

文章编号: 0258-1825(2013)03-0381-07

# 比熵增概念及其在湍流模型中的应用

赵瑞<sup>1</sup>, 阎超<sup>1</sup>, 李新亮<sup>2</sup>, 蒋海军<sup>3</sup>

- (1. 北京航空航天大学国家计算流体力学实验室, 北京 100191;
2. 中国科学院力学所高温气体动力学重点实验室, 北京 100190;
3. 北京临近空间飞行器系统工程研究所, 北京 100076)

**摘要:**通过对不同马赫数下( $Ma=0.7, 2.25, 6$ )平板边界层进行直接数值模拟研究, 提出比熵增的概念。比熵增表征单位机械能的耗散, 并且在数值上表现出较好的单调性和马赫数无关性, 因而能够可靠地表征边界层的范围。应用比熵增概念修正 BL 零方程湍流模型长度尺度, 构造 BL-entropy, 同时采用原始的 BL 模型, SA 一方程模型对后台阶( $Ma=0.128$ )以及高超声速锥柱裙组合体( $Ma=7.05$ )流动进行数值模拟, 并与实验数据进行比较, 结果表明 BL-entropy 能够准确地获取长度尺度进而得到均匀合理的涡粘性分布, 极大地提升了原始 BL 模型模拟复杂流动的能力。

**关键词:**熵; 比熵增; Baldwin-Lomax 湍流模型; 计算流体力学  
**中图分类号:** V211.3      **文献标识码:** A

## 0 引言

热力学第二定律, 即熵增原理, 被广泛地应用在计算传热量以及计算流体力学领域。熵是有效能量耗散程度的指标, 表征自然界中能量演化的不可逆过程。Naterer 和 Camberos<sup>[1]</sup>总结了熵概念的具体应用: 1) 基本的热力学准则; 2) 解的唯一性, 即附加熵条件来排除多余的广义解; 3) 提高数值稳定性; 4) 熵函数的凹性以及其他特有的性质; 5) 时间步长限制; 6) 反设计方法; 7) 数值误差以及收敛性判断准则; 8) 上风格式精度影响; 9) 流体机械的优化设计。另外, Roe 等人采用网格单元的熵通量作为判断指标, 进行网格自适应加密<sup>[2-3]</sup>。最近, 赵瑞等人<sup>[4]</sup>通过对超声速压缩拐角进行直接数值模拟(DNS), 发现无论在附着流动区域还是在拐角处的分离区, 熵函数沿壁面法向都能够保持很好的单调性, 并利用该性质重构 Baldwin-Lomax(BL)湍流模型的长度尺度, 显著提高了 BL 模型的鲁棒性。

本文将继续文献<sup>[4]</sup>的研究工作, 通过对比不同马赫数下(从低速到高超声速)沿壁面法向的熵增变化规律, 提出比熵增概念。比熵增代表单位机械能的

耗散程度, 研究发现该物理量在数值上既能保持很好的单调性, 同时具有马赫数无关性, 进而增强了采用熵概念分辨边界层的能力。文章结构安排如下: 第一节定义熵函数并通过对不同马赫数下平板边界层的 DNS 模拟提出比熵增概念, 并构造熵函数  $f_s$ 。第二节描述本文采用的数值方法。指出原始的 BL 模型存在的缺陷以及如何利用熵函数进行修正。第三节通过对后台阶流动( $Ma=0.128$ )以及高超声速锥柱裙组合体( $Ma=7.05$ )进行数值模拟, 考核该修正方式的性能。最后一节对熵概念的应用做综合评价, 并对该概念在 CFD 领域的发展方向进行展望。

## 1 比熵增及熵函数 $f_s$

在自然界和工程实际应用中, 最经常发生的流动状态是湍流。湍流是流体微团的不规则运动, 湍流运动产生的质量、动量和能量的输运将远远大于分子热运动产生的宏观输运, 同时湍流脉动也会导致额外的能量耗散, 引起气动加热和摩擦阻的增加。可以预见到, 在壁面附近由于剧烈的湍流脉动以及壁面摩擦作用, 当地的机械能不可逆地转化为内能。而熵, 作为有效能量耗散程度的指标, 可以在数值上很好地表征

