 0.0625 \text{ m}$.

4.1 小变形优化程序求解

程序中的 cs 取值为 0, 为小变形问题. 相应求解四阶线性偏微分方程. 应用本程序优化分析, 通过 84 轮, 共 $84 \times 32 = 2688$ 次优化计算, 目标函数达到所设定精度. 获得设计变量优化值列于表 1.

由 $w = \frac{q}{D} h^4 W$, 获得矩形板薄板 1/4 区域的节点挠度的优化结果, 列于表 2.

将优化程序和有限元软件计算的薄板中心点挠度的计算结果列于表 3.

表1 优化程序计算的设计变量 W 值列表

设计变量优化结果								
z_1-z_8	0.314	0.840	1.307	1.646	1.865	1.994	2.060	2.080
z_9-z_{16}	0.835	2.262	3.586	4.591	5.267	5.679	5.895	5.961
$z_{17}-z_{24}$	1.236	3.389	5.429	7.006	8.088	8.756	9.110	9.220
$z_{25}-z_{32}$	1.382	3.806	6.117	7.914	9.152	9.922	10.331	10.457

表2 优化程序计算的对应的 1/4 区域的薄板的挠度

w/mm	行标 l 与对应 x 坐标 /mm									
		1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	62.5	125	187.5	250	312.5	375	437.5	500	
列标 m 与	1	62.5	0.262	0.700	1.089	1.371	1.554	1.662	1.717	1.733
对应	2	125	0.695	1.884	2.988	3.825	4.388	4.731	4.911	4.966
y 坐标	3	187.5	1.030	2.824	4.523	5.837	6.738	7.295	7.590	7.681
/mm	4	250	1.151	3.171	5.096	6.593	7.625	8.266	8.607	8.712

表3 优化程序和有限元软件计算的薄板中心点挠度 $w_{max}(mm)$ 列表

薄板网格	Ansys12 计算	程序计算	相对误差
8×4	8.969	9.387	4.66%
16×8	8.722	8.712	0.39%

针对网格 16×8 的划分情况, 优化程序计算的最大挠度与有限元的计算结果的相对误差仅为 0.39%。同时按两次网格加密, 优化程序计算的最大挠度的相对误差为 $\delta = 7.19\%$, 表明按 16×8

网格划分时的计算结果是较好的精确解。

4.2 大变形优化程序求解

当 $cs = \left(\frac{q}{D}h^4/t\right)^2$, 为薄板大变形问题, 相应求解的四阶非线性偏微分方程. 应用本文程序, 通过 52 轮, 共 $52 \times 32 = 1664$ 次优化计算, 目标函数达到所设定精度. 将设计变量优化值列于表 4. 将优化计算的部分过程列于表 5.

由 $w = \frac{q}{D}h^4W$, 获得矩形板薄板 1/4 区域坐标网格节点挠度的优化计算结果, 列于表 6.

表4 优化程序计算的 W (设计变量值) 列表

设计变量优化结果								
z_1-z_8	0.301	0.768	1.155	1.418	1.577	1.665	1.707	1.720
z_9-z_{16}	0.763	1.975	3.017	3.743	4.189	4.438	4.560	4.596
$z_{17}-z_{24}$	1.102	2.887	4.473	5.618	6.342	6.751	6.953	7.013
$z_{25}-z_{32}$	1.222	3.216	5.014	6.336	7.185	7.671	7.912	7.984

