

构建 CFD 高精度不振荡格式的数值摄动算法

高智

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190)

摘要 作者提出的数值摄动算法(NPA)在数学上是用离散方程中的步长(小参数)把数值通量或单过程离散格式(如对流格式)进行级数展开,在维持离散方程结构和网格点不动的条件下,通过数学运算求出级数的系数,获得精度更高更稳健的离散方程;在物理上,NPA是把离散方程中的数值通量或单过程离散格式摄动展开成步长的幂级数、通过数学运算把所有的单过程离散格式关联在一起,同时把波动规律、对流运动规律(下游不影响上游)、扩散运动规律(物理粘性使扩散量空间分布均匀化)、诸物理过程之间的高阶线性关联引入离散方程,构建出精度更高更稳健的离散方程。已有常见算法对单过程离散格式进行各自的高精度不振荡化,NPA则是把所有单过程离散格式耦合在一起进行离散方程的高精度不振荡化,NPA是高级离散格式的全新构建法。常见算法提高格式精度需扩充结点,不振荡化需引入人工粘性或限制器,NPA则无需扩充结点引入人工粘性和限制器;例如双曲方程和对流扩散方程的三结点高精度不振荡数值摄动格式(NPS),不仅没有人工粘性或限制器,且模型方程计算表明:NPS比同阶精度WENO格式的精度更好,特别是在边界附近。双曲方程、Euler方程组、对流扩散方程、Navier-Stokes方程组的任一有限差分 and 有限体积格式均可用NPA把它们构建成精度更高更稳健的NPS,NPA普适性好,NPS无疑将形成格式大家族。已建成的许多NPS的优良性能,已得到理论证明和模型方程计算的数值验证,并被用于计算不可压、可压和两相流动等复杂流动。本文以三结点和五结点对流扩散方程的NPS及三结点双曲方程的NPS为例,简述数值摄动算法的要点、侧重物理方面;并提出值得进一步研究的问题。

关键词 计算流体力学,数值摄动算法,高精度高分辨率格式,双曲方程,对流扩散型方程

引言

构建 Navier-Stokes(NS)方程组和 Euler 的高精度稳定好的离散格式是 CFD 算法研究的一个核心内容,近半个世纪以来国内外学者已提出了众多的高精度高分辨率差分格式 [1, 2]。这些格式主要是开拓对流导数的空间离散格式,最简单的一阶迎风格式精度低数值耗散大、二阶中心格式¹稳定性差,两者的杂交格式改进了后者的稳定性但保留了低精度。人们发展了众多的高精度格式,最主要的高精度格式是扩充结点的多结点格式和增加新的待求未知量(如结点导数)的紧致格式,多结点和增加新的未知量无疑将带来一些新的问题,如格式的稳定性 and 收敛性,边界处理复杂化,“迎风”

类格式是否具有真正的对流迎风性等。能够捕捉激波的数值格式的发展,不论在理论、方法和应用方面,都是 CFD 算法研究中具有重大理论意义和应用价值的成就。Von Neumann 等 [3] 最早提出人工粘性捕捉法,中心型二阶有限体积加人工粘性 Jameson 格式 [4] 和 JFlow 软件得到广泛应用。改进一阶精度 Godunov 间断分解算法 [5] 的迎风型格式主要如通量差分分裂(FDS)、通量矢量分裂(FVS)、分片抛物(PPM)、对流迎风分裂(AUSM)等 [1, 2] 方法和不断改进的相应格式,得到了广泛应用。Harten [6] 提出分辨间断具有图形锐利陡峭和逼真的高分辨率概念、总变差减小(TVD)概念和利用通量限制器(flux limiter)构建 TVD 格式的方法,为有限差分方法的理论和格式构造开拓了一个崭新的方向。TVD 是对格式的一个很强的限制条件,使格式在局部极值点只有一阶精度;为了提高格式精度, Harten 等

1) 国家自然科学基金资助项目(10872204)
2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn

