

微重力下圆管毛细流动解析近似解研究*

李永强^{1)†} 张晨辉¹⁾ 刘玲¹⁾ 段俐²⁾ 康琦²⁾

1) (东北大学理学院应用力学研究所, 沈阳 110819)

2) (中国科学院力学研究所, 国家微重力实验室, 北京 100190)

(2012年9月3日收到; 2012年9月8日收到修改稿)

应用同伦分析法研究微重力环境下圆管毛细流动解析近似解问题, 给出了级数解的表达式. 不同于其他解析近似方法, 该方法从根本上克服了摄动理论对小参数的过分依赖, 其有效性与所研究的非线性问题是否含有小参数无关, 适用范围广. 同伦分析法提供了选取基函数的自由, 可以选取较好的基函数, 更有效地逼近问题的解, 通过引入辅助参数和辅助函数来调节和控制级数解的收敛区域和收敛速度, 同伦分析法为圆管毛细流动问题的解析近似求解开辟了一个全新的途径. 通过具体算例, 将同伦分析法与四阶龙格库塔方法数值解做了比较, 结果表明, 该方法具有很高的计算精度.

关键词: 圆管, 微重力, 毛细流动, 同伦分析法

PACS: 47.11.-j, 47.55.nd

DOI: 10.7498/aps.62.044701

1 引言

目前关于微重力环境下的圆管毛细流动问题受到了广泛研究, 并得到了不同的液面高度对时间的依赖关系. Lucas^[1] 和 Washburn^[2] 考虑了液面的毛细力和液体在水平管中的摩擦力, 利用力平衡方程得到了毛细管中液面高度 h 随时间的变化关系为 $h-t^{1/2}$, 并且 Lucas-Washburn 方程被 Bell 和 Cameron^[3] 的实验所证实. 由于 Lucas-Washburn 模型在液体流动的初始阶段假定液面速度为无穷大, 因此它的有效性受到了限制, 并且实验^[2-5] 都是在地面重力条件下用很小尺寸的管径完成的, 因而在实验中观察到了液体的 Lucas-Washburn 行为 ($h-t^{1/2}$). Siegel^[6] 首次利用自由落体平台进行了微重力条件下的实验, 微重力时间为 0.74 s, 在实验中观测到了液面高度随时间变化的线性阶段 ($h-t$), 但是在进入 Lucas-Washburn 阶段之前实验就结束了. Petrash 等^[7] 首次利用落塔实验研究了液面高度随时间的变化, 该实验中微重力时间为 2.25 s, 其结果也表明存在液面高度与时间呈线性关系的阶段, 除

此以外, 他们还发现, 在进入线性阶段之前, 还应有一个初始的 $h-t^2$ 关系. 有研究者尝试通过导入几种其他的影响, 像惯性力^[8,9]、液池自由面的曲率^[7]、动态接触角^[6,10,11] 等来改进 Lucas-Washburn 方程. Levine 等^[12] 提出了目前为止关于毛细流动的最详尽的理论. Stange 等^[13] 利用德国不莱梅的落塔研究了微重力条件下圆柱形管中液体的毛细流动过程, 从理论上建立了圆管毛细流动的非线性动力学方程, 通过数值解和实验相结合的方法给出了毛细流动过程在不同阶段时毛细爬升高度随时间变化的规律. Wang 等^[14] 研究了微重力环境下插入液体中的圆管毛细流动过程, 研究了接触角和管径尺寸对毛细流动的影响, 实验结果表明: 随着接触角的增加, 圆管中的液面高度 h 和液面速度 \dot{h} 随着微重力时间单调的减小. 随着管径尺寸的增加, 在一定的微重力时间内, $h-t$ 曲线及 $\dot{h}-t$ 曲线并不是单调变化的, 不同管径尺寸的 $h-t$ 曲线可能相互发生交叉.

目前关于圆管毛细流动非线性动力学方程的求解尚无详尽的解析近似解研究, 均采用数值解的方法. 关于非线性动力学方程的解析近似求解常采用摄动法, 如庞加莱 - 林兹斯泰德法、渐进法、多

* 中国科学院国家微重力实验室开放基金资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yqli@mail.neu.edu.cn

尺度法和平均法等,但这些方法对弱非线性系统是有效的,而对强非线性系统则难以应用. 廖世俊^[15]基于代数拓扑学中连续映射的概念,提出了一种新的求解非线性问题解析解的方法——同伦分析法. 不同于所有已知的解析近似方法,同伦分析法通过引入辅助参数和辅助函数来调节和控制级数解的收敛区域和收敛速度,该方法对强、弱非线性系统都适合,已成功解决工程技术中的许多非线性问题^[16–25].

