文章编号：1000-4750(2013)08-0029-06

Cosserat 连续体平均场理论中的 Hill 定理

刘其鹏[1]，刘晓宇[2]，高月华[3]

(1. 大连交通大学土木与安全工程学院，辽宁，大连 116028；2. 中国科学院力学研究所，北京 100190；
3. 大连交通大学交通运输工程学院，辽宁，大连 116028)

摘　要：基于平均场理论的多尺度均匀化模拟必须满足 Hill-Mandel 细宏观能量等价条件，这首先需要推导 Hill 定理。Cosserat 连续体平均场理论中，宏观平均偶应力的定义存在 2 种不同的方案，给 Hill 定理的推导带来了困难。该文构造了一个不考虑宏观平均偶应力具体表达式的 Hill 定理中间形式，将 2 种宏观偶应力定义分别代入，推导和建立了 2 个版本的 Hill 定理，并对二者做了比较和分析，为后续非均质 Cosserat 连续体多尺度模拟研究工作提供了理论基础。

关键词：多尺度模拟；平均场理论；Cosserat 连续体；平均偶应力定义；Hill 定理

中图分类号：O341　　**文献标志码：**A　　doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.04.0264

HILL's LEMMA FOR THE AVERAGE-FIELD THEORY OF COSSERAT CONTINUUM

LIU Qi-peng[1], LIU Xiao-yu[2], GAO Yue-hua[3]

(1. School of Civil and Safety Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian, Liaoning 116028, China;
2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
3. School of Traffic and Transportation, Dalian Jiaotong University, Dalian, Liaoning 116028, China)

Abstract: The Hill-Mandel condition, i.e. the micro-macro energy equivalence condition, should be satisfied in the multi-scale homogenization process based on the average-field theory. It needs firstly the derivation of Hill's lemma. The macroscopic average couple stress tensor can be defined in two different ways in the average-field theory of Cosserat continuum. That leads to difficulties in deriving the Hill's lemma. This paper constructs a transition form of Hill's lemma without considering the specific expressions of macro average couple stress tensor. Substitution of the two existing definitions of average couple stresses into the transition form leads to two different versions of Hill's lemma, respectively. The comparison and analysis are also performed on the presented versions. This paper provides the theoretical basis for further research on the multi-scale modeling of heterogeneous Cosserat continuum.

Key words: multi-scale modeling; the average-field theory; Cosserat continuum; definitions of averaged couple stresses; Hill's lemma

多数天然及人工材料都是非均质的，比如颗粒材料、复合材料等。确定此类材料的细观结构与其均匀化宏观属性之间的关系具有重要的工程意义。在平均场理论中，宏观应力和应变定义为细观表征元上应力和应变的体积平均，细宏观尺度之间通过给定恰当的表征元边界条件相联系，材料宏观等效本构属性由细观本构关系通过均匀化过程得到。经典 Cauchy 连续体平均场理论已经充分发展并广泛

收稿日期：2012-04-15；修改日期：2012-10-10
基金项目：国家自然科学基金项目(11202042)
通讯作者：刘其鹏(1981—)，男，河北人，讲师，博士，从事多尺度力学分析与计算方法研究(E-mail: liuqp@djtu.edu.cn).
作者简介：刘晓宇(1973—)，男，天津人，副研究员，博士，从事滑坡灾害防治中的关键力学问题研究(E-mail: liuxy@imech.ac.cn)；
高月华(1981—)，女，黑龙江人，讲师，博士，从事计算力学与结构优化研究(E-mail: gaoyuehua@gmail.com).