[7] 提出本质不振荡(ENO)格式的思想并根据差商绝对值极小的选择原则逐次扩展节点模板的格式构建方法,由此建成高精度高分辨率 ENO 格式 [8]。Liu 等 [9] 通过引入权重系数改进了 ENO 插值模板选择方案提高了计算效率,因而得到更为广泛的应用。张涵信 [10] 基于调整激波上、下游三阶色散关系的考虑,提出具有 TVD 性质的无波动、无自由参数耗散差分(NND)格式,他和合作者对 NND 格式作了一系列发展。邬华谟 [11] 设计了构建 ENO 格式的统一方法并提出统一 ENO(UENO)格式等。还有通量修正(FC),重构演化(RE)等方法。在 Laney 的计算气体动力学专著 [2] 中介绍的能够捕捉激波的计算格式,冠以人名的格式 1998 年以前已达 30 多个,说明分辨激波格式之重要,研究之热闹,成果之丰硕和尚无完美格式的情况。近年来又发展了间断 Galerkin(DG)方法 [12], 紧致 WENO 杂交格式 [13] 等。这些格式均离不开对数值耗散、数值色散甚至数值群速度的人为检察、判断和自适应调控,且高于二阶精度的格式均需使用多结点。作者提出的数值摄动算法和摄动格式 [14-16] 与已有的高精度高分辨率算法和相应格式截然不同,该法着眼于 CFD 数学格式中界面通量(对有限体积 FV 离散)和对流导数系数(对有限差分 FD 离散)或对流格式和扩散格式的数值(步长)摄动重构,原 CFD 格式同时被重构为高精度条件稳定和高精度绝对稳定数值摄动格式。数值摄动即步长摄动展开解通过空间分裂、引入下游不影响上游的对流运动规律或使流动光滑化的扩散运动规律,通过对摄动格式的数学运算及消除摄动格式修正微分方程截断误差诸项来求得,因此数值摄动格式(NPS)保留了原格式的结构形式,参见图 1,既没有扩充结点,也没有增加结点导数,也没有使用人工粘性、通量限制器等人工光滑技术和扩充结点的 ENO 型构建技巧,且多结点摄动格式的构建方法与三结点摄动格式的构建方法完全相同。数值摄动法亦容易与其它优良格式相耦合,从而构建成精度更高更稳健的杂交格式,因此 CFD 数值摄动格式形成了数目众多的摄动格式家族。本文分别以对流扩散方程的二阶中心有限体积(FV)和有限差分(FD)格式、

有限差分 QUICK 格式及双曲方程守恒格式的数值摄动重构格式为例,说明数值摄动法的特点,侧重物理方面并提出进一步的研究课题。

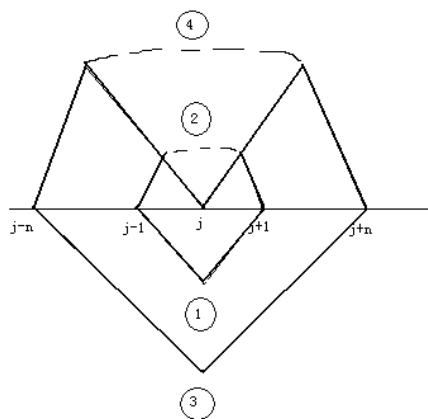


图 1. CFD 格式与其数值摄动格式家族:①三结点一阶迎风(1US)、二阶中心(2CS)、高阶条件稳定中心单重对流摄动格式(SCPS)、高阶绝对稳定迎风单重对流摄动格式(SCPS)和高阶绝对稳定和中心扩散摄动格式(DPS); ②三结点高阶绝对稳定和中心间断(双重)对流摄动格式(DCPS); ③多结点条件稳定偏心和中心高阶格式及更高阶单重对流摄动格式(SCPS),绝对稳定更高阶偏心和中心扩散摄动格式(DPS); ④多结点高阶绝对稳定和中心双重对流摄动格式(DCPS)。

1 二阶中心有限体积(FV)格式的数值摄动重构格式 [17]

对流扩散积分方程

$$\int_S \rho \varphi \bar{u} \bar{n} ds = \int_S \mu \nabla \varphi \bar{n} ds \quad (1)$$

的二阶中心 FV 格式(2CVS)为

$$\sum_{j=1}^J \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\mu}{d_j^2} \bar{d}_j \bar{S}_j - (1 - \delta_j) m_{jf} \right] \varphi_{jp} - \\ \left[\frac{\mu}{d_j^2} \bar{d}_j \bar{S}_j + \delta_j m_{jf} \right] \varphi_p \end{array} \right\} = 0 \quad (2)$$

其中 φ 为被输运量, φ 可为流速分量、温度、能量、组分浓度; ρ 为密度, S 为控制体界面, \bar{n} 为界面外法向单位矢量。在 2CVS(2)中面积分已取中点律(midpoint rule)近似,格式(2)中 φ_p 和 φ_{jp} 为 p -控制单元中心基点变量和相邻 jp -单元中心基点变量,参见图 2,设 p -单元共有 J 个界面,中心 p 与 jp 连线近似垂