本文采用同伦分析法求解了 Stange 等建立的圆管毛细流动非线性动力学方程,以级数解的形式获得了内角流动的近似解析解,并给出了级数解的具体表达形式.

2 同伦分析法基本思想

Stange 等^[13]从理论上对微重力条件下插入液面的圆管毛细流动进行了分析,几何构型的示意图如图 1 所示^[26]. 在容器内壁与圆管外壁设有防爬挡板,圆管插入液面的深度记为 l_0 ,圆管内液面中心点的位置用 h 表示.

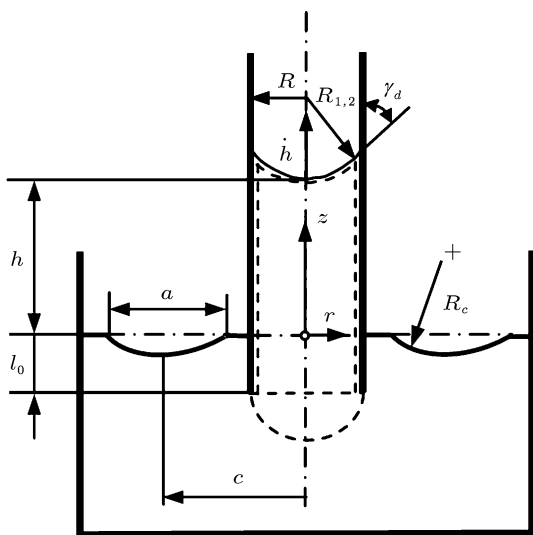


图 1 圆管毛细流动几何构型的示意图

初始液体高度记为 l_0 (插入液面深度),圆管内液面高度为 h ,液面速度为 \dot{h} . 圆管的半径为 R ,液面曲率的主半径为 R_1 和 R_2 ,动态接触角为 γ_d . 容器内液体自由面的半径 R_c 可由防爬挡板间的距离 a 以及容器中自由面的中心线半径 c 计算得出. Stange 等^[13]在 Levine 等^[12]方法的基础上做了改进,提

出了毛细流动的非线性动力学方程为

$$\ddot{h} = \frac{1}{h + l_0 + \frac{73}{60}R} \left\{ \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{2s(t) \cos \gamma_d}{R} - \frac{1}{R_c} \right] - \left[\frac{8}{R^2} (h + l_0) + \frac{2}{R} \right] v \dot{h} - [1 + K(x)] \frac{\dot{h}^2}{2} \right\}, \quad (1)$$

其中

$$\cos \gamma_d = \cos \gamma_s - (\cos \gamma_s + 1) \tanh \left[4.96 \left(\frac{\mu \dot{h}}{\sigma} \right)^{0.702} \right],$$

$$s(t) = 1 - e^{-4.6t/t_r}, \quad t_r = 0.413 \sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}},$$

$$R_c = \frac{a^3 c}{6R^2 h}.$$

\dot{h} 和 \ddot{h} 分别表示液面速度及加速度. Sparrow^[27]给出了 $K(x)$ 的具体表达式

$$K(x) = \frac{4}{3} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{\alpha_i^2} \left\{ e^{-4\alpha_i^2 Re_x / Re_d^2} - 3 \right\} \times e^{-4\alpha_i^2 Re_x / Re_d^2}, \quad (2)$$

式中 Re 是雷诺数, $Re_x = x\dot{h}/\nu$, $Re_d = h\dot{h}/\nu$ 分别是基于流动长度和流动直径 d 的雷诺数. 一般情况下,可取 $K(x) \approx 4/3$. 方程 (1) 的边界条件为

$$h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = 0. \quad (3)$$

Stange 等^[13]对三种介质和七种容器的圆管毛细流动进行了实验和数值分析,介质的特性参数如表 1 所示,容器结构参数如表 2 所示. 其中表 1 中的 SF 0.65 和 SF 1.00 分别指运动黏度为 0.65 和 1.00 cSt (1 cSt = 10^{-4} m²/s) 的硅油, FC-77 是含碳的氟化液系列中的一种.

