

# 微重力环境下无限长柱体内角毛细流动 解析近似解研究\*

李永强<sup>1)†</sup> 刘玲<sup>1)</sup> 张晨辉<sup>1)</sup> 段俐<sup>2)</sup> 康琦<sup>2)</sup>

1) (东北大学理学院应用力学研究所, 沈阳 110819)

2) (中国科学院力学研究所, 北京 100190)

(2012年6月20日收到; 2012年7月9日收到修改稿)

应用同伦分析法研究无限长柱体内角毛细流动解析近似解问题, 给出了级数解的递推公式. 不同于其他解析近似方法, 该方法从根本上克服了摄动理论对小参数的过分依赖, 其有效性与所研究的非线性问题是否含有小参数无关, 适用范围广. 同伦分析法提供了选取基函数的自由, 可以选取较好的基函数, 更有效地逼近问题的解, 通过引入辅助参数和辅助函数来调节和控制级数解的收敛区域和收敛速度, 同伦分析法为内角毛细流动问题的解析近似求解开辟了一个全新的途径. 通过具体算例, 将同伦分析法与四阶龙格库塔方法数值解做了比较, 结果表明, 该方法具有很高的计算精度.

**关键词:** 无限长柱体, 内角, 毛细流动, 同伦分析法

**PACS:** 47.11.-j, 47.55.np

**DOI:** 10.7498/aps.62.024701

## 1 引言

在微重力环境下, 带有内角的容器中的液体会沿着内角流动, 这种流动就称作微重力下容器内角处的毛细流动. 目前, 毛细流动问题受到了广泛研究, 因为在微重力环境下内角相当于为液体提供了流动的“管道”, 并且这种流动是自发的, 所以这种内角结构在航天工程中经常被用来进行流体管理. 比如燃料储箱中蓄液池以及导流板的应用, 都是依据这种内角处的毛细流动原理.

在无限长柱体内角处毛细流动的动力学研究方面, Washburn 进行了开创性的理论研究<sup>[1]</sup>, 研究表明当仅考虑毛细驱动力和黏性阻力的平衡时液体界面的爬升距离与时间的二分之一次方成正比, 这个关系式就是现在被大家所熟知的 Washburn 方程. Hu 等<sup>[2,3]</sup> 利用落塔实验研究了在满足、接近、不满足 Concus-Finn 条件三种情况下, 液体初始体积对内角处毛细流动的影响, 得到了各条件下毛细爬升高度随微重力时间变化的曲线, 发现在一定微

重力时间内液体在内角处爬升的高度随液体初始体积的增大而增大的现象. 1995年 Dong 等<sup>[4]</sup> 用理论分析和实验的方法研究了边长为 0.3—0.5 mm 的方形微管中的毛细流动问题, 以流动液面的截面为变量, 通过有限元方法求解热传导方程, 得到了内角流动的二次解, 但由于曲率半径计算的限制, 该方法不能应用于复杂几何形状. Wei 等<sup>[5]</sup> 推广了 Dong 的方法, 通过修正曲率半径的计算, 寻找截面与曲率半径的关系, 使其可以应用于不同接触角、不同二面角的情形, 并修正了最小二乘有限元方法的问题, 获得了内角流动的二次解并进行了毛细管和落塔实验验证. Weislogel 等<sup>[6]</sup> 全面研究了微重力环境下无限长柱体内角处的毛细流动问题, 给出了不同情况下内角流动的非线性动力学方程, 用数值解进行了求解并且利用短时微重力落塔实验进行了验证.