直于界面 jf ， \vec{d}_j 是连结 p 和 jp 的矢量， \vec{d}_j 的指向从 p 到 jp 用 $\vec{\xi}_j$ 来表示， $(1-\delta_j)d_j$ 和 $\delta_j d_j$ 分别是 p 和 jp 到界面 jf 的距离， \vec{S}_j 和 m_{jf} 分别是界面 jf 的面积矢量和通量， $m_{jf} = \rho U_{\xi_j} S$ ， U_{ξ_j} 是流速在 $\vec{\xi}_j$ 方向的分量。

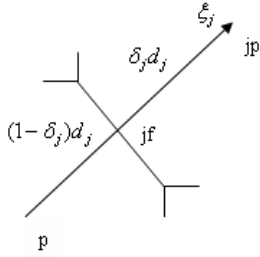


图2 有限体积 p -单元和相邻 jp -单元及局部坐标示意图

作者提出的数值摄动算法 [15, 16] 着眼于通过对方程和格式的运算，求得通量 m_{jf} 的步长(自然小参数)摄动展开级数解 m_{jfp} 及间断步长摄动解即上游和下游双重摄动解 m_{jfp}^+ 和 m_{jfp}^-

$$m_{jfp} = m_{jf} G_{cj} \quad G_{cj} = 1 + \sum_{n=1} a_{jn} d_j^n \quad (3)$$

$$m_{jfp}^{\pm} = m_{jf} G_{cj}^{\pm} \quad G_{cj}^{\pm} = 1 + \sum_{n=1} a_{jn}^{\pm} d_{j\pm}^n \quad d_{j+} = \delta_j d_j \quad d_{j-} = (1-\delta_j) d_j \quad (4)$$

其中 a_{jn} ， a_{jn}^+ 和 a_{jn}^- 为待定常数，方便起见称 G_{cj} ， G_{cj}^{\pm} 为摄动重构函数，在通量 m_{jf} 的间断摄动解，即上、下游摄动解(4)中，不失一般性假设了 $U_{\xi_j} > 0$ ，因此中心 p 为上游， jp 为下游。把 2CVS(2) 中的通量 m_{jf} 代之以摄动解(3)，或代之以间断摄动解，即上、下游双重摄动解(4)后，得到单重对流数值摄动格式(SCPS)

$$\sum_{j=1}^J \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\mu}{d_j^2} \vec{d}_j \vec{S}_j - (1-\delta_j) m_{jf} G_{cj} \right] \varphi_{jp} \\ - \left[\frac{\mu}{d_j^2} \vec{d}_j \vec{S}_j + \delta_j m_{jf} G_{cj} \right] \varphi_p \end{array} \right\} = 0 \quad (5)$$

和间断(双重)对流摄动格式(DPCS)

$$\sum_{j=1}^J \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\mu}{d_j^2} \vec{d}_j \vec{S}_j - (1-\delta_j) m_{jf} G_{cj}^+ \right] \varphi_{jp} \\ - \left[\frac{\mu}{d_j^2} \vec{d}_j \vec{S}_j + \delta_j m_{jf} G_{cj}^- \right] \varphi_p \end{array} \right\} = 0 \quad (6)$$

对摄动格式(5)和(6)进行空间分裂，再把格式(5)和(6)的空间分裂格式中的 φ_p 和 φ_{jp} 展开成 Taylor 级数，分别令 d_j^n 或 d_{j+}^n 或 d_{j-}^n 的系数等于零，经运算求得式(7)，

$$\frac{\partial^n \varphi_{jf}}{\partial \xi_j^n} = \left(\frac{d_j}{\mu \vec{d}_j \vec{S}_j} \right)^n m_{jf}^n \varphi_{jf} \quad (7)$$

即可求得所有系数 a_{jn} 、 a_{jn}^+ 和 a_{jn}^- ，于是求得摄动重构函数 G_{cj} 、 G_{cj}^+ 和 G_{cj}^- 。

$$G_{cj} = 1 - (1-2\delta_j) R_{d_j} + \frac{1}{6} (1-5\delta_j + 6\delta_j^2) R_{d_j}^2 - \frac{1}{24} (1-14\delta_j + 36\delta_j^2 - 24\delta_j^3) R_{d_j}^3 + \frac{1}{120} (1-30\delta_j + 150\delta_j^2 - 240\delta_j^3 + 120\delta_j^4) R_{d_j}^4 \quad (8)$$

$$G_{cj}^+ = 1 + \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{1-\delta_j} \left[\frac{1}{n!} - \frac{2n+1}{(n+1)!} \delta_j \right] \delta_j^n R_{d_j}^n \quad (9)$$

$$G_{cj}^- = 1 + \sum_{n=1} \frac{1}{\delta_j} \left[\frac{2n+1}{(n+1)!} \delta_j - \frac{n}{(n+1)!} \right] (1-\delta_j)^n R_{d_j}^n \quad (10)$$

