

# 一端自由一端固支曲线梁的自由振动

张 良, 史 民, \*曾晓辉

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

**摘 要:** 依据曲线梁弹性理论, 对一端自由和一端固支的曲线梁进行了面内和面外自由振动分析。依据曲线梁两端的边界条件, 对振动方程进行了求解。给出了不同开口条件下, 曲线梁面外振动特征计算结果。进而, 分析了几种不同材料曲线梁的自由振动特性。

**关键词:** 曲线梁, 活塞环, 振动特性, 耦合振动

## FREE VIBRATION OF CLAMPED-FREE SUPPORTED CURVED BEAM

ZHANG Liang, SHI Min, \*ZENG Xiao-hui

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** In this study, in-plane and out-of-plane free vibrations of curved beam are investigated by applying curved beam elasticity theory. Based on the boundary conditions of curved beam's two ends, some work on analytical solution and numerical solution of the vibration equations is done. The paper gets some result about out-of-plane free vibrations of curved beam with different opening angles. The author does some calculation about piston rings manufactured by different materials.

**Key words:** curved beam, piston rings, vibration characteristics, coupled vibration

曲线梁在工程中应用很广, 桥梁、大挠度系缆、发动机活塞环等结构均可视为不同种类的曲线梁。国内外学者对于曲线梁理论<sup>[1-5]</sup>作了不少研究。Archer从Love的运动基本方程出发<sup>[6]</sup>, 研究了小截面非完整圆环的面内非伸缩振动<sup>[7]</sup>。Irie等人基于Timoshenko梁理论利用传递矩阵法求解了各种边界条件下等截面圆弧拱的面内振动<sup>[8]</sup>。国内也有些学者多将曲线梁理论用于桥梁特性计算<sup>[9]</sup>。但是将曲线梁理论应用到活塞环振动特性计算的研究还很少。

本文主要运用曲线梁理论研究了活塞环在活塞冲程中的面内振动和面外自由振动特性。编制了计算活塞环振动特性的程序, 并进行了算例的计算。

### 1 振动方程的建立

本文依据 love 的弹性曲线梁理论, 从曲梁的平衡微分方程出发分别建立了建立活塞环的面内和面外振动方程。

#### 1.1 面内振动方程的建立

如图 1 所示的曲杆, 依据曲梁微段的平衡条件可以得到以下方程:

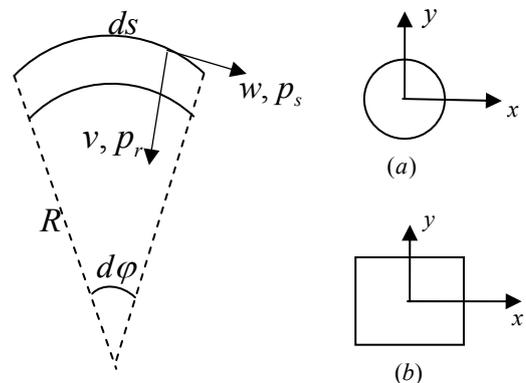


图 1 振动方程计算简图 (a) 圆形截面 (b) 矩形截面

基金项目: 国家自然科学基金(11072246, 10702073)

作者简介: 张 良(1988—), 男, 河南鹤壁人, 硕士研究生, 主要从事结构动力学研究

史 民(1988—), 男, 山东临沂人, 硕士研究生, 主要从事结构动力学研究

\*曾晓辉(1972—), 男, 湖南新化人, 副研究员, 主要从事工程结构动力响应和流固耦合研究(E-mail: zzh@imech.ac.cn)。

$$\left. \begin{aligned} \left[ EI_x \left( v'' + \frac{w'}{R} \right) \right]'' - \frac{EA}{R} \left( w' - \frac{v}{R} \right) &= p_r \\ \left[ EA \left( w' - \frac{v}{R} \right) \right]' + \left[ \frac{EI_x}{R} \left( v'' + \frac{w'}{R} \right) \right]' &= -p_s \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

上式中  $w$  和  $v$  分别为切向和径向的位移；右上角的“'”表示对曲线坐标  $s$  的微分； $EI_x$  和  $EA$  分别为曲杆在平面内的抗弯刚度和抗挤压刚度； $R$  为曲杆任一点的曲率半径； $p_r$  和  $p_s$  分别为沿曲杆分布的径向和切向荷载。

考虑到线性方程的振动是简谐的，对于等截面曲线梁，由于  $EI_x$ 、 $EA$  和  $R$  均为常数，得到等截面曲线梁平面挠曲的固有振动方程为：

$$\left. \begin{aligned} EI_x v'''' + \frac{EA}{R^2} v + \frac{EI_x}{R} w'''' - \frac{EA}{R} w'' &= m\omega^2 v \\ \left( EA + \frac{EI_x}{R^2} \right) w'' + \frac{EI_x}{R} v'''' - \frac{EA}{R} v'' &= -m\omega^2 w \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$m$  是计算圆弧微段的质量。

