

# 微圆柱气体绕流的流体力学分析

胡远, 孙泉华, 樊菁

中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190

**摘要** 本文采用基于分子动理论的耦合算法和基于连续流假设的传统 CFD 方法对空气绕微尺度圆柱的流动进行了数值模拟。 $Re$  数的变化从 0.01 到 40,  $Ma$  数则从不可压缩变化到 1。通过包含不同物理机理的多层次的数值模拟, 分析了气体绕微尺度圆柱流动的流体力学行为, 特别是流动的可压缩效应和稀薄效应对流动的影响。研究发现, 流动可压缩性受低  $Re$  数效应的作用而增强, 而稀薄效应在一定程度上削弱流动的可压缩性。可压缩效应的影响使分离涡的长度随  $Ma$  数的增长呈现先增后减的非单调变化趋势; 而稀薄效应使分离显著推迟, 分离涡缩小甚至消失。由于稀薄效应的影响, 在圆柱表面可以观察到速度滑移以及非平衡正应力, 减小了表面所受的剪切应力。总的来说, 可压缩效应增大圆柱的阻力系数, 而稀薄效应则相反, 两种效应对圆柱阻力的变化贡献存在竞争关系。

**关键词** 圆柱绕流, 低  $Re$  数, 可压缩性, 稀薄效应

## 引言

圆柱绕流是流体力学研究的一个经典问题, 人们对该问题的关注已经有一个多世纪了 [1]。在最近几十年微机电系统 (MEMS) 迅速发展和广泛应用的刺激下, 这些经典的流体力学问题受到了新的关注。这是因为在微尺度下, 流动表现出许多非同一般的特性 [2]。正因如此, 在微机电设备中的流体力学问题也成为了新的研究热点 [3]。

微流动因其流动特征长度非常小, 通常属于低雷诺 ( $Re$ ) 数流动的范畴。此外, 由分子平均自由程 ( $\lambda$ ) 与流动特征长度的比值定义了努森 ( $Kn$ ) 数, 它表征了流动非连续或者稀薄程度的大小。标准状况下, 空气的  $\lambda$  大约为 65nm。对于一般的流动来说,  $Kn$  数的影响可以忽略, 流动被认为是连续的。但是在微尺度流动中,  $Kn$  数的值并不小到可以被忽略, 流动开始表现出一些稀薄效应。事实上,  $Kn$  数可以表示为两个熟悉的无量纲数——马赫数 ( $Ma$ ) 和  $Re$  数的函数, 即  $Kn \approx \sqrt{\pi\gamma/2} Ma/Re$ 。 $Re$ ,  $Ma$  和  $Kn$  数分别代表着粘性效应, 可压缩效应, 和稀薄效应对流动的影响。因此, 微尺度圆柱流动的研究实质上涉及到这三种效应的复杂耦合。

低  $Re$  数圆柱绕流的研究最早可以回溯到 Stokes 对于蠕流问题 ( $Re \ll 1$ ) 的理论分析尝

试 [4]。在蠕流流动中, 惯性力的作用远小于粘性力, 因而 Stokes 将 Navier-Stokes (NS) 方程中的非线性惯性项全部忽略, 得到了线性化的 Stokes 近似。虽然 Stokes 给出了该近似的三维球对称解, 但遗憾的是, 在求解二维圆柱问题时, Stokes 发现不存在同时满足物面条件和自由来流条件的自洽解。这也是著名的 Stokes 佯谬。Oseen 在 1910 年指出被 Stokes 近似忽略的惯性项会在远场起主导, 并在近似中部分考虑惯性项的作用, 得到所谓的 Oseen 近似, 从而使 Stokes 佯谬得以解决。Oseen 近似方程的求解比较复杂, Lamb 第一个给出其二维圆柱问题的近似解 [5]。实际上, 蠕流问题是一种奇异摄动问题。对奇异摄动问题, 一种比较有意义的求解方法是匹配渐近展开法。Proudman 和 Pearson [6], 以及 Kaplun [7] 是较早采用匹配渐近展开方法来求解极低  $Re$  数圆柱绕流问题的学者。其中, Kaplun [7] 给出了在壁面附近的三阶近似解。当  $Re$  大于 1 以后, 蠕流流动的假设不再成立, 这些分析解也随之失效, 实验研究和数值求解 NS 方程开始成为主要研究手段。在实验研究方面, Tritton 开展了较早却比较系统的工作, 得到了  $Re$  数在 0.5 到 100 范围内圆柱阻力的一个数据库 [8]。受实验技术影响, 低  $Re$  数圆柱绕流阻力的精确测量并不容易, 不同研究者的测量数据存在较大散布。一组被认为

较准确的阻力数据是由 Huner 和 Hussy 测量的,但他们研究涵盖的  $Re$  数范围仅仅为 0.23 到 2.6 [9]。Wu 等通过采用实验和谱元数值方法相结合,系统研究了低  $Re$  数圆柱绕流的分离角,并给出其与  $Re$  数的关系  $\theta_s - Re^{-1/2}$  [10]。最近, Sen 等采用有限元方法模拟了定常分离流动,推荐了一系列流动物理量(分离涡长度,分离角,阻力等)与  $Re$  数的拟合关系 [11]。