其中 $R_{d_j} = \frac{\rho U_{\xi_j} d_j}{\mu}$ ，故可称 R_{d_j} 为网格 Reynolds 数。在等步长 ($\delta_j = \frac{1}{2}$) 条件下，式

(8)-(10)化简为

$$G_{cj} = 1 - \frac{1}{12} R_{d_j}^2 + \frac{1}{120} R_{d_j}^4$$

$$G_{cj}^+ = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{2^n (n+1)!} R_{d_j}^n$$

$$G_{cj}^- = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n (n+1)!} R_{d_j}^n \quad (11)$$

分析和讨论：由摄动展开诸系数 a_{jn} 、 a_{jn}^+ 和 a_{jn}^- 的求出办法知道，若取 $n = N$ ，则单重对

流摄动中心体积格式 SCP-CVS(5)和间断对流摄动中心体积格式 DCP-CVS(6)的插值近似精度均为 $(N+2)$ 阶。下面是六点讨论: (1)解析分析证实, SCP-CVS(5)和 2CVS 均为条件稳定格式, 即它们为稳定(或正型)的临界网格 Reynolds 数 R_{cri} 为有限值, 2CVS 及四阶和六阶精度 SCP-CVS 的 R_{cri} 分别为 2.0, 4.2 和 2.6。(2)奇数阶精度 DCP-CVS, 当步长参数 δ_j 满足关系

$$\frac{N}{2N+1} < \delta_j < \frac{N+1}{2N+1} \quad (N \text{ 为奇数}) \quad (12)$$

时为绝对正型(即绝对稳定)格式, 它们为稳定的 R_{cri} 为 ∞ 。 δ_j 不满足式(12)的奇数阶精度 DCP-CVS 和偶数阶精度 DCP-CVS 为条件正型格式。(3)SCP-CVS 和 DCP-CVS 的上述优良性能已得到一维、二维模型方程及非线性 Burgers 方程计算的数值证实。对一维和二维线性模型方程, 五阶精度 SCP-CVS 和 DCP-CVS 计算的均方根误差 L_2 仅约是 2CVS 计算 L_2 误差的万分之一(对一维)和千分之一(对二维)。奇数阶精度 DCP-CVS 求解非线性 Burgers 方程, 网格再粗也不振荡, 数值证实它们的绝对稳定、高分辨率性质。(4)在仅使用相邻控制单元不涉及较远单元的条件下, 获得高精度中心 FV 格式, 且在不使用人工粘性、通量限制器等人为光滑化技术的条件下, 获得高精度绝对稳定不振荡中心 FV 格式, 因此, SCP-CVS 和 DCP-CVS, 特别是奇数阶精度 DCP-CVS 是十分理想和很实用的中心 FV 格式, 例如为在著名的 Jameson 二阶中心 FV 格式中避免使用人工粘性提供了一个有效的途径。(5)从物理角度来看, 奇数阶精度 DCP-CVS 是把下游不影响上游的对流运动规律引入二阶中心 FV 格式中的结果, 因此 DCP-CVS 是中心 FV 格式框架下的对流迎风格式。(6)对一阶迎风有限体积(1UVS)格式可类似地构建出插值近似高精度单重对流摄动迎风体积格式(SCP-UVS)和间断对流摄动迎风体积格式(DCP-UVS), 它们均为绝对稳定格式。

2 QUICK 格式的数值摄动重构格式 [18]

对流扩散方程

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (13)$$

的 QUICK 格式(指对流项和扩散项分别取 QUICK 格式和二阶中心格式的离散格式)为

$$\frac{u_i}{\Delta x} \left[\frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{3\varphi_{i+1}+3\varphi_i-7\varphi_{i-1}+\varphi_{i-2}}{8} \right) + \frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{-\varphi_{i+2}+7\varphi_{i+1}-3\varphi_i-3\varphi_{i-1}}{8} \right) \right] = \gamma \frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (14)$$