\* 收稿日期: 2012-05-24; 修订日期: 2012-10-17

基金项目: 国家 973 计划资助项目(2009CB724104); 北京航空航天大学博士研究生创新基金

作者简介: 赵瑞(1987-), 男, 山东阳谷人, 博士研究生, 主要研究领域: 高超声速湍流模型及混合方法. E-mail: zhaorui@ase.buaa.edu.cn

这一现象。

对于完全气体,熵增与能量变化有如下关系<sup>[5]</sup>:

$$ds = \frac{dq}{T} \quad (1)$$

其中,  $s$  为单位质量的熵,  $q$  为单位质量的热量,  $T$  代表当地温度。

将能量守恒定律,即热力学第一定律:

$$dq = du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2)$$

代入方程(1),整理得:

$$ds = c_v d\left(\ln \frac{p}{\rho^r}\right) \quad (3)$$

其中,  $u$  为单位质量内能,  $u = c_v T$ ;  $p, \rho$  分别为当地压力,密度;  $c_v$  为质量定容热容;  $r$  为比热比。由式(3)可以看出,  $s$  正比于  $p/\rho^r$ , 本文中定义熵函数:

$$s = \frac{p}{\rho^r} \quad (4)$$

可以看出,熵  $s$  只与当地的压力、密度有关,是个点函数,和物系的具体变化过程无关,只表征当地能量的耗散程度。此外,当外部势流流经物体时,由于壁面阻滞作用,速度逐步减小为 0,可以预见到,在不同马赫数下,所耗散掉的机械能不同,因此壁面的熵值也会大不一样。为减小这种对不同来流情况的依赖性,本文提出比熵增的概念(用  $\bar{s}$  表示),用来表征单位机械能的耗散程度。

$$\bar{s} = \frac{s/s_\infty - 1}{Ma_\infty^2} \quad (5)$$

李新亮等人<sup>[6-8]</sup>采用 DNS 方法对不同马赫数下的平板边界层进行模拟,实验条件如表 1 所示。

表 1 平板边界层 DNS 计算参数

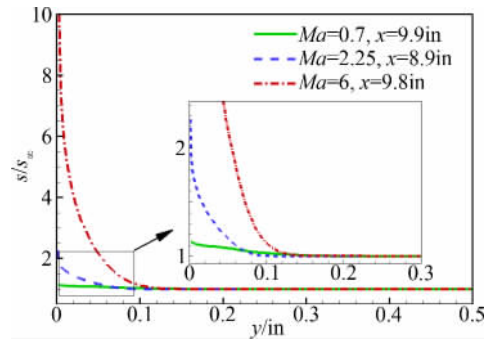
Table 1 Simulation conditions

$Ma_\infty$	$Re$	$T_w/T_\infty$
0.7	$5.0 \times 10^4$	1.098
2.25	$6.35 \times 10^5$	1.9
6	$2.0 \times 10^6$	6.98

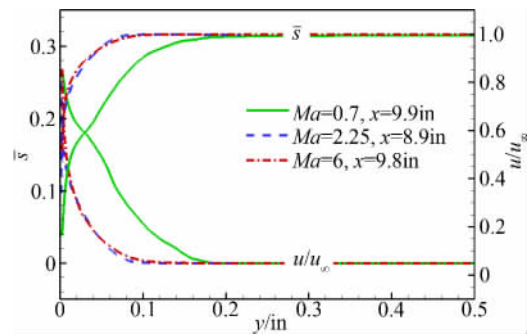
注:  $Ma_\infty$  为来流马赫数,  $Re$  为以英寸为单位长度雷诺数,  $T_w$  为壁面温度,  $T_\infty$  为来流温度。