前述的这些研究都是不可压缩流动,且没有考虑稀薄效应。Sun 和 Boyd 指出,低  $Re$  数气体流动极有可能是可压缩的,且伴有稀薄效应 [12]。Gampert 采用匹配渐进展开方法,通过引入滑移条件,较早的研究了伴有稀薄效应的极低  $Re$  数圆柱绕流 [13]。在他的研究中指出,由于滑移速度的存在,圆柱表面粘性正应力不再为零。Beskok 和 Karniadakis 运用谱元法求解 NS 方程,并采用自己发展的一种高阶滑移条件模拟  $Re = 1$  和 10 两个条件下的圆柱绕流 [14]。数值结果显示了滑移速度分布,证实了速度滑移对壁面剪切应力的减小,以及粘性正应力的存在。

就我们所知,对低  $Re$  数圆柱绕流中可压缩效应和稀薄效应的系统研究还没有。本文的研究目的就是希望弄清楚圆柱绕流这一经典问题,在这几种效应及其耦合作用下的流体力学规律。

## 1 研究方法

前面已经提到了理论分析在  $Re$  数大于 1 时的困难,以及实验测量低  $Re$  数流动有诸多的不确定性,因而本文采用数值模拟手段。数值模拟研究气体绕流微尺度圆柱,一个关键的问题是如何抓住流动中表现出来的稀薄效应。在文献里,最流行的处理方法就是假定连续介质模型依然有效,从而仍然解 NS 方程,只是通过在物面引入滑移条件来表现出稀薄效应对流动的影响,如 Beskok 和 Karniadakis [14]。但事实上,速度滑移现象仅仅是稀薄效应在宏观层面的表现之一;而且,NS 方程本身的线性本构关系在稀薄流动中也可能并不成立。分子动理论是比较适合的用以描述具有稀薄效应的流动。但是,一般的基于分子动理论的数值模

拟方法,如直接模拟 Monte Carlo (DSMC) 方法 [15],计算开销很大,尤其是在模拟低速流动时效率特别低。因此,为了兼顾物理有效性和计算效率,本文采用 Sun 等推荐的一种耦合连续-粒子模拟 (hybrid continuum-particle) 的算法 [16]。该方法已成功模拟一些典型的微尺度外流流动 [12, 17]。

采用基于分子动理论的耦合算法,我们可以抓住微尺度流动中的稀薄效应。比较耦合方法得到的结果与采用基于解 NS 方程的传统计算流体力学 (CFD) 方法得到的结果可以将稀薄效应对流动的影响分辨出来,因为传统 CFD 方法的结果不包含稀薄效应的影响。对传统 CFD 的模拟,我们采用成熟的 SIMPLEC [18],因为该算法在模拟不可压缩以及低速可压缩流动都表现出不错的性能。

## 2 计算设置

本文同时采用基于动理论的耦合算法和传统 CFD 方法模拟气体绕流微尺度圆柱问题。圆柱直径 ( $D$ ) 设为  $20 \mu\text{m}$ ,壁温保持为 273K。自由来流为空气,温度也为 273K,计算的  $Ma$  数范围从 0 变化到 1。这里  $Re$  数以来流参数和圆柱直径计算,变化范围为 0.01 到 40 的低  $Re$  数范畴。

当  $Re \leq 40$  时,在圆柱的后部还不会出现涡脱落的情况,流动是定常流。这样,我们没有必要特别延长圆柱下游的计算区域;同时,又由于定常圆柱绕流的流场是上下对称的,因而计算区域被设计为如图 1 所示的半圆状。计算域的直径为  $H$ ,网格在圆柱附近进行加密。有文献指出,数值结果准确性对计算域的大小很敏感,尤其是在极小  $Re$  数的情况。Lange 等给出了在不同  $Re$  数下,估计计算域大小与计算误差的经验关系 [19]。根据这个经验关系,本文对  $Re = O(10^{-2})$ ,  $O(10^{-1})$ ,  $O(10^0)$  和  $O(10^1)$  的情况,计算域 ( $H/D$ ) 的设置分别为 16000, 4000, 400 和 100,以确保由计算域造成的数值结果误差不超过 1%。图 2 是本文的不可压缩 CFD 结果与相关的理论及实验关于阻力系数的对比。本文数值结果与文献出色的吻合说明了我们数值模拟的有效性。