其中 $\alpha = \text{sign}u_i$ 。数值摄动法寻求对流导数系数 u_i 的步长摄动展开级数解 u_{ip} 和间断步长摄动解 u_{ip}^+ 和 u_{ip}^- , 即数值摄动重构 u_i

$$u_{ip} = u_i G_{bi}, \quad G_{bi} = 1 + \sum_{n=1} b_n \Delta x^n \quad (15)$$

$$u_{ip}^\pm = u_i G_{bi}^\pm, \quad G_{bi}^\pm = 1 + \sum_{n=1} b_n^\pm \Delta x^n \quad (16)$$

其中 b_n 、 b_n^+ 和 b_n^- 为待定系数。把偏心格式(14)中的系数 u_i 代之以摄动展开解(15), 或代之以间断摄动解(16)后, 得到单重对流摄动重构格式(SCPS)

$$\frac{u_{ip}}{\Delta x} \left[\frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{3\varphi_{i+1}+3\varphi_i-7\varphi_{i-1}+\varphi_{i-2}}{8} \right) + \frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{-\varphi_{i+2}+7\varphi_{i+1}-3\varphi_i-3\varphi_{i-1}}{8} \right) \right] = \gamma \frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (17)$$

和间断对流摄动重构格式(DCPS)

$$\left[\frac{u_{ip}^+}{\Delta x} \left(\frac{1+\alpha}{2} \frac{3\varphi_{i+1}-3\varphi_i}{8} + \frac{1-\alpha}{2} \frac{-\varphi_{i+2}+7\varphi_{i+1}-6\varphi_i}{8} \right) - \gamma \frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{\Delta x^2} \right] + \left[\frac{u_{ip}^-}{\Delta x} \left(\frac{1-\alpha}{2} \frac{3\varphi_{i-1}+3\varphi_i}{8} + \frac{1+\alpha}{2} \frac{\varphi_{i+2}-7\varphi_{i+1}+6\varphi_i}{8} \right) - \gamma \frac{\varphi_{i-1}-\varphi_i}{\Delta x^2} \right] = 0 \quad (18)$$

文 [8] 称它们为高-QUICK 格式, 利用 $u = u_i$ 条件下, 由对流扩散方程(13)导出的高阶导数与一阶导数的如下关系

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \Big|_i = \left(\frac{u_i}{\gamma} \right)^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i \quad (19)$$

再令摄动重构格式(17)和(18)修正微分方程中诸截断误差项的系数为零, 于是求得诸待定常数 b_n 、 b_n^+ 和 b_n^- , 求得摄动重构函数 G_{bi} 、 G_{bi}^+ 和 G_{bi}^- , 并有

$$G_{bi} = 1 + \frac{1}{24} R_{\Delta x_i}^2 - \frac{\alpha}{16} R_{\Delta x_i}^3 + \frac{23}{960} R_{\Delta x_i}^4 - \quad (20)$$

$$\frac{\alpha}{96} R_{\Delta x_i}^5 + \frac{1103}{161280} R_{\Delta x_i}^6$$

$$G_{bi}^+ = \frac{1+\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{18} R_{\Delta x_i} - \frac{1}{36} R_{\Delta x_i}^2 + \frac{1}{270} R_{\Delta x_i}^3 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2160} R_{\Delta x_i}^4 - \frac{1}{11340} R_{\Delta x_i}^5 - \frac{1}{90720} R_{\Delta x_i}^6 \right) +$$

$$\frac{1-\alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{30} R_{\Delta x_i} + \frac{11}{100} R_{\Delta x_i}^2 + \frac{61}{1125} R_{\Delta x_i}^3 + \right.$$

$$\left. \frac{2591}{90000} R_{\Delta x_i}^4 + \frac{76463}{4725000} R_{\Delta x_i}^5 + \frac{856957}{94500000} R_{\Delta x_i}^6 \right) \quad (21)$$

$$G_{bi}^-(u_i > 0) = G_{bi}^+(u_i < 0)$$

$$G_{bi}^-(u_i < 0) = G_{bi}^+(u_i > 0) \quad (22)$$

当 b_n^+ 、 b_n^- 和 b_n^0 截止到 N ，SCPS(17) 和 DCPS(18) 的精度为 $(N+2)$ 阶。进一步讨论如下：(1) 利用“符号不变”原则 [19] 文 [18] 证明了高-QUICK 格式(17)为条件稳定高精度差分格式，它们为稳定格式的临界网格 Reynolds 数 R_{cri} 为有限值，证明了高-QUICK 格式(18)部分为绝对稳定高精度格式，部分为条件稳定高精度格式，表 1 给出高-QUICK 格式的

表 1 QUICK 格式和高-QUICK 诸格式稳定的临界网格 Reynolds 数 R_{cri} [18]