应用于复合材料的多尺度分析和计算[1−6]。

Cosserat 连续体模型及其有限元法已经在复合材料和颗粒材料等非均质材料力学行为的研究中得到了广泛的发展和应用[7−10]。在平均场理论框架内对非均质 Cosserat 连续体进行细宏观均匀化模拟首先需要阐述 Hill 定理，据此可以给定恰当的静力学或运动学表征元边界条件，以满足细宏观能量等价条件(Hill-Mandel 条件，或称 Hill 宏观均质化条件)[1,4]。需要强调指出的是：恰当的表征元边界条件对于建立非均质材料的均匀化本构关系以及发展相应的计算均匀化方法是极为重要的。经典连续体平均场理论的 Hill 定理[1]由 Hill 于 1963 年给出，它为正确给定表征元边界条件提供了理论依据。尽管已有学者将基于 Hill-Mandel 条件的均匀化方法推广到 Cosserat 连续体[11−13]，但是对于非均质 Cosserat 连续体 Hill 定理的研究工作仍然较少[14−15]。

文献中关于宏观平均偶应力的定义存在 2 种不同的方案：一是只考虑细观偶应力的影响[12,14]；二是同时考虑细观表征元内偶应力和应力矩的影响[11,13]。这是 Cosserat 连续体平均场理论与经典连续体平均场理论的显著不同之处，给相应的 Hill 定理的建立带来了困难，也给基于平均场理论的非均质 Cosserat 连续体均匀化方法的研究和应用带来了理论上的困惑。本文从平均场理论基本假定出发，借鉴经典连续体平均场理论公式建立静力学量和运动学量的细宏观联系表达式，进而构造了一个不考虑宏观偶应力定义具体表达式的 Hill 定理中间形式，通过将 2 种宏观偶应力定义代入该表达式，推导和建立了 2 个版本的 Hill 定理，并对二者做了比较和分析，为后续的非均质 Cosserat 连续体多尺度模拟研究工作提供了理论指导和依据。

1 经典连续体平均场理论简介[3]

在细观力学途径中，宏观连续体内的质点对应着细观尺度上有限尺寸的表征元[3]，在不考虑体积力的情况下，表征元内的控制方程为：

$$\sigma_{ij,i}=0 \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{j,i}+u_{i,j}) \tag{2}$$

其中：σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别是细观应力和应变张量；$u_{i,j}$ 是位移梯度张量。表征元边界上的平衡方程为：

$$t_i=\boldsymbol{n}_j\sigma_{ji} \tag{3}$$

其中：t_i 是面力；$\boldsymbol{n}_j$ 是边界面的单位外法线向量。

在平均场理论中，宏观场 $\langle g_{ij}\rangle$ 通常定义为细观场 g_{ij} 的体积平均 $\bar{g}_{ij}$，即：

$$\langle g_{ij}\rangle=\bar{g}_{ij}=\frac{1}{V}\int_V g_{ij}\mathrm{d}V \tag{4}$$

其中，V 是表征元的体积。宏观应力和应变定义为：

$$\langle\sigma_{ij}\rangle=\bar{\sigma}_{ij}=\frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}\mathrm{d}V \tag{5}$$

$$\langle\varepsilon_{ij}\rangle=\bar{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}\mathrm{d}V \tag{6}$$

根据式(1)~式(3)并利用 Gauss 定理可以进一步将平均应力和平均应变表示为表征元边界积分的形式：

$$\bar{\sigma}_{ij}=\frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{kj}x_i)\mathrm{d}V= \frac{1}{V}\int_S n_k\sigma_{kj}x_i\mathrm{d}S=\frac{1}{V}\int_S x_i t_j\mathrm{d}S \tag{7}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_V \frac{1}{2}(u_{j,i}+u_{i,j})\mathrm{d}V= \frac{1}{2V}\int_S (n_i u_j+n_j u_i)\mathrm{d}S \tag{8}$$

经典连续体 Hill 定理[1,4]为：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}-\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{V}\int_S (u_i-\bar{\varepsilon}_{ij}x_j)(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})\mathrm{d}S \tag{9}$$

其中：x_j 是 RVE 边界点坐标；

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}=\frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V \tag{10}$$