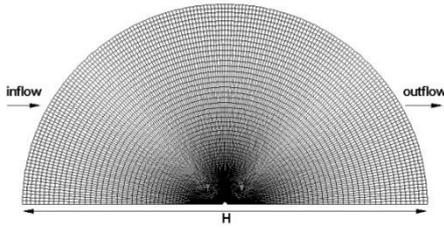


图1 计算网格示意图

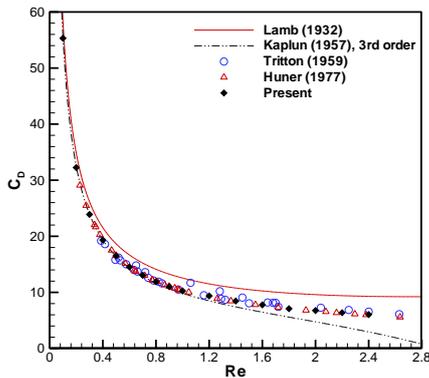


图2 阻力比较：本文数值结果与文献理论和实验结果

### 3 结果与分析

#### 3.1 极低Re数下流动的可压缩性分析

通常情况下，当来流  $Ma$  数小于 0.3 时，人们就把气体流动当作不可压缩来处理。在微器件中  $Re$  数通常非常小，由于粘性的作用，低  $Ma$  数流动是可以维持在较大压力变化下的，从而引起足够大的密度改变以使不可压缩流动假设失效。这一点也被 Sun 和 Boyd 在他们关于微尺度平板的数值研究中所证实 [12]。

事实上，不可压缩假设成立的确切条件应为流体微团密度的相对变化率充分小，以至于可以忽略，即  $(1/\rho)(D\rho/Dt)$  接近零。借助于 NS 方程组以及热力学关系式，我们可以将  $(1/\rho)(D\rho/Dt)$  写为

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{c^2} u_k \frac{\partial(u_i u_i / 2)}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho c^2} u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{c_p} \frac{1}{\rho T} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \right] \quad (1)$$

我们将式 (1) 中的变量作这样的无量纲处理， $x'_i = x_i/L, t' = t/(L/u_\infty), \rho' = \rho/\rho_\infty, u'_i = u_i/u_\infty, T' = T/T_\infty, c' = c/c_\infty = \sqrt{T'}, \mu' = \mu/\mu_\infty$ ，则有

$$\frac{1}{\rho'} \frac{D\rho'}{Dt'} = -\frac{Ma}{T'} u'_k \frac{\partial(u'_i u'_i / 2)}{\partial x'_k} + \frac{1}{\rho' T'} \frac{Ma^2}{Re} u'_i \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x'_j} - (\gamma - 1) \frac{Ma^2}{Re} \frac{\sigma'_{ij}}{\rho' T'} \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} - \frac{1}{Pr \cdot Re} \frac{1}{\rho' T'} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left( \mu' \frac{\partial T'}{\partial x'_k} \right) \quad (2)$$

式中， $Re = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty, Ma = u_\infty / c_\infty, Pr = \mu c_p / k$ 。可以看出，流体微团密度的变化是跟  $Re$  数有关的。当  $Re$  数极低时，即使是小  $Ma$  数流动，密度的变化也并不一定可以忽略。

表 1 给出了  $Ma = 0.05$  时，极低  $Re$  数下气体绕圆柱流场中密度变化的几组数据对比。数值结果清楚的表明了  $Re$  数对流动可压缩性的影响，即使  $Ma$  数仅仅为 0.05，在极低  $Re$  数流动中应用不可压缩假设也可能是不适宜的。

Kaplun [7] 的匹配渐进展开方法可以给出不可压缩圆柱绕流的壁面压力分布，其三阶近似的结果为

$$\frac{p - p_\infty}{0.5 \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{8}{Re} \cos \theta \left[ f_0(Re) - 0.87 f_0^3(Re) \right], \quad (3)$$

$$f_0(Re) = \left[ \ln(8/Re) - \bar{\gamma} + \frac{1}{2} \right]^{-1}, \quad \bar{\gamma} = 0.5772$$

如果我们认为极低  $Re$  数下流动可压缩性增强对压力分布的影响不大，也就是说对于气体可压缩流动上式依然成立。那么，我们可以利用气体状态方程和式 (3) 得到在圆柱前驻点的压强为

$$\frac{p_0}{p_\infty} = 1 + 4\gamma \frac{Ma^2}{Re} \left[ f_0(Re) - 0.87 f_0^3(Re) \right] \quad (4)$$

因为来流温度与壁温相等，所以  $p_0/p_\infty = \rho_0/\rho_\infty$ 。圆柱前驻点密度为

$$\frac{\rho_0}{\rho_\infty} = 1 + 4\gamma \frac{Ma^2}{Re} \left[ f_0(Re) - 0.87 f_0^3(Re) \right] \quad (5)$$

由表 1 数据的对比可以很容易的发现，式 (5) 可以较好的估计极低  $Re$  数流场中密度变化。

通过比较解可压缩和不可压缩 NS 方程的 CFD 结果，我们能够分析低  $Re$  数下流动可压缩性增强对流动特性的影响。图 3 比较了在不同  $Re$  数下，圆柱表面压力系数和剪切应力系数的可压缩和不可压缩 CFD 结果。同时，也将 Kaplun [7] 的不可压缩理论分析结果一同进行比较，作为参考。压力系数理论解由式 (3) 给出，而剪切应力系数为

$$\frac{\tau_{r\theta}}{0.5 \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{8}{Re} \sin \theta \left[ f_0(Re) - 0.87 f_0^3(Re) \right] \quad (6)$$