表 1 实验介质参数

	$\sigma/10^{-3}$ N·m ⁻¹	$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$\mu/10^{-3}$ kg·m ⁻¹ ·s ⁻¹	$\nu = \mu/\rho/10^{-4}$ m ² ·s ⁻¹
SF 0.65	15.6	761	0.500	0.65
SF 1.00	16.9	818	0.818	1.00
FC-77	14.7	1777	1.422	0.80

表 2 实验容器结构参数

容器编号	R/mm	a/mm	c/mm
I	2.0	91.5	59.3
II	4.5	85.0	62.5
III	5.5	83.0	63.0
IV	8.0	80.0	65.0
V	18.0	70.5	69.8
VI	27.0	65.0	72.5
VII	35.0	55.0	77.5

由表 1 和表 2 可知, 当采用 SF 1.00 为实验介质和第 I 号容器时, t_r 达到最小值, 此时 $t_{r \min} = 0.008127$ s; 当采用 FC-77 为实验介质和第 VII 号容器时, t_r 达到最大值, 此时 $t_{r \max} = 0.94024$ s. 当 t_r 分别达到最大值和最小值时, $s(t)$ 的变化曲线如图 2 所示.

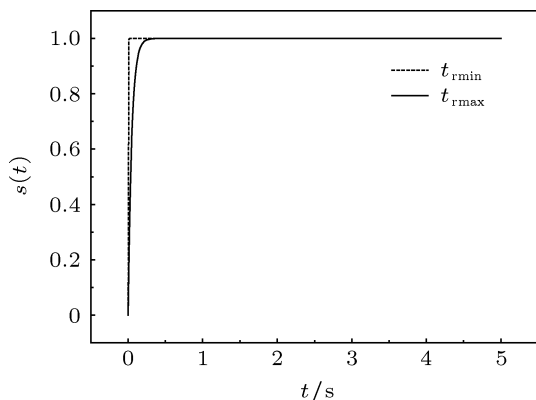


图 2 $s(t)$ - t 曲线

由图 2 可知, $s(t) \approx 1$, 故本文中设 $s(t) = 1$. 将方程 (1) 中的 $\tanh \left[4.96 \left(\frac{\mu \hbar}{\sigma} \right)^{0.702} \right]$ 进行泰勒展开, 经计算发现取前四阶即可满足计算精度, 则

$$\begin{aligned} & \tanh \left[4.96 \left(\frac{\mu \hbar}{\sigma} \right)^{0.702} \right] \\ &= b_1 + b_2 \hbar + b_3 \hbar^2 + b_4 \hbar^3 + b_5 \hbar^4, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 b_1, b_2, b_3, b_4 和 b_5 为展开系数, 则方程 (1) 可简化为

$$\begin{aligned} \ddot{h}(h+a_8) = & -a_1 - a_2 \hbar - a_3 \hbar^2 - a_4 \hbar^3 \\ & - a_5 \hbar^4 - a_6 h - a_7 \hbar h, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2\sigma}{\rho R} [(\cos \gamma_s + 1) b_1 - \cos \gamma_s], \\ a_2 &= \frac{2\sigma}{\rho R} (\cos \gamma_s + 1) b_2 + \left(\frac{8l_0}{R^2} + \frac{2}{R} \right) v, \\ a_3 &= \frac{2\sigma}{\rho R} (\cos \gamma_s + 1) b_3 - \frac{1+K(x)}{2}, \\ a_4 &= \frac{2\sigma}{\rho R} (\cos \gamma_s + 1) b_4, \\ a_5 &= \frac{2\sigma}{\rho R} (\cos \gamma_s + 1) b_5, \\ a_6 &= \frac{\sigma}{\rho} \frac{6R^2}{a^3 c}, \quad a_7 = \frac{8v}{R^2}, \quad a_8 = l_0 + \frac{73}{60} R. \end{aligned}$$

按照廖世俊^[15] 同伦分析法的基本思想, 根据

方程 (5) 的形式, 定义非线性算子

$$\begin{aligned} N[\Phi(t;q)] &= \frac{\partial^2 \Phi(t;q)}{\partial t^2} [\Phi(t;q) + a_8] + a_1 + a_2 \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} \\ &+ a_3 \left[\frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} \right]^2 + a_4 \left[\frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} \right]^3 \\ &+ a_5 \left[\frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} \right]^4 + a_6 \Phi(t;q) \\ &+ a_7 \Phi(t;q) \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $q \in [0, 1]$ 为嵌入变量, $\Phi(t;q)$ 是未知函数 $h(t)$ 的映射. 设零阶形变方程为

$$(1-q)\ell[\Phi(t;q) - h_0(t)] = q\hbar HN[\Phi(t;q)], \quad (7)$$

该方程满足边界条件

$$\Phi(0;q) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} \right|_{x=0} = 0 \quad (8)$$