2 Cosserat 连续体平均场理论

2.1 Cosserat 连续体控制方程[16]

在 Cosserat 连续体模型中，独立的运动学变量是位移 u_i 和转角 ω_i。相应的静力学分量除应力张量 σ_{ij} 以外还增加了偶应力张量 μ_{ij}。应变张量 ε_{ij} 与曲率张量 κ_{ij} 分别定义为：

$$\varepsilon_{ij}=u_{j,i}-e_{ijk}\omega_k \tag{11}$$

$$\kappa_{ij}=\omega_{j,i} \tag{12}$$

平衡方程表示为：

$$\sigma_{ij,i}=0 \tag{13}$$

$$\mu_{ij,i}+e_{jkl}\sigma_{kl}=0 \tag{14}$$

需要注意的是：尽管式(13)与式(1)形式相同，但是由于模型中引入了偶应力张量，式(13)中的应力张量已经不再具有对称性。除式(3)以外边界面上

还增加了一个矩平衡条件：

$$m_i = n_j \mu_{ji} \tag{15}$$

其中，m_i 表示面力偶。

2.2　Cosserat 连续体平均场理论基本公式

非均质 Cosserat 连续体平均场理论的 Hill-Mandel 细宏观能量等价条件为：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} \tag{16}$$

类似于经典连续体平均场理论中 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ 和 $\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}$ 的定义式(8)和式(10)，$\bar{\kappa}_{ij}$ 和 $\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}$ 定义为：

$$\bar{\kappa}_{ij} = \bar{\omega}_{j,i} = \frac{1}{V}\int_V \omega_{j,i}\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_S n_i\omega_j\mathrm{d}S \tag{17}$$

$$\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = \frac{1}{V}\int_V \mu_{ij}\kappa_{ij}\mathrm{d}V \tag{18}$$

式(11)代入式(10)得到：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}(u_{j,i} - e_{ijk}\omega_k)\mathrm{d}V = \overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} - e_{ijk}\overline{\sigma_{ij}\omega_k} \tag{19}$$

其中：

$$\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}u_{j,i}\mathrm{d}V \tag{20}$$

$$e_{ijk}\overline{\sigma_{ij}\omega_k} = e_{ijk}\frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}\omega_k\mathrm{d}V \tag{21}$$

式(11)代入式(6)：

$$\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}\frac{1}{V}\int_V (u_{j,i} - e_{ijk}\omega_k)\mathrm{d}V = \bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_{j,i} - e_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k \tag{22}$$

其中：

$$\bar{u}_{j,i} = \frac{1}{V}\int_V u_{j,i}\,\mathrm{d}V \tag{23}$$

$$\bar{\omega}_k = \frac{1}{V}\int_V \omega_k\mathrm{d}V \tag{24}$$

由式(19)和式(22)可得到：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} = (\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_{j,i}) - e_{ijk}(\overline{\sigma_{ij}\omega_k} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k) \tag{25}$$

由式(25)代入式(16)可得：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} - \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} = (\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_{j,i}) + (\overline{\mu_{ji}\kappa_{ji}} - \bar{\mu}_{ji}\bar{\kappa}_{ji}) - e_{ijk}(\overline{\sigma_{ij}\omega_k} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k) \tag{26}$$

注意到在以上公式中并没有给出宏观平均偶应力张量 $\bar{\mu}_{ij}$ 的定义式, 这是由于在 Cosserat 连续体平均场理论中，平均偶应力的定义可以有 2 种不同的方式[11−14], 这是基于经典连续体平均场理论的均匀化方法不能够简单、直接地推广和应用于 Cosserat 连续体的一个重要原因，是建立 Cosserat 连续体平均场理论基本公式及其均匀化方法的理论关键。式(26)可进一步表示为如下形式(具体推导见附录)：

$$\begin{aligned}&\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} = \\ &\frac{1}{V}\int_S (u_i - \bar{u}_{i,j}x_j)(n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})\mathrm{d}S + \\ &\frac{1}{V}\int_S (\omega_i - \bar{\omega}_{i,j}x_j)(n_k\mu_{ki} - n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S + \\ &\left[\bar{\kappa}_{ij}\frac{1}{V}\int_V (\mu_{ij} - x_i e_{jkl}\sigma_{kl})\mathrm{d}V - \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} + e_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k\right]\end{aligned} \tag{27}$$