从比较结果可知，当  $Re = 0.01$  时，理论分析解与不可压缩条件的数值结果几乎重合，这说明在如此小  $Re$  数的情况下，蠕流的假设是基本成立的；而可压缩数值结果却与不可压缩（理论和数值）的结果有差异，表现为压力系数的可压缩数值结果略小，压力系数和摩擦系数分布的前后对称性破坏，说明在这么小的  $Re$  数下，即使  $Ma$  数只有 0.05，不可压缩假设也并不成立。随着  $Re$  数增大，可压缩与不可压缩数值结果之间的差异逐渐减小，而 Kaplun 分析解与数值结果的差异加大。当  $Re$  增大到 1 时，

可压缩与不可压缩数值结果的几乎完全重合，但此时 Kaplun 分析解的结果已失去意义。

当  $Re$  数非常小时， $Kn$  数也许就不再能够被忽略了。在图 4 中，通过比较可压缩 CFD 和耦合算法给出的压力系数分布，展示了稀薄效应对流动可压缩性带来的影响。很明显，当  $Kn$  数较大 ( $Kn = 0.15$ ) 时，耦合算法给出的驻点压力明显减小，而且沿整个圆柱表面压力的变化幅度也都小于 CFD 结果；而当  $Kn$  数很小 ( $Kn = 0.015$ ) 时，耦合算法与 CFD 的结果一致。这说明稀薄效应削弱了流动的可压缩性。

表 1  $Ma = 0.05$  时，不同  $Re$  数下前驻点密度 ( $\rho_0/\rho_{co}$ ) 比较

$Re$	CFD 结果	理论结果 (式 5)
0.01	1.198	1.208
0.05	1.054	1.054
0.1	1.031	1.031
1.0	1.006	1.005

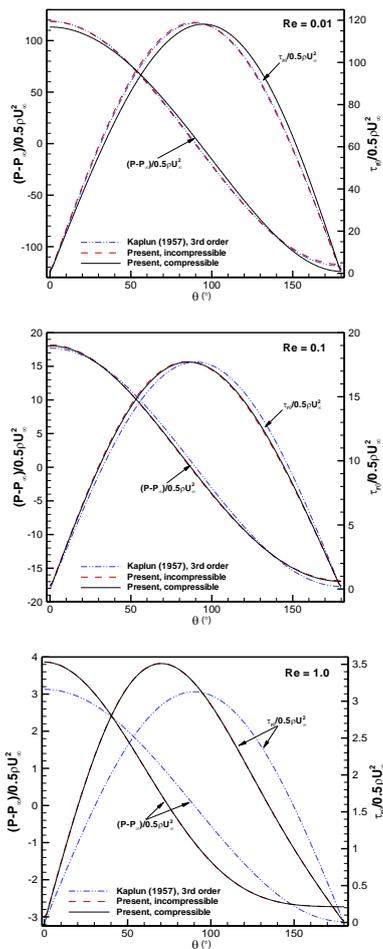


图 3 圆柱表面压力系数及剪切应力分布 ( $Ma = 0.05$ ): 理论解，本文不可压缩和可压缩 CFD 结果比较

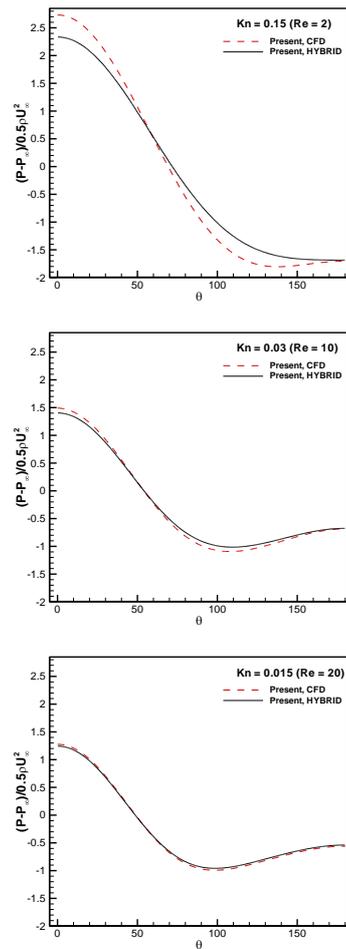


图 4 圆柱表面压力系数分布 ( $Ma = 0.2$ ): 本文可压缩 CFD 与耦合算法结果比较

### 3.2 定常分离涡的发展

圆柱后部流动分离现象的研究是学者们非常感兴趣的。在不可压缩流动中，分离涡的长度被认为是与 $Re$ 数呈线性关系的，流动分离角则是与 $Re^{-0.5}$ 呈线性关系。我们对定常不可压缩分离流的数值模拟所预测的分离涡长度和分离角与文献中的结果吻合很好，见图5。根据本文的数值结果，我们给出了最小二乘拟合的分离涡长以及分离角随 $Re$ 数变化的关系，

$$\frac{L_{incomp}}{0.5D} = -0.8054 + 0.1308Re, 7 \leq Re \leq 40 \quad (7)$$

$$\theta_{s,incomp} = 102.42 + 152.65Re^{-0.5}, 10 \leq Re \leq 40 \quad (8)$$

通过式(7)的关系，我们外推出的分离发生的临界 $Re$ 数( $Re_s$ )大约为6.2，与Sen等[11]的结果相符。

前人对圆柱绕流流动分离的研究主要还是集中在不可压缩流动上，此时 $Re$ 数是唯一关键的无量纲数。但正如我们前文提到的，可压缩效应是气体流动的主要特点之一， $Ma$ 数也是重要的无量纲参数。因此，研究 $Ma$ 数变化对流动分离的影响也许会比较有趣。分析图6我们发现 $Ma$ 数对流动分离的影响是比较复杂的。图6(a)是分离涡长度在不同 $Re$ 数下随 $Ma$ 数变化的规律。分离涡先随 $Ma$ 数的增大而缓慢增长到一个极大值；然后随着 $Ma$ 数的继续增大，分离涡迅速缩小。而且，涡变化趋势的转向点所对