其中, \hbar 是非零的辅助算子, $H(t)$ 为辅助函数, ℓ 为辅助的线性算子, $h_0(t)$ 是 $h(t)$ 的初始猜测解. 由于参数的选择是十分自由的. 当 $q = 0$ 和 $q = 1$ 时, 可得

$$\Phi(t;0) = h_0(t), \quad \Phi(t;1) = h(t). \quad (9)$$

当 q 从 0 变化到 1 时, $\Phi(t;q)$ 从初始值 $h_0(t)$ 变化到 (5) 式的解 $h(t)$.

根据 (5) 式, 选取线性辅助算子

$$\ell[\Phi(t;q)] = -\frac{t}{2} \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} + \Phi(t;q), \quad (10)$$

该线性算子具有性质

$$\ell[Ct^2] = 0, \quad (11)$$

其中, C 为任意常数. 根据边界条件 (3) 式, 初始值 $h_0(t)$ 设为

$$h_0(t) = \alpha t^2, \quad (12)$$

其中 α 为未知常数. 利用泰勒展开定理, 将 $\Phi(t;q)$ 展开成关于 q 的幂级数

$$\Phi(t;q) = h_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) q^n, \quad (13)$$

其中

$$h_n(t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \Phi(t;q)}{\partial q^n} \right|_{q=0}. \quad (14)$$

如果辅助参数 \hbar 、辅助函数 $H(t)$ 和未知常数 α 选取合适的值, 则当 $q = 1$ 时, (13) 式能够收敛,

则可得

$$h(t) = h_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t) \approx \sum_{n=0}^m h_n(t), \quad (15)$$

(15) 式必定是非线性方程 (5) 的某一个解. 定义矢量

$$\mathbf{H}_m = \{h_0(t), h_1(t), \dots, h_m(t)\}, \quad (16)$$

对前面求得的零阶形变方程 (7) 求辅助参数 q 的 n 阶导数, 再令 $q = 0$, 然后除以 $n!$, 可得 n 阶形变方程

$$\ell[h_n(t) - \chi_n h_{n-1}(t)] = \hbar H(t) R_n(\mathbf{H}_{n-1}). \quad (17)$$

该方程满足边界条件

$$h_n(0) = 0, \dot{h}_n(0) = 0 \quad (n > 1), \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} & R_n(\mathbf{H}_{n-1}) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{dN^{n-1}[\Phi(t; q)]}{dq^{n-1}} \right|_{q=0} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} h_j(t) \ddot{h}_{n-1-j}(t) + a_8 \dot{h}_{n-1}(t) + a_1 \\ &+ a_2 \dot{h}_{n-1}(t) + a_3 \sum_{j=0}^{n-1} \dot{h}_j(t) \dot{h}_{n-1-j}(t) \\ &+ a_4 \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \dot{h}_j(t) \dot{h}_{m-j}(t) \dot{h}_{n-1-m}(t) \\ &+ a_5 \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \dot{h}_j(t) \dot{h}_{k-j}(t) \dot{h}_{m-k}(t) \dot{h}_{n-1-m}(t) \\ &+ a_6 h_{n-1}(t) + a_7 \sum_{j=0}^{n-1} h_j(t) \dot{h}_{n-1-j}(t), \quad (19) \end{aligned}$$

$$\chi_n = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ 1 & (n > 1) \end{cases}. \quad (20)$$

根据解表达原则和系数遍历性原则^[15] 可以令辅助函数 $H(t)$ 为

$$H(t) = t^k, \quad (21)$$

其中 k 为整数, 研究中发现 $k \leq 2$ 时, $h_n(t)$ 中含有 $\ln(t)$ 项, 为了避免出现 $\ln(t)$ 项, 取

$$H(t) = t^3. \quad (22)$$

通过求解方程 (17), 发现 $h_n(t)$ 可以表达成

$$h_n(t) = \sum_{j=1}^{5n} b_{n,j} t^{j+2} \quad (n \geq 1), \quad (23)$$

其中 $b_{n,j}$ 为系数, 将 (23) 式带入到方程 (16) 中, 按照 t 的次幂相等原则就可得到系数 $b_{n,j}$ 的具体表达式. 例如当 $n = 1$ 时, 可得