	2	3	4	5	6	7	8
QUICK 格式 (14)	$\frac{8}{3}$	/	/	/	/	/	/
高-QUICK 格式 (17)	/	$\frac{8}{3}$	2.21	3.04	2.33	2.81	2.12
高-QUICK 格式 (18)	/	3.25	∞	3.82	3.87	2.84	∞

3 双曲守恒型格式的数值摄动重构格式 [20]

对双曲守恒方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

的半离散(空间离散)一阶迎风和二阶中心格式，可发展一阶迎风(包括守恒形式和通量分裂形式)格式和二阶中心格式的摄动和间断摄动重构格式。例如，通量分裂形式的半离散一阶迎风格式为

R_{cri} 。一维和二维模型方程的计算数值地证实了高-QUICK 格式(17)和(18)的高精度性质，8 阶精度高-QUICK 格式的绝对误差 L_∞ 和均方根误差 L_2 约是 QUICK 格式 L_∞ 和 L_2 误差的十万分之一；Burgers 方程计算证实了四阶和八阶精度高-QUICK 格式(18)捕捉间断的优良能力和不振荡性质。(2)高-QUICK 格式在维持 QUICK 格式结构形式不变且不增加结点的条件下提高了格式的精度，又在不使用人工粘性、通量限制器等人工光滑化技术的条件下，获得了高精度、不振荡多结点迎风差分格式，因此，高-QUICK 格式，特别是四阶和八阶精度高-QUICK 格式(18)是比 QUICK 格式更理想和更有用的多结点格式。(3)从物理角度来看，间断对流摄动重构四阶和八阶精度高-QUICK 格式是把下游不影响上游的对流运动规律引入多结点偏心 QUICK 差分格式的结果，因此它是多结点偏心 QUICK 格式框架下真正的对流迎风多结点格式。(4)对其它的多结点偏心和中心差分格式，通过步长摄动重构和间断步长摄动重构和类似的运算，可构建出精度更高且绝对稳定的摄动迎风和中心差分格式。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} (f_j^+ - f_{j-1}^+) + \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1}^- - f_j^-) = 0 \quad (24)$$

其中

$$f = f^+ + f^-, \quad \frac{\partial f^+}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial f^-}{\partial x} < 0 \quad (25)$$

格式(24)的间断对流摄动重构格式(DCPS)即为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u_p^+}{\Delta x} (f_j^+ - f_{j-1}^+) + \frac{u_p^-}{\Delta x} (f_{j+1}^- - f_j^-) = 0 \quad (26)$$

$$u_p^+ = 1 + \sum_{n=1} a_n^+ \Delta x^n, \quad u_p^- = 1 + \sum_{n=1} a_n^- \Delta x^n \quad (27)$$

把 u_p^+ 和 u_p^- (27) 代入格式 (26), 再把 f_{j-1}^+ 和 f_{j+1}^- 展开成 Taylor 级数, 通过消除格式 (26) 修正微分方程截断误差项, 求得

$$\begin{aligned} a_1^\pm &= \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^\pm}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f^\pm}{\partial x} \right)^{-1}, \\ a_2^\pm &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f^\pm}{\partial x^2} \right)^2 \left(\frac{\partial f^\pm}{\partial x} \right)^{-1} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f^\pm}{\partial x^3} \left(\frac{\partial f^\pm}{\partial x} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (28)$$

当 a_n^+ 、 a_n^- 诸系数截止到 $n = N$ 时, 摄动格式 (26) 的精度为 $(N+1)$ 阶。双曲守恒方程 (23) 二阶中心格式的间断对流数值摄动格式 (DCPS) 可类似地获得。文 [20] 对模型方程, 粘性 Burgers 方程和一维非定常无粘气动方程的计算表明: 摄动迎风格式与一阶迎风格式相比, 在精度和分辨率方面都有明显的改进, 特别是对膨胀波逼近精度的提高, 现有多数高精度高分辨率格式在计算超声速膨胀 Sjögreen 问题时都出现了溢出现象, 而摄动迎风差分格式表现上乘。应当指出, 文 [20] 双曲摄动格式的精度高于二阶时, 虽然摄动格式仍维持一阶迎风格式 (24) 的简洁形式, 但诸系数 $a_n^\pm (n \geq 2)$ 的计算, 即中间计算不得不包含更多的结点。

4 重构扩散项的数值摄动格式 [21, 22]