应的 $Ma$ 数随 $Re$ 数的增大而增大。图6(b)为分离角受 $Ma$ 数和 $Re$ 数变化的影响。从图中可以发现，对 $Ma$ 数影响的敏感程度，分离角的变化不如分离涡。因为当 $Ma \leq 0.5$ 时，在所有 $Re$ 数条件下的分离角几乎都保持不变。分离角出现可见变化时所对应的 $Ma$ 数，在 $Re = 10$ 时大概为0.6，而在 $Re = 40$ 时则要增大至0.8左右。 $Ma$ 数影响分离角，使之出现可见变化都是往增大的方向改变，从而使流动分离推迟。值得一提的是，分离涡长度随 $Ma$ 数增长均是在分离角出现可见变化之前；而当 $Ma$ 数继续增大到使分离角明显增大、流动分离推迟时，分离涡开始急剧减小。

对低 $Re$ 数气体流动来说， $Ma$ 数的改变所引起 $Kn$ 数的变化不可忽略，从而导致稀薄效应影响流动。我们比较了耦合算法和CFD方法模拟得到的流线图，见图7。通过比较我们可以很清楚地看到稀薄效应对流动分离的影响：随 $Kn$ 数的增大，稀薄气体效应增强，分离推迟，分离涡显著减小；到 $Kn = 0.06$ 时，稀薄效应的影响已足够消除分离的发生。稀薄效应抑制流动分离的机理主要在于它会引起壁面出现滑移速度，因而流体微团的动能增大，克服逆压和粘性做功的能力大大增强，从而流动分离推迟甚至消失。