从中分别提取沿壁面法向的熵和比熵增,如图 1 所示。可以看到,不同马赫数下,壁面熵值相差一个量级(图 1(a)),而壁面处比熵增基本在 0.1~0.5 之间,并且比熵增  $\bar{s} > 0$  的范围与边界层重合(图 1(b))。

此外,通常在网格生成时需要在壁面进行适度加



(a) 沿壁面法向熵值分布图



(b) 沿壁面法向比熵增分布图

图 1 不同马赫数下平板边界层沿壁面法向熵和比熵增

Fig. 1 Entropy and entropy increment ratio profiles normal to the wall under different Mach numbers

密,本文引入壁面距离来缓解高超声速流动中激波引起的局部的熵增,构造以下过渡函数:

$$r_s = \frac{\bar{s}}{(d_w/\delta_s)^2} \quad (6)$$

$$f_s = 1.0 - \tanh(r_s) \quad (7)$$

其中  $d_w$  为网格点到壁面最小距离,  $\delta_s$  为沿壁面法向,  $f_s = 0.99$  到最近壁面距离。

熵函数  $f_s$  有以下性质:当  $f_s < 1.0$  时,所指示的区域为边界层,当  $f_s = 1.0$  时,所指示区域为外部势流,如图 2 所示。

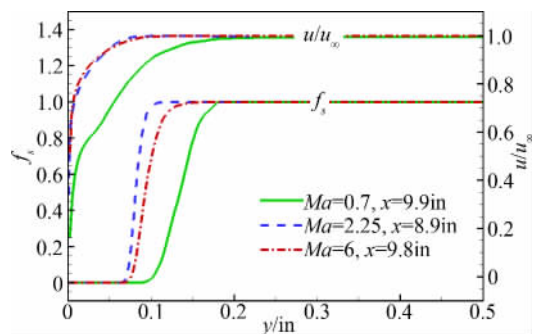


图 2 不同马赫数下平板边界层沿壁面法向  $f_s$  分布

Fig. 2 Function  $f_s$  profiles normal to the wall with different Mach numbers

下文中,将以 BL 模型的长度尺度修正为例,详细描述熵函数  $f_s$  的应用。

## 2 计算方法

### 2.1 控制方程

数值计算采用有限体积法求解可压缩雷诺平均方程,采用量热完全气体假设,粘性通量采用中心差分格式进行离散,无粘通量选择 Roe 的 FDS 格式,时间推进采用 LU-SGS 隐式方法。

### 2.2 Baldwin-Lomax 湍流模型

BL 模型<sup>[9]</sup>对湍流边界层的内层与外层采用不同的混合长假设,其涡粘性如下所示:

$$\mu_{t, BL} = \begin{cases} (\mu_t)_i, & y \leq y_c \\ (\mu_t)_o, & y > y_c \end{cases} \quad (8)$$

这里  $y_c$  是  $(\mu_t)_{inner} = (\mu_t)_{outer}$  时  $y$  到壁面最小距离。

对于内层,即  $y \leq y_c$ ,有:

$$(\mu_t)_i = \rho (K D y)^2 \Omega \quad (9)$$

其中  $\rho$  为密度,  $\Omega$  为涡量,  $K=0.4$  为 Karman 常数, Van Driest 衰减因子  $D$  如下:

$$D = 1 - \exp(-y\sqrt{\rho_w |\tau_w|} / 26\mu_w) \quad (10)$$

其中  $\tau_w$  为壁面摩擦力。对于外层,即  $y > y_c$ ,有:

$$(\mu_t)_o = \rho k C_{cp} F_{wake} F_{kleb} \quad (11)$$

尾迹函数  $F_{wake}$  如下式所示:

$$F_{wake} = \min(y_{max} F_{max}, C_{wk} y_{max} U_{diff}^2 / F_{max}) \quad (12)$$