式(27)的推导中也没有考虑宏观平均偶应力的具体定义形式。以下的推导显示，将 2 种不同的平均偶应力定义式代入式(27)，可以得到 2 个不同版本的 Hill 定理。

2.3　Cosserat 连续体 Hill 定理-I

在一些学者的研究中宏观偶应力的定义直接表示为细观偶应力的体积平均[12,14,17]：

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{1}{V}\int_V \mu_{ij}\mathrm{d}V \tag{28}$$

根据式(28)、平衡方程式(14)以及 Gauss 定理，式(27)右端最后一项可进一步推导为：

$$\begin{aligned}&\bar{\kappa}_{ij}\frac{1}{V}\int_V (\mu_{ij} - x_i e_{jkl}\sigma_{kl})\mathrm{d}V - \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} + e_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k = \\ &\bar{\omega}_{j,i}\frac{1}{V}\int_V (-x_i e_{jkl}\sigma_{kl})\mathrm{d}V + \bar{\omega}_k\frac{1}{V}\int_V e_{ijk}\sigma_{ij}\mathrm{d}V = \\ &\bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_V \mu_{ki,k}x_j\mathrm{d}V - \bar{\omega}_i\frac{1}{V}\int_V \mu_{ki,k}\mathrm{d}V = \\ &\bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_V [(\mu_{ki}x_j)_{,k} - \mu_{ki}\delta_{jk}]\mathrm{d}V - \frac{1}{V}\int_S n_k\mu_{ki}\bar{\omega}_i\mathrm{d}S = \\ &\frac{1}{V}\int_S n_k\mu_{ki}(\bar{\omega}_{i,j}x_j)\mathrm{d}S - \bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_V \mu_{ji}\mathrm{d}V - \frac{1}{V}\int_S n_k\mu_{ki}\bar{\omega}_i\mathrm{d}S = \\ &\frac{1}{V}\int_S n_k\mu_{ki}(\bar{\omega}_{i,j}x_j - \bar{\omega}_i)\mathrm{d}S - \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij}\end{aligned} \tag{29}$$

注意到：

$$\frac{1}{V}\int_S n_k\bar{\mu}_{ki}(\bar{\omega}_{i,j}x_j)\mathrm{d}S = \bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_S n_k x_j\mathrm{d}S = \bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_V \delta_{jk}\mathrm{d}S = \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} \tag{30}$$

$$-\frac{1}{V}\int_S n_k\bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_i\mathrm{d}S=-\bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_i\frac{1}{V}\int_S n_k\mathrm{d}S=0 \qquad (31)$$

式(31)叠加到式(30)得到：

$$\bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij}=\frac{1}{V}\int_S n_k\bar{\mu}_{ki}(\bar{\omega}_{i,j}x_j-\bar{\omega}_i)\mathrm{d}S \qquad (32)$$

式(32)代入式(29)给出：

$$\bar{\kappa}_{ij}\frac{1}{V}\int_S(\mu_{ij}+\mu_{kj,k}x_i)\mathrm{d}V-\bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij}+e_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k=$$
$$\frac{1}{V}\int_S(\bar{\omega}_{i,j}x_j-\bar{\omega}_i)(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S \qquad (33)$$

式(33)代入式(27)得到：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}-\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}+\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}-\bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij}=$$
$$\frac{1}{V}\int_S(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j)(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})\mathrm{d}S+$$
$$\frac{1}{V}\int_S(\omega_i-\bar{\omega}_{i,j}x_j)(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S+$$
$$\frac{1}{V}\int_S(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})(\bar{\omega}_{i,j}x_j-\bar{\omega}_i)\mathrm{d}S \qquad (34)$$