目前关于无限长柱体内角处毛细流动非线性动力学方程的求解尚无详尽的解析近似解研究, 均采用数值解的方法. 关于非线性动力学方程的解析

\* 中国科学院国家微重力实验室开放课题资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yqli@mail.ncu.cn

近似求解常采用摄动法如 L-P 法、KBM 法、多尺度法和平均法等,但这些方法对弱非线性系统是有效的,而对强非线性系统则难以应用. 廖世俊 [7] 基于代数拓扑学中连续映射的概念,提出了一种新的求解非线性问题解析解的方法——同伦分析法. 不同于所有已知的解析近似方法,同伦分析法通过引入辅助参数和辅助函数来调节和控制级数解的收敛区域和收敛速度,该方法对强、弱非线性系统都适合,已成功解决工程技术中的许多非线性问题 [8-16].

本文采用同伦分析法求解了 Weislogel 建立的毛细流动非线性动力学方程,以级数解的形式获得了内角流动的近似解析解,并给出了级数解的递推公式.

## 2 同伦分析法基本思想

Weislogel 建立了三种情况下的毛细流动非线性动力学方程,可以概括为

$$y(x)\ddot{y}(x) + 2\dot{y}^2(x) + \alpha x\dot{y}(x) + \beta y(x) = 0. \quad (1)$$

边界条件为

$$y(1) = 0, \quad \dot{y}(1) = -0.5. \quad (2)$$

当  $\alpha = 1, \beta = 0$  时,为文献 [6] 的毛细上升情况;当  $\alpha = 2, \beta = 1$  时,为文献 [6] 的液滴扩展情况;当  $\alpha = 3, \beta = -1$  时,为文献 [6] 的恒定流情况.

根据方程 (1),定义非线性算子

$$N[\Phi(x; q)] = \Phi(x; q) \frac{\partial^2 \Phi(x; q)}{\partial x^2} + 2 \left[ \frac{\partial \Phi(x; q)}{\partial x} \right]^2 + \alpha x \frac{\partial \Phi(x; q)}{\partial x} + \beta \Phi(x; q), \quad (3)$$

其中,  $q \in [0, 1]$  为嵌入变量,  $\Phi(x; q)$  是未知函数  $y(x)$  的映射. 根据传统的同伦方法,廖世俊 [7] 构造了零阶形变方程

$$(1 - q)\ell[\Phi(x; q) - y_0(x)] = q\hbar HN[\Phi(x; q)], \quad (4)$$

该方程满足边界条件

$$\Phi(1; q) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x; q)}{\partial x} \Big|_{x=1} = -0.5, \quad (5)$$

其中,  $\hbar$  是非零的辅助算子,  $H(x)$  为辅助函数,  $\ell$  为辅助的线性算子,  $y_0(x)$  是  $y(x)$  的初始猜测解. 由于参数的选择是十分自由的. 当  $q = 0$  和  $q = 1$  时,可得

$$\Phi(x; 0) = y_0(x),$$

$$\Phi(x; 1) = y(x). \quad (6)$$

当  $q$  从 0 变化到 1 时,  $\Phi(x; q)$  从初始值  $y_0(x)$  变化到 (1) 式的解  $y(x)$ .

根据 (1) 式,选取线性辅助算子

$$\ell[\Phi(x; q)] = -\frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x; q)}{\partial x^2} + x \frac{\partial \Phi(x; q)}{\partial x} - \Phi(x; q). \quad (7)$$

该线性算子具有性质

$$\ell[C_1 x + C_2 x^2] = 0, \quad (8)$$

其中,  $C_1, C_2$  为任意常数. 根据边界条件 (2) 式,初始值  $y_0(x)$  设为

$$y_0(x) = \sigma + (1/2 - 2\sigma)x + (\sigma - 1/2)x^2, \quad (9)$$

其中  $\sigma$  为未知常数. 利用泰勒展开定理,将  $\Phi(x; q)$  展开成关于  $q$  的幂级数

$$\Phi(x; q) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)q^n, \quad (10)$$

其中

$$y_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Phi(x; q)}{\partial q^n} \Big|_{q=0}. \quad (11)$$

如果辅助参数  $\hbar$ 、辅助函数  $H(x)$  和未知常数选取合适的值,则当  $q = 1$  时, (10) 式能够收敛,则可得

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n(x) \approx y_0(x) + \sum_{n=1}^m y_n(x), \quad (12)$$