其中  $F_{max} = \max(y\Omega D)$ ,  $y_{max}$  是函数  $F = y\Omega D$  达到最大值  $F_{max}$  的位置;  $C_{wk} = 1.0$ ,  $U_{diff}$  是平均速度分布中最大值与最小值之差。

Klebanoff 间歇函数  $F_{kleb}$  如下式所示:

$$F_{kleb} = [1 + 5.5 (C_{kleb} y / y_{max})^6]^{-1} \quad (13)$$

其中  $C_{kleb} = 0.3$ , 边界层厚度  $\delta = y_{max} / C_{kleb}$ 。

大量研究表明,原始的 BL 模型只能准确地预测附体流动以及弱分离流动,对于激波/边界层干扰以及分离、再附等复杂流动却无能为力。究其根本原因,一方面 BL 模型中的经验常数  $C_{cp} = 1.6$ 、 $C_{kleb} = 0.3$  是基于跨声速的平衡流动得出,并不适用于其他马赫数下的复杂流动;另一方面外层涡粘性的捕捉严重依赖于  $F_{max}$ 、 $y_{max}$  的确定,原始的 BL 模型并没有限制寻找  $F_{max}$  的范围,在复杂流动中会导致长度尺度  $y_{max}$  的不确定性<sup>[5,10]</sup>。

类似文献<sup>[5]</sup>采用的修正方法,以 BL 模型在超声速压缩拐角  $x/\delta = 0$  处的长度尺度修正为例,整个

搜寻过程分两步完成:1) 沿壁面法向由内向外搜索直到  $f_s > 0.95$  停止,储存停止位置。2) 函数  $F$  由停止位置反向搜索,确定  $F_{max}$  与  $y_{max}$ ,如图 3 所示。另外,根据文献<sup>[11]</sup>的建议,修正后的模型在低速流动中  $C_{cp} = 1.6$ 、 $C_{kleb} = 0.65$ ,在超声速及高超声速流动中采用  $C_{cp} = 2.08$ 、 $C_{kleb} = 0.3$ 。

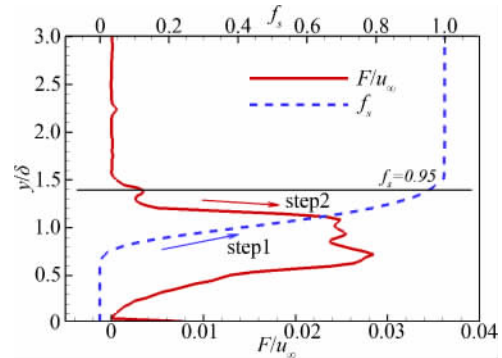


图 3 搜索过程示意图

Fig. 3 Searching steps

## 3 算例验证

### 3.1 低速后台阶流动 ( $Ma = 0.128$ )

后台阶流动<sup>[11]</sup>由于外形简单,并且流动分离点确定,是考核湍流模型性能的标准算例。来流条件如表 2 所示,低速流动在台阶处发生大分离,并在下游逐渐恢复边界层流动,流动示意图如图 4(a) 所示。壁面为无滑移的绝热壁,网格在壁面以及台阶分离区进行适度加密,第一层壁面网格高度保证  $y^+ < 1$  (如图 4(b) 所示)。

表 2 后台阶流动来流条件 ( $x/H = -4$ ,  $H$ : 台阶高度)

Table 2 Inflow conditions for backward-facing step

(at  $x/H = -4$ ,  $H$ : the step height)

$Ma_{ref}$	$U_{ref}/(m \cdot s^{-1})$	$\delta_{ref}/cm$	$Re_H$
0.128	44.2	1.9	37500