进一步表示为：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}-\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}+\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}-\bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij}=$$
$$\frac{1}{V}\int_S(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j)(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})\mathrm{d}S+$$
$$\frac{1}{V}\int_S(\omega_i-\bar{\omega}_i)(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S \qquad (35)$$

这样在平均偶应力定义式(28)下，得到了非均质 Cosserat 连续体平均场理论第 1 个版本的 Hill 定理，简记为“ Hill 定理-I ”。式(35)与文献中已有的 Hill 定理版本一致[14]。

2.4 Cosserat 连续体 Hill 定理-II

一些学者认为宏观偶应力的定义要同时考虑细观表征元上偶应力和应力矩的影响[11,13]，即：

$$\bar{\mu}_{ij}=\frac{1}{V}\int_V(\mu_{ij}-x_ie_{jkl}\sigma_{kl})\mathrm{d}V \qquad (36)$$

式(36)代入式(27)得到：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}-\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}+\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}-\bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij}=$$
$$\frac{1}{V}\int_S(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j)(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})\mathrm{d}S+$$
$$\frac{1}{V}\int_S(\omega_i-\bar{\omega}_{i,j}x_j)(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S+e_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k \qquad (37)$$

根据式(5)和式(14)、式(37)右端最后一项表示为：

$$e_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k=\frac{1}{V}\bar{\omega}_i\int_V e_{ijk}\sigma_{jk}\mathrm{d}V=$$
$$\frac{1}{V}\bar{\omega}_i\int_V(-\mu_{ki,k})\mathrm{d}V=-\frac{1}{V}\int_S n_k\mu_{ki}\bar{\omega}_i\mathrm{d}S \qquad (38)$$

式(38)减去式(31)得到：

$$e_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k=-\frac{1}{V}\int_S n_k\mu_{ki}\bar{\omega}_i\mathrm{d}S+\frac{1}{V}\int_S n_k\bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_i\mathrm{d}S=$$
$$-\frac{1}{V}\int_S\bar{\omega}_i(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S \qquad (39)$$

式(39)代入式(37)得到：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}-\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}+\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}-\bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij}=$$
$$\frac{1}{V}\int_S(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j)(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})\mathrm{d}S+$$
$$\frac{1}{V}\int_S[\omega_i-(\bar{\omega}_i+\bar{\omega}_{i,j}x_j)](n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S \qquad (40)$$

这样在平均偶应力定义式(36)下得到了非均质 Cosserat 连续体平均场理论第 2 个版本的 Hill 定理，简记为“ Hill 定理-II ”。需要明确说明的是：以往的研究者虽然已经给出了平均偶应力表达式式(36)，但式(40)所示的“ Hill 定理-II ”是本文作者首次给出的。

对比式(35)和式(40)可以看出：一方面，二者的应力-位移边界积分式是相同的，并且与经典连续体 Hill 定理表达式均相同；也就是说，若不考虑偶应力-转角项的影响，Cosserat 连续体控制方程退化为经典连续体控制方程，2 个版本的 Hill 定理也可以退化为经典连续体 Hill 定理。另一方面，2 个版本的不同之处在于：一是宏观平均偶应力定义式的不同；二是所得 Hill 定理中偶应力-转角边界积分项的表达式不同。也即宏观平均偶应力定义不同，相应的与之能量共轭的运动学条件也不相同。

通过本文的推导可以看出：构建非均质 Cosserat 连续体平均场理论及其均匀化方法时，采用不同的偶应力定义表达式，可以得到不同的 Hill 定理形式。从 Hill-Mandel 细宏观能量等价的角度来看，2 种平均偶应力定义方式都是可行的。本文工作有助于对 Cosserat 连续体平均场理论的深入理解和探究。

3 结论

本文基于经典连续体平均场理论和 Cosserat 连续体控制方程，推导和建立非均质 Cosserat 连续体

平均场理论 Hill 定理。考虑到宏观平均偶应力张量定义的不唯一性，本文构造了一个不考虑平均偶应力张量具体形式的 Hill 定理中间形式，将 2 种平均偶应力定义方案代入在经过一系列推导，得到了 2 个版本的 Hill 定理，其中的“Hill 定理-I”与文献中已有的版本一致，而“Hill 定理-II”则由本文作者首次给出。