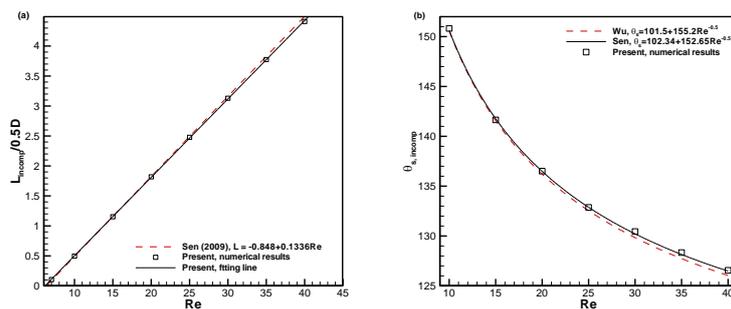


图5 不可压缩流动分离涡长度与分离角随 $Re$ 数变化：(a) 分离涡长度，(b) 分离角

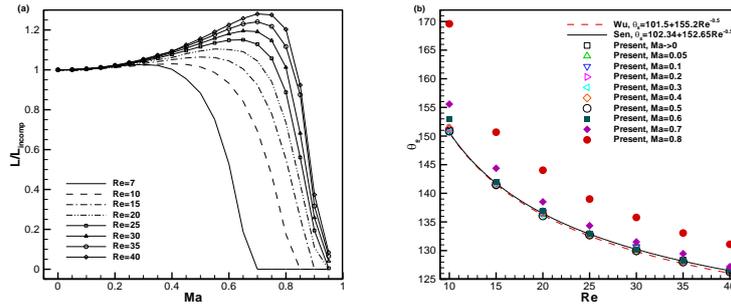


图 6 流动分离涡长度与分离角随  $Re$  数和  $Ma$  数变化: (a) 分离涡长度, (b) 分离角

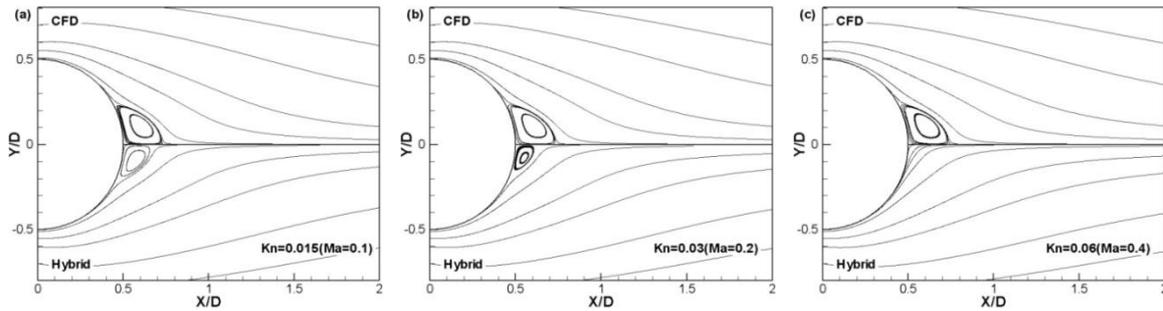


图 7 圆柱绕流流线图 ( $Re = 10$ ): 可压缩 CFD 结果与耦合算法结果比较

### 3.3 表面流动量变化

低  $Re$  数气体流动, 在物体表面出现的最显著的特点就是由稀薄气体效应引起的速度滑移现象。正如上一小节所见, 圆柱绕流的流场结构由于速度滑移的作用发生显著改变。而且, 滑移速度还会减小圆柱表面的剪切应力。此外, Gampert [13] 的渐进展开解指出, 不同于无滑移情况, 如果圆柱表面存在滑移速度, 壁面的粘性正应力是不为零的。Beskok 和 Karniadakis [14] 在他们采用滑移条件对不可压缩圆柱绕流的数值研究中证实了以上两点。Beskok 在他们的文章中注明的  $Re$  数为 10, 但没有说明  $Re$  数的定义方式。经过比较, 我们认为他们的  $Re$  数是以圆柱半径定义的, 如果同样用直径定义,  $Re$  数应为 20。我们比较了相同  $Re$  数 ( $Re = 20$ ) 和  $Kn$  数 ( $Kn = 0$  和  $0.015$ ) 条件下本文和 Beskok 的数值结果, 见图 8。可以看出, 在滑移速度 (图 8 (a)) 和剪切应力系数 (图 8 (b)) 的分布上, 两者所预测的变化趋势大体吻合, 特别是在滑移速度和剪切应力达到最大值以前; 但是在圆柱的后半部分, 尤其是在分离区, 本文与 Beskok 的结果, 无论是有稀薄效应 ( $Kn = 0.015$ ) 还是无稀薄效应 ( $Kn = 0$ ), 都有不小的差异。需要指出的一点是,

Beskok 在他们的文章中预测的流动分离角在无滑移情况时为  $147^\circ$ , 这也与其他文献的结果之间存在不小的差别。关于壁面处的粘性正应力, 从连续流模型来讲, 其计算方式为,

$$\tau_{rr}|_{r=0.5D} = -\mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=0.5D} \quad (9)$$

其值同滑移速度的变化相关, 与  $Kn$  数的大小成比例。因而可以认为, 壁面粘性正应力的大小反应的是该处稀薄效应的强度。作用于壁面的法向应力是热力学压强 ( $p$ ) 和粘性正应力 ( $\tau_{rr}$ ) 之和。从分子动理论的观点考虑, 作用于壁面的法向力直接由分子与壁面发生碰撞前后法向动量的差得到。当流动表现出非平衡效应时, 这一法向应力并不等于热力学压强, 而两者之差恰恰反应了非平衡稀薄效应强度。这里将这个反应非平衡稀薄效应强度的法向应力称为非平衡正应力。我们通过基于分子动理论的耦合算法计算了这个非平衡正应力, 并与 Beskok 等基于连续模型的滑移流计算的粘性正应力进行了对比, 见图 8 (c)。从比较结果看, 两者有明显的差异, 说明即使采用滑移边界条件, 可能也并不能够准确描述非平衡效应。

图 9 给出了固定  $Ma$  数为 0.2, 不同  $Re$  数, 亦即不同  $Kn$  数条件下的滑移速度, 剪切应力和非平

衡正应力的分布。很明显，速度滑移量随着 $Kn$ 数的增大而大量增加。最大滑移速度在 $Kn$ 数仅仅为 0.015 时就可达到自由来流速度的 10%。由于滑移速度的存在，剪切应力减小，减小量与速度滑移量成比例。有非平衡正应力作用于壁面，其值随 $Kn$ 数的增大而显著增长。

圆柱阻力是人们很关心的一个话题，它是表面应力的积分效应。图 10 展示了阻力系数随 $Re$ 数和 $Ma$ 数的变化，耦合算法和CFD方法的对比是为了说明稀薄效应的影响。图 10 (a) 为总阻力系数，在不同 $Re$ 数下，CFD方法预测的总阻力系数均随 $Ma$ 数而增大，意味着可压缩作用的增强是使阻力增大的。当考虑稀薄效应的影响后（耦合算法的结果），总阻力系数的变化规律显得比较复杂。在处于相对较大的 $Re$ 数条件下（ $Re > 10$ ），仍然可见总阻力系数随 $Ma$ 数的增加；但是对于相对较小的 $Re$ 数情况（ $Re < 10$ ），总阻力系数的值却随 $Ma$ 数的增