## 1.2 面外振动方程的建立

依据 Heins 的计算理论<sup>[10]</sup>，从其弹性平衡方程出发，曲线梁的面外振动方程可以表示为：

$$\left. \begin{aligned} \left( EI_y + \frac{EI_w}{R^2} \right) u'''' - \frac{GI_d}{R^2} u'' + \frac{EI_w}{R} \theta'''' - \frac{EI_y + GI_d}{R} \theta'' &= q \\ EI_w \theta'''' - GI_d \theta'' + \frac{EI_y}{R^2} \theta + \frac{EI_w}{R} u'''' - \frac{EI_y + GI_d}{R} u'' &= M \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上式中  $u$  和  $\theta$  分别为侧向位移和扭转角； $EI_y$ 、 $GI_d$  和  $EI_w$  分别为拱截面的侧向挠曲刚度、自由扭转刚度和约束扭转刚度； $q$  和  $M$  分别为沿拱轴分布的侧向荷载和扭转力矩荷载。

面外振动时，截面上的所有质量的惯性力将形成水平方向的惯性力和绕截面扭转中心的惯性矩。对于闭口截面的曲线梁，约束扭转项相对于自由扭转项是微小的，可以忽略不计。考虑到本文讨论的结构截面的双对称性和线型振动的简谐性，所以

$$\left. \begin{aligned} \left( EI_y + \frac{EI_w}{R^2} \right) u'''' + \left( N - \frac{GI_d}{R^2} \right) u'' + \frac{EI_w}{R} \theta'''' - \frac{EI_y + GI_d}{R} \theta'' &= m\omega^2 u \\ EI_w \theta'''' - GI_d \theta'' + \frac{EI_y}{R^2} \theta + \frac{EI_w}{R} u'''' - \frac{EI_y + GI_d}{R} u'' &= I_s \omega^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$I_s$  是截面质量对扭心的极惯性矩。

## 2 振动方程的求解

### 2.1 面内振动方程求解

并引入面内振动时曲线梁轴向不伸缩的假定： $\varepsilon = w' - \frac{v}{R} = 0$ ，对方程(2)进行化简，得到等截面曲线梁平面挠曲的固有振动方程为：

$$\frac{d^6 w}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + (1 - \Omega) \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \Omega w = 0 \quad (5)$$

上式中  $\varphi$  为对应于曲线坐标的圆心角,  $ds = R d\varphi$ ,  $\Omega = \frac{m\omega^2}{EI_x} R^4$

其通解为:  $w = A_1 \cos n_1 \varphi + B_1 \sin n_1 \varphi + A_2 \cos n_2 \varphi + B_2 \sin n_2 \varphi + A_3 \cos n_3 \varphi + B_3 \sin n_3 \varphi$

其中  $n_1$ 、 $n_2$  和  $n_3$  是方程(5)特征方程的根。由轴向不伸缩假定:  $v = R w'$ , 可以求得  $v$ 。上面求解过程中  $\omega$  和六个待定常数是未知的, 依据曲线梁两端的六个边界条件所得到的方程组, 由系数行列式的值等 0, 就可以求出  $\omega$ , 带到方程组中就可以求出待定常数的值。

固定端的位移条件(轴向、径向位移和弯曲角):  $w = 0, v = 0, \phi = v' = 0$

自由端的力条件(弯矩、轴力和剪力):  $M = 0, N = 0, Q = 0$

## 2.2 面外振动方程求解

由于闭口截面的曲线梁, 约束扭转项相对于自由扭转项是微小的, 忽略可以不计。对方程(4)进行解耦:

$$GI_d \theta^{IV} + \frac{2GI_d}{R^2} \theta'' + \frac{GI_d}{R^4} \theta = -q \frac{EI_y + GI_d}{REI_y} + m \frac{GI_d}{R^2 EI_y} - m'' \quad (6)$$

分别求出方程(6)通解和特解

$$\theta = \theta_H + \theta_P = A \cos \frac{s}{R} + B \sin \frac{s}{R} + Cs \cos \frac{s}{R} + Ds \sin \frac{s}{R} + \frac{R^2}{EI_y} m - \left( \frac{R^3}{GI_d} + \frac{R^3}{EI_y} \right) q$$

将上面的结果带入方程(4)中的第一个式子, 并不考虑翘曲扭转项, 结果为

$$EI_y u^{IV} - \frac{GI_d}{R^2} u'' = q + \frac{EI_y + GI_d}{R} \theta'' \quad (7)$$