对于 2 个 Hill 定理版本的比较和分析显示：从细宏观能量等价的角度来看，依据 2 种不同的平均偶应力定义式建立 Cosserat 连续体平均场理论及其相应的均匀化方法都是可行的。对于 2 种不同的宏观平均偶应力定义，在 Hill 定理的表征元边界积分式中，相应的能量共轭项的运动学条件是不相同的。

对于 2 个版本 Hill 定理表征元边界条件的给定和相应的均匀化方法建立过程的讨论，将另文阐述。

参考文献：

[1] Hill R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1963, 11(5): 357—372.

[2] Hashin Z. Analysis of composite materials—A survey [J]. Journal of Applied Mechanics, 1983, 50(3): 481—505.

[3] Nemat-Nasser S, Hori M. Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials [M]. Amsterdam: Elsevier, 1999: 121—161.

[4] Qu J, Cherkaoui M. Fundamentals of micromechanics of solids [M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006: 99—115.

[5] 杜善义，王彪．复合材料细观力学基础[M]．北京：科学出版社, 1999: 273—303.
Du Shanyi, Wang Biao. Fundamentals of micromechanics of composites [M]. Beijing: Science Press, 1999: 273—303. (in Chinese)

[6] 沈观林，胡更开．复合材料力学[M]．北京：清华大学出版社, 2006: 47—62.
Shen Guanlin, Hu Gengkai. Mechanics of composite materials [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 47—62. (in Chinese)

[7] Ebinger T, Steeb H, Diebels S. Modeling macroscopic extended continua with the aid of numerical homogenization schemes [J]. Computational Materials Science, 2005, 32(3/4): 337—347.

[8] Li X K, Tang H X. A consistent return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic Cosserat continua and modeling of strain localization [J]. Computers & Structures, 2005, 83(1): 1—10.

[9] Arslan H, Sture S. Evaluation of a physical length scale for granular materials [J]. Computational Materials Science, 2008, 42(3): 525—530.

[10] 李雷，吴长春．基于 Cosserat 理论的应变梯度非协调数值研究[J]．工程力学, 2004, 21(5): 166—171.
Li Lei, Wu Changchun. Incompatible finite element for materials with strain gradient effects [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(5): 166—171. (in Chinese)

[11] Forest S, Dendievel R, Canova G R. Estimating the overall properties of heterogeneous Cosserat materials [J]. Modelling Simulation in Materials Science and Engineering, 1999, 7(5): 829—840.

[12] Yuan X, Tomita Y. Effective properties of Cosserat composites with periodic microstructure [J]. Mechanics Research Communications, 2001, 28(3): 265—270.

[13] Hu G K, Liu X N, Lu T J. A variational method for non-linear micropolar composites [J]. Mechanics of Materials, 2005, 37(4): 407—425.

[14] Li X K, Liu Q P. A version of Hill's lemma for Cosserat continuum [J]. Acta Mechanica Sinica, 2009, 25(4): 499—506.

[15] 李锡夔，张俊波，张雪．梯度增强 Cosserat 连续体的广义 Hill 定理[J]．计算力学学报, 2011, 28(6): 813—821.
Li Xikui, Zhang Junbo, Zhang Xue. A generalized Hill's lemma for gradient-enchanced Cosserat continuum [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(6): 813—821. (in Chinese)

[16] Onck P R. Cosserat modeling of cellular solids [J]. Comptes Rendus Mecanique, 2002, 330(11): 717—722.

[17] Oda M, Iwashita K. Mechanics of granular materials [M]. Rotterdam: A. A. Ballkema, 1999: 21—25.