加而明显的减小；在 $Re = 10$ 附近，总阻力系数随 $Ma$ 数变化的影响很小。之所以出现这样的变化趋势，我们认为是由于在 $Ma$ 数变化时，流动可压缩效应和稀薄效应之间在对总阻力的贡献上存在一个竞争关系。一方面，可压缩效应的作用随 $Ma$ 数的增大而增强，它会使总阻力系数变大；另一方面，较大的 $Ma$ 数也意味着较强烈的稀薄效应，这会使阻力减小。稀薄效应对阻力的减小主要由摩阻贡献，见图 10 (b)。考虑到 $Kn$ 数， $Ma$ 数和 $Re$ 数三者的关系（ $Kn \approx \sqrt{\pi\gamma/2}Ma/Re$ ），较小的 $Re$ 数对应着相对较大的 $Kn$ 数，从而意味着较强的稀薄效应。因此，随着 $Ma$ 数的增长，当 $Re < 10$ 时，稀薄效应的作用似乎胜过可压缩效应，因而总阻力系数减小；当 $Re > 10$ 时，则是可压缩效应的作用占优，因而总阻力系数减小；而这两种效应对阻力系数的影响在 $Re = 10$ 附近达到一个平衡。

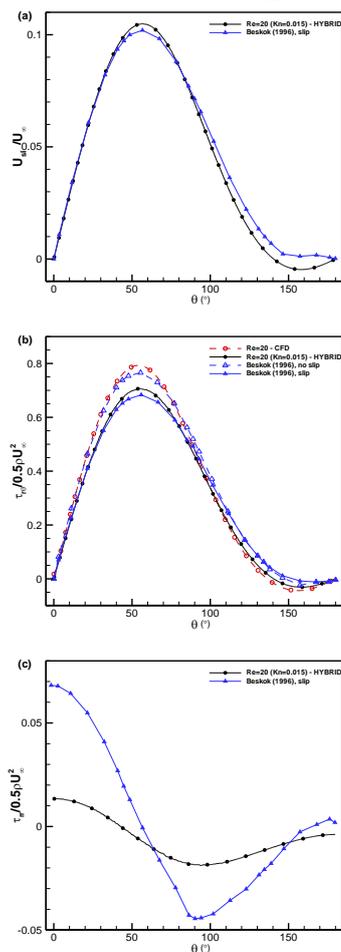


图 8 表面流动物理量与文献 [14] 比较：(a) 滑移速度，(b) 剪切应力，(c) 非平衡（粘性）正应力

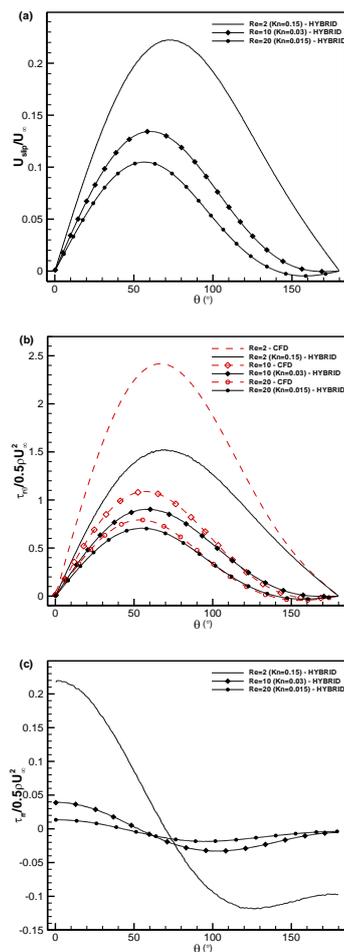


图 9 不同 $Re$ 数和 $Kn$ 数下表面流动物理量：(a) 滑移速度，(b) 剪切应力，(c) 非平衡正应力

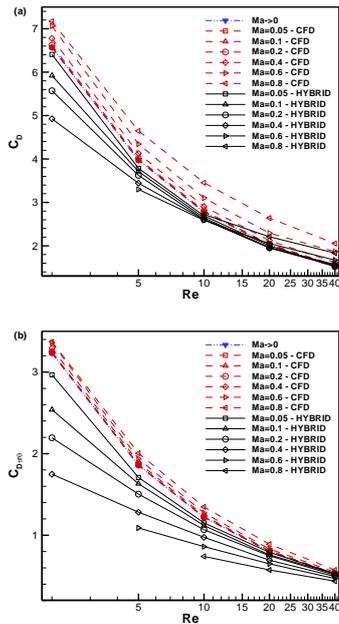


图 10 阻力系数随  $Re$  数和  $Ma$  数变化: (a) 总的阻力系数, (b) 摩擦系数

## 4 结 论

本文采用基于分子动理论的耦合算法和传统的 CFD 方法模拟了微圆柱气体绕流问题, 对其中的可压缩效应以及稀薄效应影响进行了系统地研究, 发现了许多有趣的现象。

气体流动的可压缩性在低  $Re$  数效应作用下会明显增强。当  $Re = 0.01$  时, 即使  $Ma$  数只有 0.05, 流场中的密度变化可高达 1.2, 传统的  $Ma < 0.3$  的不可压缩流动判据失效。同时, 流动的特性, 如表面流动量的分布等, 也会受到可压缩性增强所带来的影响。此外, 低  $Re$  数时, 稀薄效应的作用会在一定程度上削弱流动可压缩性。