表 5 优化计算过程描述

轮次	本轮计算次数	设计变量								目标函数
0	0	2.137	6.261	4.507	5.301	7.695	3.819	8.384	8.558	3794.87000
		0.207	4.357	4.720	9.027	9.062	5.963	6.761	4.651	
		6.166	3.701	3.043	4.533	8.657	6.182	5.881	7.315	
		8.416	4.796	4.709	5.841	8.821	7.716	6.876	5.118	
1	32	0.320	0.930	1.487	1.818	1.930	1.933	2.033	2.145	3.80229
		0.890	2.482	3.923	4.760	4.960	4.866	4.928	5.079	
		1.362	3.738	5.964	7.214	7.322	6.882	6.687	6.761	
		1.527	4.194	6.765	8.218	8.214	7.525	7.145	7.171	
10	320	0.318	0.817	1.232	1.507	1.661	1.733	1.759	1.764	0.02209
		0.813	2.110	3.221	3.975	4.409	4.616	4.695	4.713	
		1.179	3.091	4.784	5.978	6.685	7.032	7.168	7.200	
		1.310	3.447	5.367	6.749	7.583	8.000	8.166	8.205	
50	1600	0.301	0.769	1.157	1.420	1.580	1.667	1.709	1.721	0.00052
		0.764	1.976	3.020	3.749	4.196	4.444	4.563	4.598	
		1.102	2.888	4.478	5.627	6.352	6.760	6.959	7.017	
		1.223	3.218	5.020	6.347	7.198	7.682	7.919	7.989	
52	1664	0.301	0.768	1.155	1.418	1.577	1.665	1.707	1.720	0.00047
		0.763	1.975	3.017	3.743	4.189	4.438	4.560	4.596	
		1.102	2.887	4.473	5.618	6.342	6.751	6.953	7.013	
		1.222	3.216	5.014	6.336	7.185	7.671	7.912	7.984	

表 6 对应的 1/4 区域的函数值优化计算结果

w/mm		行标 l 与对应 x 坐标/mm								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	62.5	125	187.5	250	312.5	375	437.5	500	
列标 m 与 对应 y 坐标/mm	1	62.5	0.251	0.640	0.963	1.181	1.314	1.387	1.423	1.433
	2	125	0.636	1.645	2.513	3.118	3.490	3.698	3.799	3.829
	3	187.5	0.918	2.405	3.726	4.680	5.283	5.625	5.793	5.843
	4	250	1.018	2.679	4.177	5.278	5.986	6.391	6.592	6.651

将优化程序和有限元软件计算的薄板中心点挠度的计算结果列于表 7。

按 16×8 网格划分时, 优化程序计算最大挠度值与有限元计算结果的相对误差为 0.67%。表明程序求解结果能较好的获得精确解。按两次网格加密, 优化程序计算的最大挠度值相对误差

为 $\delta = 5.42\%$, 表明按 16×8 网格划分时的计算结果已经具有良好的逼近程度。

由于模型的简化存在一定的误差, 因此计算结果是相当精确的, 表明针对非线性偏微分方程优化求解, 能够良好的获得薄板大变形问题的数值求解结果。

表7 优化程序和有限元软件计算的薄板中心点
挠度 w_{\max} (mm) 列表

薄板网格	Ansys12 计算	程序计算	相对误差
8×4	7.252	7.032	3.03%
16×8	6.696	6.651	0.67%

5 结论

1) 本文应用变分原理, 推导了具有固定边界的薄板大变形问题非线性偏微分方程组, 简化获得了直接求解薄板弯曲挠度的高阶非线性偏微分方程。

2) 运用非线性偏微分方程的边值问题的优化算法基本思路, 针对具有对称固定矩形边界和均布载荷下的薄板弯曲的高阶非线性偏微分方程, 基于动态设计变量优化算法求解原理, 以 $1/4$ 区域上离散坐标点未知挠度为动态设计变量, 以非线性差分方程组构建目标函数, 建立了未知挠度求解的新的优化求解算法。

3) 采用了共轭梯度多维优化方法, 构建了一维搜索和梯度计算的实用子程序, 在 Visual Fortran 软件平台下, 完成优化程序设计; 分别求解了薄板小变形和薄板大变形问题, 给出具有 3 位有效小数挠度计算结果, 通过与有限元求解结果比较, 表明本文算法的正确性和具有较高计算精度。