附录 A. Hill 定理中间形式式(27)的推导和验证。

文中式(26)给出：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}+\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}-\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}-\bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij}=$$
$$(\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}}-\bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_{j,i})+(\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}-\bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij})-\overline{e_{ijk}\sigma_{ij}\omega_k}+e_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k \tag{26}$$

根据经典连续体平均场理论，有：

$$\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}}=\frac{1}{V}\int_V\sigma_{ij}u_{j,i}\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}u_j)\mathrm{d}V=$$
$$\frac{1}{V}\int_S n_i\sigma_{ij}u_j\mathrm{d}S=\frac{1}{V}\int_S t_ju_j\,\mathrm{d}S \tag{A1}$$

$$\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}}-\bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_{j,i}=\frac{1}{V}\int_S[n_k\sigma_{kj}(u_j-\bar{u}_{j,i}x_i)-n_k\bar{\sigma}_{kj}(u_j-\bar{u}_{j,i}x_i)]\,\mathrm{d}S=$$
$$\frac{1}{V}\int_S(u_i-\bar{u}_{i,j}x_j)(n_k\sigma_{ki}-n_k\bar{\sigma}_{ki})\mathrm{d}S \tag{A2}$$

注意到 $\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}$ 可以表示为：

$$\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}=\frac{1}{V}\int_S(\omega_i-\bar{\omega}_{i,j}x_j)(n_k\mu_{ki}-n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S-$$
$$\frac{1}{V}\int_V\mu_{ki,k}\omega_i\mathrm{d}V+\bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_V(\mu_{ij}-x_ie_{jkl}\sigma_{kl})\mathrm{d}V \tag{A3}$$

下面推导和验证式(A3)。式(A3)右端第 1 项展开：

$$\frac{1}{V}\int_S(\omega_i - x_j\bar{\omega}_{i,j})(n_k\mu_{ki} - n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S =$$

$$\frac{1}{V}\int_S(n_k\mu_{ki}\omega_i - n_k\bar{\mu}_{ki}\omega_i - n_k\mu_{ki}x_j\bar{\omega}_{i,j} + n_k\bar{\mu}_{ki}x_j\bar{\omega}_{i,j})\mathrm{d}S \quad \text{(A4)}$$

式(A4)右端第 1 项可表示为：

$$\frac{1}{V}\int_S n_k\mu_{ki}\omega_i\mathrm{d}S = \frac{1}{V}\int_V\frac{\partial}{\partial x_k}(\mu_{ki}\omega_i)\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_V\frac{\partial\mu_{ki}}{\partial x_k}\omega_i\mathrm{d}V + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} \quad \text{(A5)}$$

式(A4)右端第 2 项可表示为：

$$\frac{1}{V}\int_S -n_k\bar{\mu}_{ki}\omega_i\mathrm{d}S = -\bar{\mu}_{ki}\frac{1}{V}\int_V\omega_{i,k}\mathrm{d}V = -\bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_{i,k} = -\bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} \quad \text{(A6)}$$

式(A4)右端第 4 项可表示为：

$$\bar{\mu}_{ki}\bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_S n_kx_j\mathrm{d}S = \bar{\mu}_{ji}\bar{\omega}_{i,j} = \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} \quad \text{(A7)}$$

需要强调指出的是：式(A6)和式(A7)均没有涉及平均偶应力张量 $\bar{\mu}_{ij}$ 的具体定义形式。

式(A4)右端第 3 项可表示为：

$$-\bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_S n_k\mu_{ki}x_j\mathrm{d}S = -\bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_V\frac{\partial}{\partial x_k}(\mu_{ki}x_j)\mathrm{d}V =$$

$$-\bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_V(\mu_{ji} + \mu_{ki,k}x_j)\mathrm{d}V \quad \text{(A8)}$$

式(A5)~式(A8)代入式(A4)得到：

$$\frac{1}{V}\int_S(\omega_i - x_j\bar{\omega}_{i,j})(n_k\mu_{ki} - n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S =$$

$$\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} + \frac{1}{V}\int_V\mu_{ki,k}\omega_i\mathrm{d}V - \bar{\omega}_{i,j}\frac{1}{V}\int_V(\mu_{ji} + \mu_{ki,k}x_j)\mathrm{d}V \quad \text{(A9)}$$