低速流体流经台阶时发生分离再附,原始的 BL 模型(BL-origin)在分离区处由于没有限制长度尺度的搜索范围,会导致在该处涡粘性预测过小,出现明显的涡粘性“断层”,如图 6(a) 所示。修正后的 BL 模型(BL-entropy)采用的熵函数  $f_s$  能够合理的指示出边界层的范围(图 5),进而限制长度尺度的搜索范围,获得较为合理的涡粘性分布(图 6(b))。但由于 BL 模型的平衡态假设,即涡粘性只由当地的平均流动参数的代数关系式所决定,因此对于后台阶这种大分离的复杂流动,对湍流场的预测能力要明显低于 SA 一方程湍流模型,如图 6(c) 所示,SA 模型预测的

涡粘性分布要比 BL 模型更为连续,而且在数值上明显大于 BL 模型。

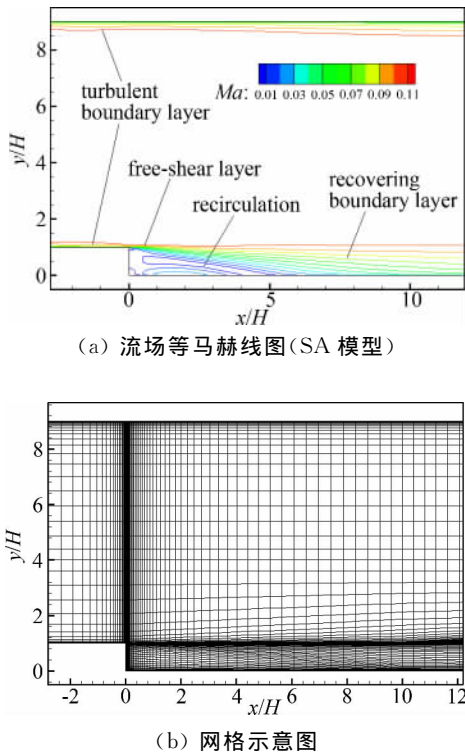


图 4 后台阶流场结构及网格示意图

Fig. 4 The flow structures and grid construction for the backward-facing step

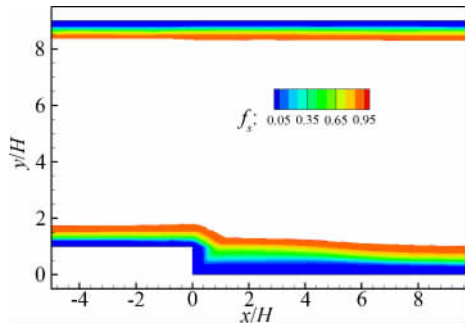
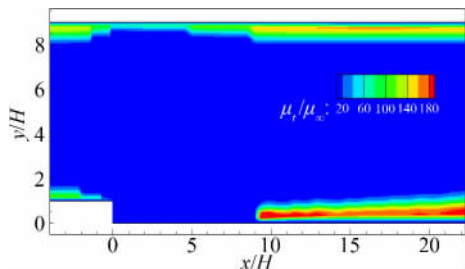
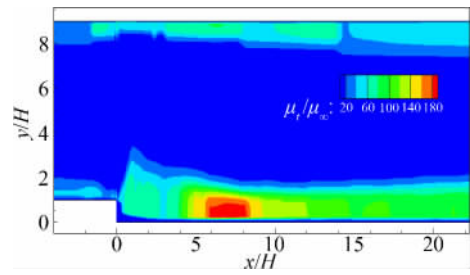


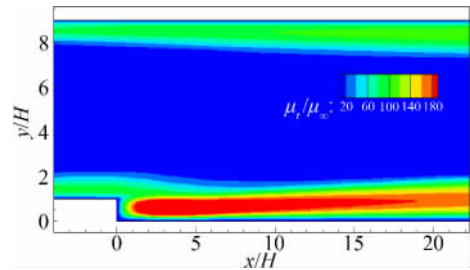
图 5 后台阶流动中熵函数  $f_s$  分布云图 (只显示  $f_s < 0.95$ )  
Fig. 5 Function  $f_s$  distributions in the flowfield (only depict  $f_s < 0.95$  for convenience)