(12) 式必定是非线性方程 (1) 的某一个解. 定义矢量

$$\mathbf{Y}_m = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_m(x)\}.$$

对前面求得的零阶形变方程 (4) 求辅助参数  $q$  的  $n$  阶导数,再令  $q = 0$ ,然后除以  $n!$ ,可得  $n$  阶形变方程

$$\ell[y_n(x) - \chi_n y_{n-1}(x)] = \hbar H(x) R_n(\mathbf{Y}_{n-1}). \quad (13)$$

该方程满足边界条件

$$y_n(1) = 0, \quad \dot{y}_n(1) = 0, \quad n > 1, \quad (14)$$

其中

$$R_n(\mathbf{Y}_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{dN^{n-1}[\Phi(x; q)]}{dq^{n-1}} \Big|_{q=0} = \sum_{j=0}^{n-1} y_j(x) \ddot{y}_{n-1-j}(x) + 2 \sum_{j=0}^{n-1} \dot{y}_j(x) \dot{y}_{n-1-j}(x) + \alpha x \dot{y}_{n-1}(x) + \beta y_{n-1}(x) \quad (15)$$

和

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 1, \\ 1, & n > 1. \end{cases} \quad (16)$$

根据解表达原则和系数遍历性原则<sup>[7]</sup>可以令辅助函数  $H(x)$  为

$$H(x) = x^k, \quad (17)$$

其中  $k$  为整数, 研究中我们发现  $k \leq 2$  时,  $y_n(x)$  中含有  $\ln(x)$  项, 为了避免出现  $\ln(x)$  项, 取

$$H(x) = x^3. \quad (18)$$

通过求解方程 (13), 我们发现  $y_n(x)$  可以表达成

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^{3n+2} a_{n,j} x^j, \quad (n \geq 0), \quad (19)$$

其中  $a_{n,j}$  为系数, 将 (19) 式代入到方程 (13) 中, 得到如下递推公式 ( $n \geq 1$ ):

$$a_{n,0} \equiv 0, \quad (20a)$$

$$a_{n,1} = - \sum_{j=2}^{3n+2} a_{n,j}, \quad (20b)$$

$$a_{n,2} = - \sum_{j=3}^{3n+2} (j-1)a_{n,j}, \quad (20c)$$

$$a_{n,j} = \chi_n \chi_{3n+1-j} a_{n-1,j} - \frac{2\hbar[\alpha(j-3) + \beta]\chi_{j-1} a_{n-1,j-3}}{(j-2)(j-1)} - \frac{2\hbar}{(j-2)(j-1)} \times \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=\max(0, j-3n+3k)}^{\min(j-2, 3k+2)} [a_{k,r} a_{n-1-k, j-1-r} (r+j-2)(j-r-1)], \quad j \geq 3. \quad (20d)$$

### 3 收敛性证明

若级数解 (12) 收敛, 必有

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} y_m(x) = 0,$$

则由 (7) 式, 可得

$$\ell \left[ \lim_{m \rightarrow +\infty} y_m(x) \right] = 0.$$

根据 (13) 式和 (16) 式, 有

$$\hbar H(x) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(Y_{n-1}) = \ell[y_m(x)],$$

从而可使

$$\hbar H(x) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(Y_{n-1}) = \ell \left[ \lim_{m \rightarrow +\infty} y_m(x) \right]$$

成立. 由于  $\hbar \neq 0, H(x) \neq 0$ , 所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n(Y_{n-1}) = 0.$$

将 (15) 式代入上式, 可得

$$\left[ \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x) \right] \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \ddot{y}_n(x) \right] + 2 \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \dot{y}_n(x) \right]^2 + \alpha x \sum_{n=0}^{+\infty} \dot{y}_n(x) + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x) = 0. \quad (21)$$

根据 (9) 和 (14) 式, 则

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y_n(1) = 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \dot{y}_n(1) = -0.5. \quad (22)$$

将方程 (21), (22) 和方程 (1), (2) 进行比较, 显然, 收敛级数 (12) 必是毛细流动非线性动力学方程之解.