同样可以分别求出通解和特解, 得到:  $u = u_H + u_P$

同 2.1 中的方法, 依据曲线梁两端的边界条件, 可以进行求解。

固定端的位移条件(侧向位移、弯曲角, 扭转角):  $u = 0, u' = 0, \theta = 0$

自由端的力条件(弯矩、剪力和扭矩):  $M = 0, Q = 0, T = 0$

## 3 算例分析

### 3.1 考虑不同开口曲线梁的自振频率(圆形截面)

本例中作者运用自编的程序分别考虑了开口角度为: 60°、120°、180°、240°、300°时, 曲线梁的面外振动的情况。为了与现有文献对比, 本例中采取圆形截面。

表 1 不同开口角度的曲线梁的面外振动频率

开口角度	60	120	180	240	300
程序结果	582.5	147.2	68.95	43.4	33.15

这里参考 Ekrem 的方法<sup>[5]</sup>, 引入频率无量纲系数:

$c = \omega R^2 \phi^2 \sqrt{m / EI_d}$ , 这里  $\phi$  为开口角度, 这样可以得到开口

角度与无量纲量之间的关系图, 并将本例程序的结果与 Ekrem 的文献结果进行了对比(如图 2), 吻合良好。

### 3.2 几种不同材料自振频率的比较(矩形截面)

本文分别用自编程序计算了灰口铸铁、球墨铸铁和碳钢三种材料活塞环的振动特性。由于活塞环截面的特征长度与半径之比:  $h / R < 0.1$ , 故本文中并没有考虑矩形截面活塞环的翘曲影响。因为 360° 活塞环

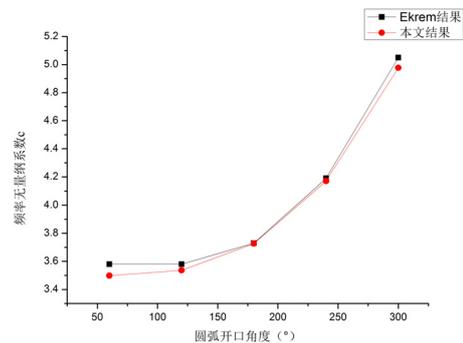


图 2 本文结果与 Ekrem 文献对比

的对称性，我们可以取 180° 半圆弧结构进行分析，为了较为准确的模拟活塞环的边界约束条件，算例中的边界条件为：一端固定，一端自由。

表 2 不同活塞环材料的振动特性

材料	弹性模量 $E_n \cdot \text{GN/m}^2$	密度 $\text{kg/m}^3 (*10^3)$	面内振动频率	面外振动频率
灰口铸铁	83-134	6.94	92.78	57.81
球墨铸铁	155-165	7.32	100.36	62.62
碳钢	185-210	7.74	109.26	68.11

从表 2 中可以看出，随着材料弹性模量的增加，活塞环的面内振动和面外振动频率均会有所增加，这对于在工程中选择合适的活塞环材料具有参考价值。

## 4 结论

本文应用曲线梁理论计算了不同的开口情况下，等截面曲线梁结构的振动特征变化：曲线梁结构开口越大，自由振动的频率越低。本文还用曲线梁理论计算了几种不同的材料活塞环，相同尺寸条件下，材料的弹性模量越大，活塞环的振动频率越高。

### 参考文献：

- [1] 姚玲森. 曲线梁[M]. 人民交通出版社
- [2] 赵跃宇, 康厚军, 冯锐, 劳文全. 曲线梁研究进展. 力学进展[J]. 2006, 36, 2: 170-186
- [3] 叶康生, 赵雪健. 动力刚度法求解平面曲梁面外自由振动问题[J]. 工程力学. 2012, 29, 3: 1-8
- [4] 袁驹, 叶康生, 王珂. 平面曲梁面内自由振动分析的自适应有限元法[J]. 工程力学. 2009, 26: 126-132
- [5] Ekrem Tufekci, O Yasar Dogruer. Out-of-plane free vibration of a circular arch with uniform cross-section: Exact solution[J]. Journal of Sound and Vibration 2006,291: 525-538
- [6] A R H Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity[M]. Dover Publications, 1944
- [7] Archer R R. Small vibrations of thin incomplete circular rings [J]. International Journal of Mechanical Sciences ,1959 ,1 :45-56
- [8] Irie T,Yamada G,Tanaka K. Natural frequencies of in-plane vibrations of arcs[J]. ASME Journal of Applied Mechanics ,1983 ,50 :449-452
- [9] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 中国铁道出版社。
- [10] C P Heins, Bending and Torsional Design in Structural Members [M]. Lexington Books, 1975