前三节讨论了对流离散格式的数值摄动重构, 本节讨论扩散离散格式的数值摄动重构, 考虑存在没有源项 f 的对流扩散方程 (13), 它的二阶中心差分格式的扩散数值摄动重构格式 (DPS) 写出为

$$\frac{u_i}{2} \Delta x (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) = G_d (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + G_f F_i \Delta x \quad (29)$$

$$\begin{aligned} G_d &= \gamma \left(1 + \sum_{n=1} d_n \Delta x^n \right) \\ G_f &= 1 + \sum_{n=1} f_n \Delta x^n \end{aligned} \quad (30)$$

把式 (30) 代入 (29), 并把 $\varphi_{i\pm 1}$ 对 i - 结点取 Taylor 展开, 利用高阶导数与一阶导数的如下关系式,

$$\left. \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right|_i = \left(\frac{u_i}{\gamma} \right)^{n-1} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i - \left(\frac{u_i}{\gamma} \right)^{n-1} F_i \quad (31)$$

通过消除摄动格式 (29) 修正微分方程诸截断误差项, 于是求得 d_n 和 G_d , f_n 和 G_f

$$\begin{aligned} G_d &= 1 + \frac{1}{12} R_{\Delta x}^2 - \frac{1}{720} R_{\Delta x}^4 + \frac{1}{6 \times 7!} R_{\Delta x}^6 - \dots, \\ G_f &= 1 \end{aligned} \quad (32)$$

d_{2n} 和 f_{2n} ($n=1, 2, \dots$) 截止到 d_{2N} 和 f_{2N} , 格式 (29) 达到 $(2+2N)$ 阶精度, 不难证明四阶和八阶精度 DPS (29) 为绝对稳定, 六阶精度 DPS (29) 为条件稳定, 四阶和八阶 DPS 写出为

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} R_{\Delta x} + \frac{1}{12} R_{\Delta x}^2 \right) \varphi_{i+1} - \left(2 + \frac{1}{6} R_{\Delta x}^2 \right) \varphi_i + \\ \left(1 + \frac{1}{2} R_{\Delta x} + \frac{1}{12} R_{\Delta x}^2 \right) \varphi_{i-1} + F_i = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} R_{\Delta x} + \frac{1}{12} R_{\Delta x}^2 - \frac{1}{720} R_{\Delta x}^4 + \frac{1}{6 \times 7!} R_{\Delta x}^6 \right) \varphi_{i+1} - \\ \left(2 + \frac{1}{6} R_{\Delta x}^2 - \frac{1}{360} R_{\Delta x}^4 + \frac{1}{3 \times 7!} R_{\Delta x}^6 \right) \varphi_i + \\ \left(1 + \frac{1}{2} R_{\Delta x} + \frac{1}{12} R_{\Delta x}^2 - \frac{1}{720} R_{\Delta x}^4 + \frac{1}{6 \times 7!} R_{\Delta x}^6 \right) \varphi_{i-1} + F_i = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

解析分析和模型方程计算证实了 DPS (33) 和 (34) 的高精度高分辨率性质。已有高级离散格式都是处理对流离散格式的结果, 而 DPS (33) 和 (34) 则是数值摄动重构扩散格式的结果, 重构扩散的实质是把物理粘性使流动光滑化的扩散运动规律引入格式之中, 这不仅使三结点中心格式不振荡且达到高精度, 相比之下, 人工粘性、调控数值耗散等的人为光滑化处理可使格式不振荡但不能提高精度, 提高精度还需增添节点模块 [1, 2]。应当指出, 摄动重构扩散格式的结果格式 (DPS) (33)–(34) 与间断摄动重构对流格式的结果格式之相应部分 [22] 完全一致可见扩散重构亦把下游不影响上游的对流运动规律“吸收”进重构格式之中, 说明流体运动自然规律之间深刻的内在关联, 说明流体运动规律对构建高级离散格式具有极其重要的作用。

5 讨论与建议

Navier-Stokes(NS)方程组和 Euler 方程组分别是对流扩散型方程和双曲型方程,因此对 NS 方程组或 Euler 方程组的任一有限差分(FD)格式和有限体积(FV)格式(统称 CFD 格式),均可采用数值摄动法把它重构成精度更高更稳健甚至不振荡的数值摄动 FD 格式和 FV 格式,显然数值摄动格式(NPS)必将成为数目众多的一大家族。对流扩散方程、双曲方程、NS 方程组和 Euler 方程组已有不少 NPS,它们的共同特点是:NPS 维持原 CFD 格式的结构形式不变,且不再扩充新的结点,不再增加新的待求未知量,不再引入新的通量限制器等人处理;而是通过对方程和摄动格式本身的数学运算,通过间断对流摄动引入下游不影响上游的对流运动规律,通过扩散重构引入扩散运动规律来获得 NPS,因此 NPS 比原 CFD 格式能更好地刻划流动的规律和特征,同时说明对 CFD 高级离散格式的构建流体力学能够发挥重要的作用。很显然,构建新的 NPS 扩大 NPS 家族成员,合理筛选出优秀 NPS 使其成为实用格式,都值得进一步研究。