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= 2\hbar(2a_8\alpha + a_1)/5, \\ b_{1,2} &= 2\hbar a_2\alpha/7, \\ b_{1,3} &= 2\hbar\alpha(2\alpha + a_6 + 4a_3\alpha)/27, \\ b_{1,4} &= \hbar\alpha^2(a_7 + 4a_4\alpha)/11, \\ b_{1,5} &= 32\hbar a_5\alpha^4/65. \end{aligned} \quad (24)$$

系数 $b_{n,j}$ 推导的相关工作可由符号运算软件 Maple 或 Mathematica 进行. 则当级数取前 m 阶时, 可得

$$\begin{aligned} h(t) &\approx h_0(t) + \sum_{n=1}^m h_n(t) = \alpha t^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^{5n} b_{n,j} t^{j+2} \\ &= \sum_{k=1}^{5m+1} c_k t^{k+1}, \end{aligned} \quad (25)$$

式中

$$c_k = \begin{cases} \alpha & (k = 1) \\ \sum_{i=\text{INT}[(k+3)/5]}^m b_{i,k-1} & (k \neq 1) \end{cases},$$

其中 $\text{INT}[\]$ 表示取整函数.

3 计算结果分析

通过上述分析可知, 仅需选择合适的辅助参数 α 和 \hbar 时, 可确保级数解 (15) 式收敛. 将级数解 (15) 式带入到方程 (1) 中, 取平方后在区域 $t \in [0, 5]$ 上积分, 可得平方残差为

$$E_m = \int_0^5 f_m(t)^2 dt, \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} f_m(t) &= \sum_{n=0}^m \ddot{h}_n(t) \left[\sum_{n=0}^m h_n(t) + a_8 \right] \\ &- \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{2s(t) \cos \gamma_0}{R} - \frac{1}{R_c} \right] \\ &+ \left[a_7 \left(\sum_{n=0}^m h_n(t) + l_0 \right) + \frac{2v}{R} \right] \sum_{n=0}^m \dot{h}_n(t) \\ &+ \frac{[1 + K(x)]}{2} \left[\sum_{n=0}^m \dot{h}_n(t) \right]^2. \end{aligned} \quad (27)$$

图 3 为初始液体高度 $l_0 = 50$ mm, 三种实验介质在编号为 VII (即 $R = 35.0$ mm) 的容器内毛细流动时, 液面高度取前 4 阶级数解时, 方程 (1) 的平方残差 E_m 和 α, \hbar 的关系曲线图.