(a) BL-origin



(b) BL-entropy

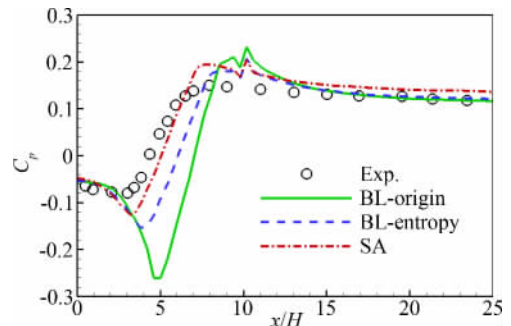


(c) SA

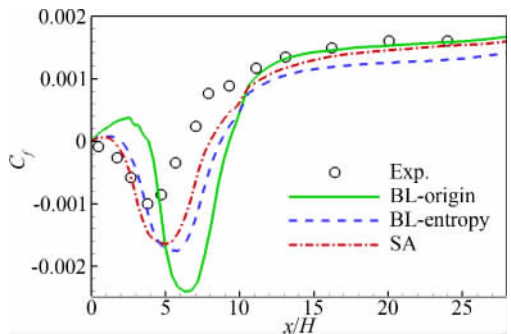
图 6 三种湍流模型预测的涡粘性分布云图

Fig. 6 The distributions of eddy-viscosity around the step

后台阶下壁面压力和摩擦力系数分布如图 7 所示,可以看到,BL-origin 预测的分离区明显过大,修正后的 BL-entropy 和 SA 模型预测的结果与实验值较为吻合,但由于 BL-entropy 计算的涡粘性偏低,分离区预测依旧偏大。



(a) 下壁面压力系数分布



(b) 下壁面摩擦力系数分布

图 7 壁面压力系数及摩擦力系数分布

Fig. 7 Pressure and skin-friction distributions along the step-side wall

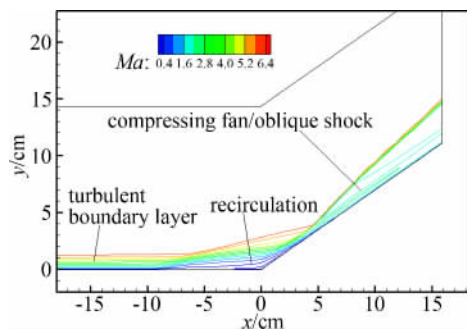
3.2 高超声速锥柱裙组合体流动 ( $Ma=7.05$ )

Kussoy 和 Horstman<sup>[12]</sup>对高超声速锥柱裙组合体流动进行了实验研究,具体实验条件如表 3 所示。高超声速气流流至拐角前段时,在逆压梯度的作用下,边界层变厚,从而使主流提前产生一系列的压缩波,并在离拐角一定距离处汇聚成一道斜激波,激波后边界层往往不能承受强逆压梯度而发生分离,形成一个“凸包”,高超声速气流流经该“凸包”后紧接着在斜面的压缩作用下,形成新的压缩波区,流动示意图如图 8(a)所示。图 8(b)为该算例的网格示意图,在壁面以及分离区附近进行加密,保证壁面第一层网格高度  $y^+ < 1$ 。由于拐角处强烈的激波/边界层干扰,BL-origin 在该算例中计算发散。

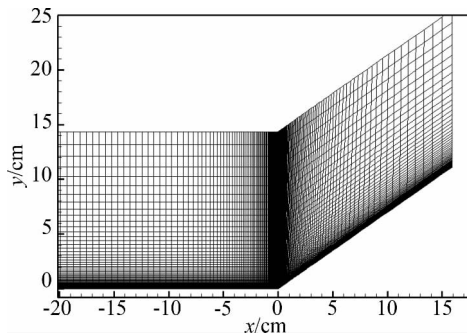
表 3 锥柱裙组合体流动入口条件 ( $x=-6\text{cm}$ )

Table 3 The inflow conditions for cylinder with conical flare (at  $x=-6\text{cm}$ )