### 4 计算结果分析

通过上述分析可知, 仅需选择合适的辅助参数  $\sigma$  和  $\hbar$  时, 可确保级数解 (12) 收敛. 将级数解 (12) 代入到方程 (1) 中, 取平方后在区域  $[0,1]$  上积分, 可得平方残差为

$$E_m = \int_0^1 \left\{ \sum_{n_1=0}^m y_{n_1}(x) \sum_{n_2=0}^m \ddot{y}_{n_2}(x) + 2 \left[ \sum_{n=0}^m \dot{y}_n(x) \right]^2 + \alpha x \sum_{n=0}^m \dot{y}_n(x) + \beta \sum_{n=0}^m y_n(x) \right\}^2 dx. \quad (23)$$

图 1 为毛细上升, 液滴扩展和恒定流三种毛细流动情况下, 取前 5 阶级数解时, 方程 (1) 的平方残差  $E_m$  和  $\hbar, \sigma$  的关系曲线图.

从图 1 可以看出, 当毛细上升情况下,  $E_m$  的最小值在  $\hbar \in [-0.02, 0], \sigma \in [0.34, 0.36]$  范围内, 级数解在该区域内收敛, 逼近于精确解; 当液滴扩展情况下,  $E_m$  的最小值在  $\hbar \in [0.72, 0.74], \sigma \in [0.49, 0.51]$  范围内; 当恒定流情况下,  $E_m$  的最小值在  $\hbar \in [-0.20, -0.10], \sigma \in [1.10, 1.25]$  范围内. 为了精确获得最小平方残差位置, 方程 (23) 的极值点为

$$\frac{\partial E_m}{\partial \hbar} = 0, \quad \frac{\partial E_m}{\partial \sigma} = 0. \quad (24)$$

联立求解方程 (24) 即可得到  $\hbar$  和  $\sigma$  的值. 表 1 为不同阶数下, 三种流动形式取最小平方残差时,  $y(0)$  的同伦分析法计算结果与龙阁库塔 (R-K) 数值计算结果的对比. 从表 1 可以看出当级数  $n > 4$  时, 级数解就开始收敛, 所以在毛细流动动力学方程计

算中, 取阶数  $n = 5$ .

图 2 为取阶数  $n = 5$  时, 三种毛细流动情况下  $y(x)$  的同伦解析近似解与 R-K 数值解对比图, 由图 2 可知, 应用同伦分析法得到的解析近似解与数值法求得的解是相当符合的.