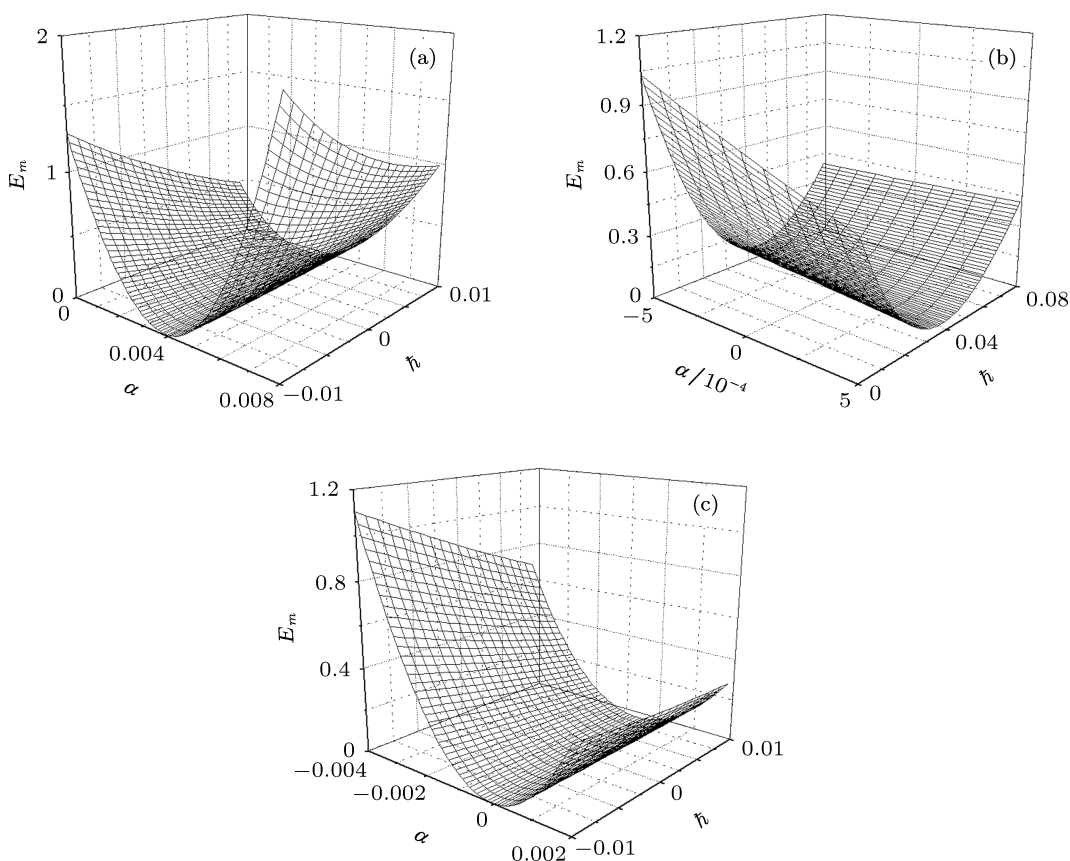


图3 三种实验介质在容器VII内,液面高度前4阶级数解的平方残差 E_m 与 h 和 α 的关系曲线 (a) SF 0.65; (b) SF 1.00; (c) FC-77

表3 不同级数下, (24) 式中系数 c_k 的值 (实验介质: FC-77, 容器编号: VII, $l_0 = 50$ mm)

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$		$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
	$(\alpha = 0.583207,$	$(\alpha = 0.019443,$	$(\alpha = -0.000027,$	$(\alpha = -0.000044,$					
	$\hbar = 0.00002)$	$\hbar = 0.00124)$	$\hbar = -0.00906)$	$\hbar = -0.009)$					
c_1	0.583207	0.019443	-0.000027	-0.000044	c_{12}	—	—	0.001873	-0.099446
c_2	1.934713	3.994 094	4.165063	4.165055	c_{13}	—	—	-0.000218	0.034924
c_3	-1.074600	-4.501228	-5.158070	-5.155420	c_{14}	—	—	0.000017	-0.009597
c_4	0.295556	3.560447	4.960106	4.936280	c_{15}	—	—	-8.514529×10^{-7}	0.002063
c_5	-0.041842	-2.039928	-3.915871	-3.813431	c_{16}	—	—	1.916056×10^{-8}	-0.000344
c_6	0.002384	0.833 127	2.541596	2.273254	c_{17}	—	—	—	0.000043
c_7	—	-0.238561	-1.351492	-0.876439	c_{18}	—	—	—	-4.030225×10^{-6}
c_8	—	0.046608	0.583532	-0.019424	c_{19}	—	—	—	2.587311×10^{-7}
c_9	—	-0.005902	-0.202020	0.367781	c_{20}	—	—	—	-1.026555×10^{-8}
c_{10}	—	0.000436	0.055230	-0.355941	c_{21}	—	—	—	1.896113×10^{-10}
c_{11}	—	-0.000014	-0.011701	0.218706					

从图 3(a) 可以看出, E_m 的最小值在 $\alpha \in [0.02, 0.05]$, $\hbar \in [-0.005, 0.005]$ 范围内, 级数解在该区域内收敛; 从图 3(b) 可以看出, E_m 的最小

值在 $\alpha \in [-2.5 \times 10^{-4}, 2.5 \times 10^{-4}]$, $\hbar \in [0.02, 0.06]$ 范围内; 从图 3(c) 可以看出, E_m 的最小值在 $\alpha \in [-0.001, 0.001]$, $\hbar \in [-0.01, -0.005]$ 范围内. 为

了精确获得最小平方残差位置, 方程 (27) 的极值点为

$$\frac{\partial E_m}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial E_m}{\partial \hbar} = 0, \quad (28)$$

联立求解方程 (29) 即可得到 α 和 \hbar 的值.

当实验介质为 FC-77, 容器编号为 VII (即 $R = 35.0$ mm), 初始液体高度 $l_0 = 50$ mm 时, 不同级数

下 (26) 式中系数 c_k 的值如表 3 所示.

实验介质为 FC-77, 容器编号为 VII 时, 液面高度 $h(t)$ 在不同时刻下的 m 阶同伦近似解与龙格库塔 (R-K) 数值计算结果的对比如表 4 所示. 从表 4 可以看出, 当级数 $m = 4$ 时, 级数解就开始收敛, 所以在圆管毛细流动动力学方程计算中, 取级数 $m = 4$.