$Ma_\infty$	$T_\infty$ /K	$P_\infty$ /( $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ )	$\rho_\infty$ /( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$T_w$ /K	$\delta_o$ /cm	$Q_\infty$ /( $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ )
7.05	81.2	576	0.0252	311	2.5	9300



(a) 流动等马赫线图 (BL-entropy)



(b) 网格示意图

图 8  $35^\circ$  锥柱裙组合体流动结构及网格示意图  
Fig. 8 The flow structures and grid construction for cylinder with conical flare at  $35^\circ$

图 9 为该算例中熵函数  $f_s$  的分布云图,可以看到  $f_s$  准确地捕捉到边界层在再附区域的发展历程。

然而对于高超声速复杂流动,BL-entropy 和 SA 模型预测能力都明显下降。如图 10 所示,在分离区以及再附区域,虽然  $f_s$  将 BL-entropy 预测的涡粘性很好地限制在壁面附近,但沿流向出现明显间断,而 SA 模型在再附点附近预测的涡粘性明显不足。

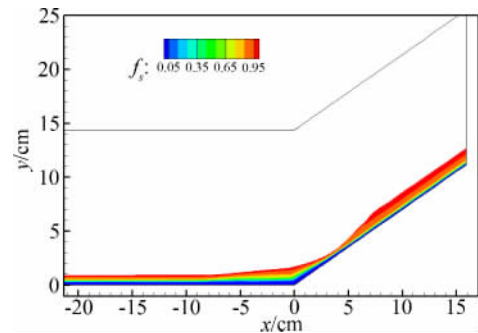
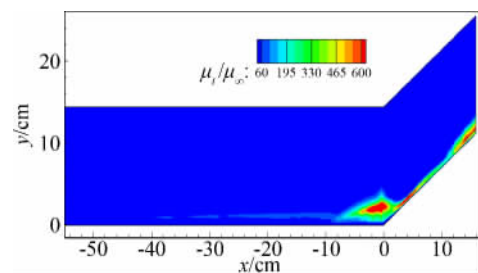
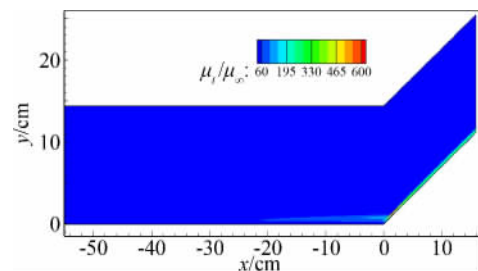


图 9 熵函数  $f_s$  分布云图 (只显示  $f_s < 0.95$ )

Fig. 9 Function  $f_s$  distributions in the flowfield (only depict  $f_s < 0.95$  for convenience)