流动分离现象受可压缩效应和稀薄效应的显著影响。当不考虑稀薄效应时, 分离涡首先随  $Ma$  数的增加而延长。随着  $Ma$  数继续增加到一个相对较大的值, 流动分离角出现明显增大, 分离推迟, 分离涡长度开始减小。流动  $Re$  数越大, 分离涡长度变化趋势转向所对应的  $Ma$  数越大。对于考虑稀薄效应的流动, 稀薄效应的作用会使分离推迟, 分离涡显著变小, 甚至分离现象消失。

圆柱表面存在速度滑移现象并且  $Kn$  数的增大会引起滑移速度的迅速增加。由于滑移速

度的存在, 剪切应力显著下降, 其减少量与速度滑移量成比例。作用于壁面的法向应力应包括热力学压强和非平衡正应力。非平衡正应力的大小反应稀薄效应的强度。

可压缩效应和稀薄效应对圆柱阻力系数的贡献存在竞争关系。随着  $Ma$  数的增加, 可压缩效应使阻力系数增大, 但稀薄效应的作用恰恰相反。当  $Re < 10$  时, 稀薄效应随  $Ma$  数增加对阻力系数减小的贡献超过可压缩效应增加阻力系数的作用, 因而阻力系数最终表现为随  $Ma$  数增加而减小; 当  $Re > 10$  时, 可压缩效应的作用占优, 因而阻力系数随  $Ma$  数增加而增大; 在  $Re = 10$  附近, 两种效应对阻力变化的贡献似乎达到平衡, 阻力系数随  $Ma$  数变化而基本保持不变。

## 参考文献

- Zdravkovich MM. Flow Around Circular Cylinders. vol. 1. Oxford Univ. Press, 1997
- Ho CM, TAI YC. Micro-electro-mechanical-systems (MEMS) and fluid flows. Annu. Rev. Fluid Mech. 1998, 30:579~612
- GAD-EL-HAK M. The fluid mechanics of microdevices-The Freeman scholar lecture. Trans. ASME: J. Fluids Engng. 1999, 121:5~33.
- Stokes GG. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Camb. Phil. Soc. 1851, 9(2):8~106
- Lamb H. Hydrodynamics, 6th ed. Camb. Univ. Press, 1932
- Proudman I, Pearson JR. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. J. Fluid Mech. 1957, 2:237~262
- Kaplun S. Low Reynolds number flow past a circular cylinder. J. Math. Mech. 1957, 6(5):595~603
- Tritton, DJ. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. J. Fluid Mech. 1959, 6: 547~567
- Huner B, Hussey RG. Cylinder drag at low Reynolds number. Phys. Fluids 1977, 20(8):1211~1218
- Wu MH, Wen CY, Yen RH, Weng MC, Wang AB. Experimental and numerical study of the separation angle for flow around a circular cylinder at low Reynolds number. J. Fluid Mech. 2004, 515:233~260
- Sen S, Mittal S, Biswas G. Steady separated flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. J. Fluid Mech. 2009, 620:89~119
- Sun Q, Boyd ID. Flat-plate aerodynamics at very low Reynolds number. J. Fluid Mech. 2004, 502:199~206

- 13 Gampert B. Low Reynolds number TAC-slip flow past a circular cylinder. In: Rarefied Gas Dynamics. Proceedings of 11th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, vol. 1, 1979. 255~267
- 14 Beskok A, Karniadakis GE. Simulation of heat and momentum transfer in complex microgeometries. *J. Thermo. & Heat Transfer* 1996, 8:647~655
- 15 Bird GA. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Oxford Science Publications, 1994
- 16 Sun Q, Boyd ID, Candler GV. A hybrid continuum/particle approach for modeling subsonic, rarefied gas flows. *J. Comput. Phys.* 2004, 194:256~277
- 17 Hu Y, Sun Q, FAN J. Simulation of gas flow over a micro cylinder. In: ASME 2009 2nd International Conference on Micro/Nanoscale Heat and Mass Transfer, vol. 1, 2009. 119~127
- 18 Lange CF, Durst F, Breuer M. Momentum and heat transfer from cylinders in laminar crossflow at  $10^{-4} \leq Re \leq 200$ . *Int. J. Heat Transfer* 1998, 41:3409~3430.

## The fluid mechanics of gas flow over a micro cylinder

HU Yuan, SUN Quanhua and FAN Jing

State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Rd, Beijing 100190, China

**Abstract** Air flows over a micro cylinder with  $Re$  from 0.01 to 40 and  $Ma$  up to 1 are simulated using both the kinetic-based hybrid and the traditional CFD method. This study has shown great influence of compressible and rarefied effects on the fluid mechanics of cylinder. The compressibility of flow can be enhanced due to low Reynolds number effects, but be weakened by rarefied effects. The length of bubble at the rear of the cylinder exhibits non-monotonic variation with  $Ma$  as a result of compressible effects. Rarefied effects will cause the bubble shrink obviously, and even disappear. The slip velocity and non-equilibrium normal stress on the surface of cylinder caused by rarefied effects have been observed. Moreover, the slip velocity will decrease the shear stress. Finally, it is shown that compressible effects will increase the total drag coefficients, while rarefied effects will cause the adverse effects. There is a competence on the variation of total drag coefficients between the two effects.

**Key words** cylinder flow, low Reynolds number, compressibility, rarefied effects