表 4 $h(t)$ 的 m 阶同伦近似解与 R-K 数值计算结果在不同时刻的对比 (实验介质: FC-77, 容器编号: VII, $l_0 = 50$ mm)

	$t = 1$ s	$t = 2$ s	$t = 3$ s	$t = 4$ s	$t = 5$ s
$m = 1$ ($\alpha = 0.583207, \hbar = 0.00002$)	1.699417	7.701934	16.973918	28.374787	40.855614
$m = 2$ ($\alpha = 0.019443, \hbar = 0.00124$)	1.668523	7.612495	16.871656	28.198357	40.589321
$m = 3$ ($\alpha = -0.000027, \hbar = -0.00906$)	1.668018	7.611343	16.869847	28.196123	40.587940
$m = 4$ ($\alpha = -0.000044, \hbar = -0.009$)	1.668017	7.611342	16.869846	28.196122	40.587935
R-K	1.668017	7.611342	16.869846	28.196122	40.587934

图 4 为取级数 $m = 4$ 时, 初始液体高度 $l_0 = 50$ mm, 三种实验介质在编号为 I (即 $R = 2.0$ mm) 的容器内毛细流动时, 液面高度 $h(t)$ 的同伦解析近似解 (HAM) 与 R-K 数值解对比图. 由图 4 可知, 应用同伦分析法得到的解析近似解与数值法求得的解是相当符合的.

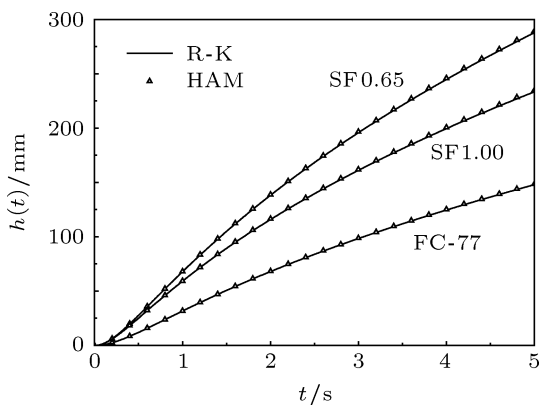


图 4 $h(t)$ 的前 4 阶同伦解析近似解曲线

实验介质为 FC-77 时, (26) 式中的系数 c_k 随初始液体高度 l_0 的变化情况如图 5 所示, 由于系数较多, 这里仅给出了 c_1 的变化情况, 其他两种实验介质的 c_1 变化规律与 FC-77 相同. 从图 5 可以看出, c_1 随 l_0 和圆管半径 R 的增加迅速减小, 当圆管半径

$R > 10$ mm 时, c_1 接近于零. 如果实验时想要获得较高的液面高度 $h(t)$, 则圆管半径不宜大于 10 mm.

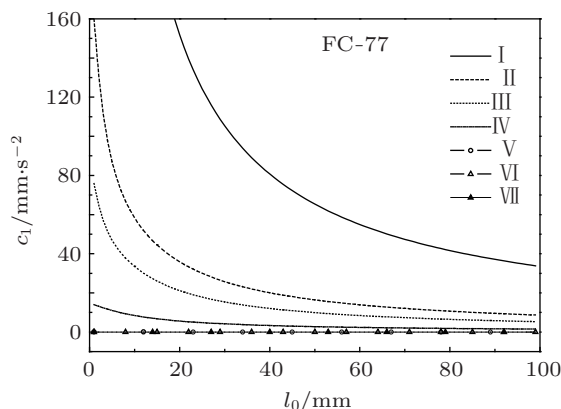


图 5 实验介质 FC-77 在不同容器时, 系数 c_1 与初始液体高度 l_0 的关系曲线

4 结论

本文应用同伦分析方法获得了微重力环境下圆管毛细流动的解析近似解并给出了级数解的表达形式. 同伦分析方法为我们提供了一个方便的方法来控制渐进级数的收敛, 这是同伦分析方法和其他方法根本性的区别. 从同伦分析法与四阶 R-K 法的计算结果比较表明, 同伦分析法具有较好的计算精度.