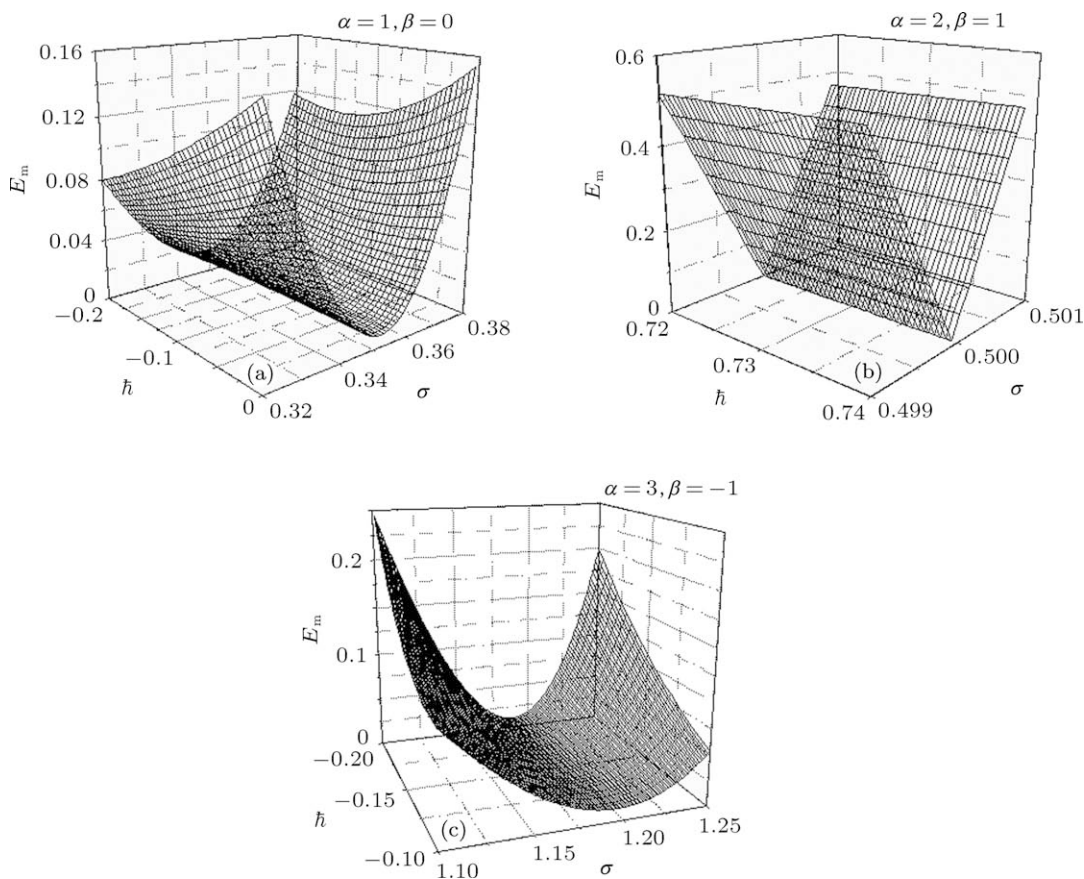
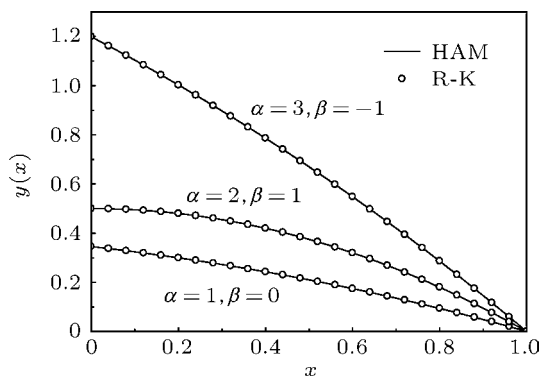


图 1 三种毛细流动形式, 前 5 级级数解的平方残差  $E_m$  与  $\hbar$  和  $\sigma$  的关系曲线图 (a) 毛细上升; (b) 液滴扩展; (c) 恒定流

表 1  $y(0)$  的  $n$  阶同伦近似解与龙阁库塔 (R-K) 数值计算结果的比较

$n$	$\alpha = 1, \beta = 0$		$\alpha = 2, \beta = 1$		$\alpha = 3, \beta = -1$	
	$\hbar$	$\sigma$	$\hbar$	$\sigma$	$\hbar$	$\sigma$
1	-1.027600161	0.339875047	-0.343142732	0.499985502	-0.095531774	1.197882777
2	-3.045104944	0.340710560	-0.069763606	0.499998862	-0.119465754	1.197915014
3	-0.289956695	0.344440853	0.106137746	0.500000227	-0.159398989	1.197966455
4	-0.362479346	0.344952288	-0.178454759	0.500000012	-0.239425043	1.198061062
5	-0.725307192	0.345162924	-0.214825791	0.500000000	-0.466902382	1.199299349
R-K	-	0.345163300	-	0.5	-	1.199299419

图2 三种毛细流动形式,  $y(x)$  的前5阶同伦解析近似解曲线

## 5 结论

本文应用同伦分析方法获得了微重力环境下无限长柱体内角毛细流动的解析近似解并给出了级数解的递推公式. 同伦分析方法为我们提供了一个方便的方法来控制渐进级数的收敛, 这是同伦分析方法和其它方法根本性的区别. 从同伦分析法与四阶龙格库塔法的计算结果比较表明, 同伦分析法具有较好的计算精度.