- [1] Timoshenk S, Woinowsky-Krieger S 1959 *Theory of Plates and Shells* (Now York: McGraw-Hill)
- [2] Alzheimer W E, Davis R T 1968 *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE* 4 905
- [3] Xu Z L 2006 *Elasticity* (4th Ed.) (Beijing: Higher Education Press) pp149–150 (in Chinese) [徐芝纶 2006 弹性力学 (第 4 版) (北京: 高等教育出版社) 第 149—150 页]
- [4] Huang Z Y 1957 *Acta Phys. Sin.* 13 312 (in Chinese) [黄泽言 1957 物理学报 13 312]
- [5] Qian W C, Ye K Y 1954 *Acta Phys. Sin.* 10 209 (in Chinese) [钱伟长, 叶开沅 1954 物理学报 10 209]
- [6] Hu H C 1955 *Acta Phys. Sin.* 11 19 (in Chinese) [胡海昌 1955 物理学报 11 19]
- [7] Xie Y X, Tang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* 53 2828 (in Chinese) [谢元喜, 唐驾时 2004 物理学报 53 2828]
- [8] Ma W X, Gu X, Gao L 2009 *Adv. Appl. Math. Mech.* 1 573
- [9] Yang B, Ding H J, Chen W Q 2008 *Appl. Math. Mech.* 29 9994
- [10] Huang J J 2009 *Chin. Phys.* 18 B 3616
- [11] Eerdun Buhe, Temuer Chaolu 2012 *Chin. Phys. B* 21 035201
- [12] Xu H, Chen L H, Mo J Q 2010 *Acta Phys. Sin.* 60 100201 (in Chinese) [徐惠, 陈丽华, 莫嘉琪 2011 物理学报 60 100201]
- [13] Chen L J, Ma C F 2010 *Chin. Phys. B* 19 010504
- [14] Polyanin A D, Zaitsev V F 2004 *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations* (Boca Raton, London, New York: Chapman & Hall/CRC) pp1–2
- [15] Hou X L, Qian Y, Wu H T 2010 *Acta Math. Eng.* 27 663 (in Chinese) [侯祥林, 钱颖, 吴海涛 2010 工程数学学报 27 663]
- [16] Hou X L, Liu T L, Zhai Z H 2011 *Acta Phys. Sin.* 60 090202 (in Chinese) [侯祥林, 刘铁林, 翟仲海 2011 物理学报 60 090202]
- [17] Hou X L, Zhai Z H, Zheng L, Liu T L 2012 *Acta Phys. Sin.* 61 010201 (in Chinese) [侯祥林, 翟中海, 郑莉, 刘铁林 2012 物理学报 61 010201]
- [18] Lao D Z 2007 *Variational Method Basis* (2nd Ed.) (National Defence Industry Press) pp74–91 (in Chinese) [老大中 2007 变分法基础 (第 2 版) (北京: 国防工业出版社) 第 74—91 页]

Study on derivation and optimization algorithm about thin plate bending large deformation higher-order nonlinear partial differential equations*

Hou Xiang-Lin^{1)†} Zheng Xi-Jian¹⁾ Zhang Liang²⁾ Liu Tie-Lin³⁾

1) (School of Traffic and Mechanical Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168, China)

2) (Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

3) (School of Civil Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168, China)

(Received 21 February 2012; revised manuscript received 10 March 2012)

Abstract

For a thin plate bending large deformation problem, variational principle is applied, and higher-order nonlinear partial differential equations about thin plate bending large deformation is established. Based on difference method and dynamic design variable optimization method, making unknown deflection of discrete coordinate points as design variables, differential equations sets of the discrete coordinates points as building objective function, a dynamic design variable optimization algorithm for computing thin plate bending deflection is proposed. Universal computing program is designed. Practical example about rectangular thin plate with fixed boundary under uniform load is analyzed. Comparing the program computing result with finite element solution. Effectiveness and feasibility of the method are verified. This method can be used to solve engineering problem.

Keywords: higher-order nonlinear partial differential equations, thin plate-bending large deformation, dynamic design variables optimization method, program design

PACS: 02.30.Jr, 02.60.Lj, 02.60.Pn, 87.10.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972144), the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 201102181), and Science Research Projects of Education Department of Liaoning Province, China (Grant No. L2010445).

† E-mail: drhouxl@tom.com