- [1] Lucas V R 1918 *Kolloid-Z.* **23** 15
 [2] Washburn E W 1921 *Phys. Rev.* **17** 273
 [3] Bell J M, Cameron F K 1906 *J. Phys. Chem.* **10** 658
 [4] Rideal E K 1922 *Philos. Mag.* **44** 1152
 [5] LeGrand E J, Rense W A 1945 *J. Appl. Phys.* **16** 843
 [6] Siegel R 1961 *J. Appl. Mech.* **83** 165
 [7] Petrash D A, Nelson T M, Otto E W 1963 *NASA TN D-1582*
 [8] Jeje A A 1979 *J. Colloid Interf. Sci.* **69** 420
 [9] Ichikawa N, Satoda Y 1994 *J. Colloid Interf. Sci.* **162** 350
 [10] Joos P, Remoortere P, Bracke M 1990 *J. Colloid Interf. Sci.* **136** 189
 [11] Quéré D 1997 *Europhys. Lett.* **39** 533
 [12] Levine S, Reed P, Watson E J, Neale G 1976 *In Colloid and Interface Science* (New York: Academic) p403
 [13] Stange M, Dreyer M E, Rath H J 2003 *Phys. Fluids* **15** 2587
 [14] Wang C X, Xu S H, Sun Z W, Hu W R 2009 *AIAA J.* **11** 2642
 [15] Liao S J 2006 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (Beijing: Science Press) p204 (in Chinese) [廖世俊 2006 超越摄动——同伦分析方法导论 (北京: 科学出版社) 第 204 页]
 [16] Cheng J, Liao S J 2007 *Acta Mech. Sin.* **39** 715 (in Chinese) [成均, 廖世俊 2007 力学学报 **39** 715]
 [17] Liao S J 2003 *J. Fluid Mech.* **488** 189
 [18] Li Y Q, Zhu D W, Li F 2009 *Chin. J. Mech. Eng.* **45** 37 (in Chinese) [李永强, 朱大巍, 李锋 2009 机械工程学报 **45** 37]
 [19] Li Y Q, Li F, Zhu D W 2010 *Compos. Struct.* **92** 1110
 [20] Yuan P X, Li Y Q 2010 *Appl. Math. Mech.* **31** 1293
 [21] Li Y Q, Li L, He Y L 2011 *Compos. Struct.* **93** 360
 [22] Li Y Q, Zhu D W 2011 *Compos. Struct.* **93** 880
 [23] Shi Y R, Yang H J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 67 (in Chinese) [石玉仁, 杨红娟 2010 物理学报 **59** 67]
 [24] Yang P, Chen Y, Li Z B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3668 (in Chinese) [杨沛, 陈勇, 李志斌 2010 物理学报 **59** 3668]
 [25] Liao S J 2012 *Homotopy Analysis Method for Nonlinear Differential Equations* (Beijing: Higher Education Press) p285
 [26] Dreyer M E 2007 *Spring Tracts in Modern Physics* **221** 51
 [27] Sparrow E M, Lin S H, Lundgren T S 1964 *Phys. Fluids* **7** 338

The analytical approximate solutions of capillary flow in circular tubes under microgravity*

Li Yong-Qiang^{1)†} Zhang Chen-Hui¹⁾ Liu Ling¹⁾ Duan Li²⁾ Kang Qi²⁾

1) (Institute of Applied Mechanics, College of Science, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

2) (National Microgravity Laboratory, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

(Received 3 September 2012; revised manuscript received 8 September 2012)

Abstract

The capillary flow in a circular tube under microgravity environment is investigated by the homotopy analysis method (HAM), and the approximate analytical solution in the form of series solution is obtained. Different from other analytical approximate methods, the HAM is totally independent of small physical parameters, and thus it is suitable for most nonlinear problems. The HAM provides us a great freedom to choose basis functions of solution series, so that a nonlinear problem can be approximated more effectively, and it adjusts and controls the convergence region and the convergence rate of the series solution through introducing auxiliary parameter and the auxiliary function. The HAM hews out a new approach to the analytical approximate solutions of capillary flow in a circular tube. Through the specific example and comparing homotopy approximate analytical solution with the numerical solution which is obtained by the fourth-order Runge-Kutta method, the computed result indicate that this method has the good computational accuracy.

Keywords: circular tubes, microgravity, capillary flow, homotopy analysis method

PACS: 47.11.-j, 47.55.nd

DOI: 10.7498/aps.62.044701

* Project supported by the Opened Subject of the National Microgravity Laboratory of Chinese Academy of Sciences.

† Corresponding author. E-mail: yqli@mail.neu.edu.cn