(a) BL-entropy

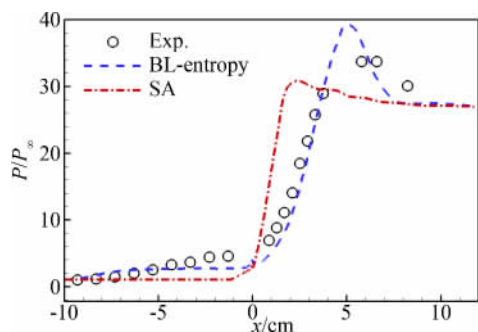


(b) SA

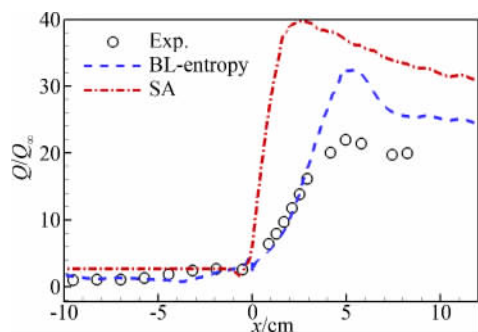
图 10 涡粘性分布云图

Fig. 10 The distributions of eddy-viscosity

计算所得的壁面压力与热流分布如图 11 所示,BL-entropy 能够很好的地预测处分离位置,但在再附点处压力出现明显的过冲,而 SA 模型预测的分离区过小,压力的恢复速度也要更快。在高超声速流动中,即使在附着流动中 ( $x \leq 0\text{cm}$ ),SA 模型预测的热流值也明显过大见图 11(b),整个再附区域的热流值也要远远大于实验值。与压力分布类似,BL-entropy 在再附点处出现热流过冲,但拐角区域的热流预测与实验值十分吻合。说明本文提出的 BL-entropy 对于高超声速复杂流动也能够进行合理的预测。



(a) 壁面压力分布



(b) 壁面热流分布

图 11 壁面压力及热流分布

Fig. 11 Pressure and heat flux distributions along the wall

## 4 结 论

比熵增表征单位机械能的耗散,由此构造的熵函数  $f_s$  同时具备单调性和马赫数无关性,因此可以从数值上保证对边界层的分辨能力。采用熵函数重构 BL 湍流模型的长度尺度,并通过对各种工况下的(从低速流动到高超声速流动)分离再附流动、激波/边界层干扰流动进行数值模拟,充分验证了该修正方法的可靠性。但同时介于 BL 模型本身的平衡态假设,涡粘性的预测不如 SA 模型的光滑,在低速流动中预测性能也要低于 SA 湍流模型。

诸多湍流模型、转捩模型以及可压缩修正方法都是借助边界层流动进行模型参数的标定,因此通过对边界层范围的合理预测来约束以及修正这些参数,将会提升这些模型对不同流动状况的预测能力。熵概念从能量耗散的角度上预测边界层的范围,更具有普适性。因此如何通过合理的构造熵函数改进现有模型的性能,也将是我们下一步工作。

## 参 考 文 献:

- [1] NATERER G F, CAMBEROS J A. The role of entropy and the second law in computational thermofluids[R]. AIAA 2001-2758.
- [2] FIDKOWSKI K J, ROE P L. Entropy-based mesh refinement, I: the entropy adjoint approach[R]. AIAA 2009-3790.
- [3] ZAIDE D W, ROE P L. Entropy-based mesh refinement, II: a new approach to mesh movement[R]. AIAA 2009-3791.
- [4] 赵瑞, 阎超, 于剑. 一种基于熵限制的 Baldwin-Lomax 湍流模型[J]. 北京航空航天大学学报, 2012, 38(2): 175-179.
- [5] GREINER W, NEISE L, STÖCKER H. Thermodynamics and statistical mechanics[M]. Springer-Verlag: New York Inc. 1995.
- [6] ZHOU Y, LI X L, FU D X, MA Y W. Coherent structures in the transition of a flat-plate boundary layer at  $Ma = 0.7$ [J]. *Chinese Physics Letter*, 2007, 24(1): 147-150.
- [7] LI X L, FU D X, MA Y W, et al. Acoustic calculation for super-sonic turbulent boundary layer flow[J]. *Chinese Physics Letter*, 2009, 26(9): 181-184.
- [8] LI X L, FU D X, MA Y W. Direct numerical simulation of a spatially evolving supersonic turbulent boundary layer at  $Ma = 6$ [J]. *Chinese Physics Letter*, 2006, 23(6): 1519-1522.
- [9] BALDWIN B S, LOMAX H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows[R]. AIAA Paper 78-0257, 1978.
- [10] VISBAL M, KNIGHT D. The Baldwin-Lomax turbulence model for two-dimensional shock-wave/boundary-layer interactions[J]. *AIAA Journal*, 1984, 22(7): 921-928.
- [10] DRIVER D M. Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow[J]. *AIAA Journal*, 1985, 23(1): 163-171.
- [11] SETTLES G, DODSON L. Hypersonic shock/boundary-layer interaction database[R]. AIAA Paper 91-1763, 1991.