在已有 NPS 中,使用结点最少的三结点 NPS 值得重视,因为文献上所见不振荡三结点格式的最高精度不超过二阶,而不振荡三结点 NPS 的精度达到四阶和八阶;不过对含有激波、压缩-膨胀波系的复杂流场计算,一方面有必要把三结点高精度不振荡 NPS 与其它多结点高精度高分辨率格式的计算结果作足够系统的对比,并构建 NS 方程组的三结点有限差分 NPS 解算器;另一方面,二阶中心 FV 格式的间断对流摄动重构中心体积格式 DCP-CVS 为插值近似高精度不振荡中心 FV 格式,且其结构形式与二阶中心 FV 格式相同,十分简单,求解仅涉及最邻近的单元,因此 DCP-CVS 是十分理想的高精度高分辨率格式,需要针对典型复杂流场把 NS 方程组 DCP-CVS 的计算结果与其它高精度高分辨率格式(如 WENO 格式)的计算结果以及 Jameson 二阶中心 FV 格式(使用了人工粘性)的计算结果进行对比研究,并构建 NS 方程组的有限体积实用 NPS 解算器。

对 NS 方程组和 Euler 方程组的其它形式离散格式,如守恒通量-原始变量形式,Riemann 近似、数值流向量和特征矩阵等形式,发展相应的数值摄动格式 NPS,发展压力项的 NPS,都是值得进一步研究的工作。

参考文献

- [1] Chung T J. Computational Fluid Dynamics (Second Edition), Cambridge University Press 2010
- [2] Laney C B. Computational Gasdynamics. Cambridge University Press. 1998
- [3] Von Neuman J, Richtmyer RD, A method for numerical calculation of hydrodynamic shock. J. Applied Phys 1950 21:232-257
- [4] Jameson A, Schmidt W. Turkel E. Numerical solutions of Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. AIAA paper 81-1259, 1981
- [5] Godunov S K. A difference method for the numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations Math. Sobrnik 47:271-306 1959
- [6] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws J. Comput Phys 49:357-393 1983
- [7] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III Jour. Comput. Phys 71:231-303 1987
- [8] Shu C W. Preface to the republication of "Uniformly high order essential non-oscillatory schemes, III" by Harten, Enyquist, Osher and Chakravarthy. J. Comput. Phys 1997, 131 1-2
- [9] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. J. Comput. Phys 1994 115:200-212
- [10] 张涵信. 无波动无自由参数的耗散差分格式 空气动力学学报, 1988 6: 143-165
- [11] 郭华谟 UENO-A class of ENO schemes constructed in unified way 北京计算流体力学讨论会文集(第6辑, 171-189页), 1994, 中国科学院力学研究所
- [12] Cockburn B, Karniadakis G E, Shu C W. Discontinuous Galerkin Method. Berlin:Springer 2000
- [13] Shen Y. Q, Yang G. W, Gao Z, High-resolution finite compact difference schemes for hyperbolic conservation laws J. Comput. Phys 216:114-137, 2006
- [14] 高智 对流扩散方程的高精度差分方法 北京计算流体力学讨论会文集(第六辑, 1-23页) 中国科学院力学研究所 1994
- [15] 高智. 对流扩散方程的摄动有限体积方法. 第十一届全国计算流体力学会议论文集(38-45页), 2002, 河南洛阳.
- [16] 高智 数值摄动算法及其 CFD 格式 力学进展 2010, 40(6) 607-633
- [17] 高智 对流扩散方程的绝对稳定中心有限体积格式, 力学学报待发表
- [18] 朱可, 李明军 对流扩散方程 QUICK 格式的数值摄动高精度重构格式 力学学报 2011, 43(1)55-62
- [19] 陶文铨 计算传热学进展 科学出版社 2002
- [20] 申义庆, 高智, 杨项辉 一阶双曲方程的摄动有限差分格式 计算物理 22(6): 650-656, 2005

[21] 高智 利用物理粘性构建对流扩散方程的高精度不振荡三结点中心差分格式 待发表

[22] 高智 对流扩散方程的绝对稳定高阶三结点中心差分格式 力学学报 2010, 42(5): 811-817