- [1] Washburn E W 1921 *Physical Review* **17** 273283
- [2] Wang C X, Xu S H, Sun Z W, Hu W R 2010 *International Journal of Heat and Mass Transfer* **53** 18011807
- [3] Xu S H, Wang C X, Sun Z W, Hu W R 2007 *Journal of the Japan Society of Microgravity Application* **24** 275278
- [4] Dong M, Chatzis I 1995 *Journal of Colloid and Interface Science* **172** 278288
- [5] Wei Y X, Chen X Q, Huang Y Y 2011 *Science china: Technological Sciences* **41** 12181224
- [6] Weislogel M M 1996 *NASA Technical Memorandum*. 107364
- [7] Liao S J 2006 *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method* (Bei jing: Science Press) p204 (in Chinese) [廖世俊 2006 超越摄动 - 同伦分析方法导论 (北京: 科学出版社) 第 204 页]
- [8] Cheng J, Liao S J 2007 *Acta Mechanica Sinica* **39** 715720 (in Chinese) [成均, 廖世俊 2007 力学学报 **39** 715720]
- [9] Liao S J 2003 *Journal of Fluid Mechanics* **488** 189212
- [10] Li Y Q, Zhu D W, Li F 2009 *Chinese journal of mechanical engineering* **45** 3740 (in Chinese) [李永强, 朱大巍, 李锋 2009 机械工程学报 **45** 3740]
- [11] Li Y Q, Li F, Zhu D W 2010 *Composite Structures* **92** 11101119
- [12] Yuan P X, Li Y Q 2010 *Applied Mathematics and Mechanics* (EnglishEdition) **31** 12931304
- [13] Li Y Q, Li F, He Y L 2011 *Composite Structures* **93** 360368
- [14] Li Y Q, Zhu D W 2011 *Composite Structures* **93** 880888
- [15] Shi Y R, Yang H J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6774 (in Chinese) [石玉人, 杨红娟 2010 物理学报 **59** 6774]
- [16] Yang P, Chen Y, Li Z B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3668 (in Chinese) [杨沛, 陈勇, 李志斌 2010 物理学报 **59** 3668]

# Analytical approximations for capillary flow in interior corners of infinite long cylinder under microgravity\*

Li Yong-Qiang<sup>1)†</sup> Liu Ling<sup>1)</sup> Zhang Chen-Hui<sup>1)</sup> Duan Li<sup>2)</sup> Kang Qi<sup>2)</sup>

1) (*Institute of Applied Mechanics, College of Science, Northeastern University, Shenyang 110819, China*)

2) (*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 20 June 2012; revised manuscript received 9 July 2012)

## Abstract

The capillary flow in interior corners of infinite long cylinder under microgravity environment is investigated by the homotopy analysis method (HAM). Different from other approximate computational method, the HAM totally depends on small physical parameters, and thus it is suitable for most nonlinear problems. The HAM provides us with a great freedom to choose basis functions of solution series, so that a nonlinear problem can be more effectively approximated. The HAM can adjust and control the convergence region and the convergence rate of the series solution through introducing auxiliary parameter and the auxiliary function. The computed result indicates that this method has the advantage of high accuracy.

**Keywords:** infinite long cylinder, interior corners, capillary flow, homotopy analysis method

**PACS:** 47.11.-j, 47.55.np

**DOI:** 10.7498/aps.62.024701

---

\* Project supported by the Chinese Academy of Sciences National Microgravity Laboratory Opened Subject Funded Project.

† Corresponding author. E-mail: yqli@mail.neu.edu.cn