根据式(A9)并利用平衡方程式(14)可以得到式(A3)，将式 (A2)和式(A3)代入式(26)得到：

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} - \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} =$$

$$(\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_{j,i}) + (\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij}) - e_{ijk}(\overline{\sigma_{ij}\omega_k} - \bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k) =$$

$$\frac{1}{V}\int_S(u_i - \bar{u}_{i,j}x_j)(n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})\mathrm{d}S +$$

$$\frac{1}{V}\int_S(\omega_i - x_j\bar{\omega}_{i,j})(n_k\mu_{ki} - n_k\bar{\mu}_{ki})\mathrm{d}S +$$

$$\left[\bar{\omega}_{j,i}\frac{1}{V}\int_V(\mu_{ij} + \mu_{kj,k}x_i)\mathrm{d}V - \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} + e_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\omega}_k\right] +$$

$$\left[-\frac{1}{V}\int_V\mu_{ki,k}\omega_i\mathrm{d}V - e_{ijk}\overline{\sigma_{ij}\omega_k}\right] \quad \text{(A10)}$$

根据平衡方程式(14)有：

$$-\frac{1}{V}\int_V\mu_{ki,k}\omega_i\mathrm{d}V - e_{ijk}\overline{\sigma_{ij}\omega_k} = -\frac{1}{V}\int_V\mu_{ki,k}\omega_i\mathrm{d}V - e_{ijk}\int_V\sigma_{ij}\omega_k\mathrm{d}V =$$

$$-\frac{1}{V}\int_V(\mu_{ik,i} + e_{kij}\sigma_{ij})\omega_k\mathrm{d}V = 0 \quad \text{(A11)}$$

将式(A11)代入式(A10)即可得到式(27)。

(上接第 28 页)

[7] 高月华. 基于 Kriging 代理模型的优化设计方法及其在注塑成型中的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2008: 16, 19—22.
Gao Yuehua. Optimization methods based on Kriging surrogate model and their application in injection molding [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2008: 16, 19—22. (in Chinese)

[8] Mashiro K, Kentaro T, Sinkyu J, Kazuomi Y. Multi-objective aerodynamic optimization of elements' setting for high-lift airfoil using kriging model [R]. Nevada: 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2006: 8—12.

[9] Koch P N, Wujek B A, Golovidov O, Simpson T W. Facilitating probabilistic multidisciplinary design optimization using Kriging approximation models [C]// 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. Atlanta, Georgia, 2002: 14—23.

[10] Simpson T W. Comparison of response surface and Kriging models in the multidisciplinary design of an aerospike nozzle [R]. Langley Research Center, NASA, Hampton, VA, 1998: 7—16.

[11] Yang R J, Wang N, Tho C H, Bobineau J P, Wang B P. Metamodeling development for vehicle frontal impact simulation [J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127: 1014—1020.

[12] Macay M D, Beckman R J, Conover W J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code [J]. Technometrics, 1979, 21(2): 239—245.

[13] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The finite element method [M]. 5th ed. Oxford: Butterworth- Heinemann, Oxford, 2000: 89—93.

[14] Murio D A. Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(4): 1138—1145.

[15] Oldham K B, Zoski C G. The fractional calculus [M]. New York: Academic Press, 1974: 26—27.

[16] Lophaven S N, Nielsen H B, Sondergaard J. DACE-A Matlab Kriging Toolbox, Technical Report IMM-TR-2002-12, Informatics and mathematical modelling [R]. Denmark: Technical University of Denmark, 2002: 13—20.

[17] Bordas S, Natarajan S, Kerfriden P, et al. On the performance of strain smoothing for quadratic and enriched finite element approximations [J]. International Journal of Numerical Method in Engineering, 2011, 86: 637—666.