

无振荡有限紧致格式在理想磁流体方程中的应用研究

刘利, 申义庆

中国科学院力学研究所, 高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190

摘要 尽管理想磁流体力学方程不是严格的双曲型方程, 但由于有与流体力学方程类似的波特征结构, 因而大量的流体力学数值方法已被推广应用于磁流体方程的数值求解。有限紧致格式通过无参数判断解在格式模板上的光滑性, 将流场划分为激波区域与光滑区域, 在激波区域使用激波捕捉格式, 而在光滑区域使用紧致格式, 激波区域的数值通量自动作为紧致格式的边界通量, 从而既能满足无振荡捕捉激波, 而在光滑区又能够获得较高的数值精度。本文发展磁流体流场的无振荡有限紧致格式求解方法, 并通过数值算例验证方法的精度及有效性。

关键词 理想磁流体, WENO 格式, 有限紧致格式

引言

流动中的磁流体力学(MHD)问题在近年来受到越来越多的关注, 特别是 MHD 在热防护、增加进气道流量捕获、提高燃烧室燃烧效率等的研究方面。尽管理想的 MHD 控制方程不是严格的双曲型方程, 但由于有与流体力学方程类似的波特征结构, 因而大量的流体力学数值方法已被推广应用于磁流体方程的数值求解[1-8]。

为了能准确捕捉流场中的激波以及复杂区域的流动小尺度结构, 申义庆等[9-11]提出了有限紧致格式的概念并发展了系列的高分辨率有限紧致格式。其数值通量的构造方法主要是利用有效激波判别, 将传统紧致格式在计算区域上的整体求解划分为有限个光滑区域的局部求解, 激波捕捉格式的数值通量自动作为各个局部区域的边界通量。有限紧致格式的有效性以及精度等已在复杂流动的模拟中得到了验证[9-11]。

本文将结合 E-CUSP 黎曼求解算法, 发展磁流体流场的无振荡有限紧致格式求解方法, 并通过数值算例验证方法的精度及有效性。

1 数值方法

1.1 控制方程

理想 MHD 流体控制方程以向量形式可表示为^[5]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (1)$$

其中:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{V} \\ \mathbf{B} \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{V} \\ \rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p_t \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{V} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{V} \\ (\rho e + p_t) \mathbf{V} - \mathbf{B} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

在笛卡尔坐标系下表示为:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_t - B_x^2 \\ \rho uv - B_x B_y \\ \rho uw - B_x B_z \\ (\rho e + p_t) u - B_x (u B_x + v B_y) \\ u B_x - u B_x \\ u B_y - v B_x \\ u B_z - w B_x \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - B_y B_x \\ \rho v^2 + p_t - B_y^2 \\ \rho v^2 + p_t - B_y^2 \\ (\rho e + p_t)v - B_y(uB_x + vB_y + wB_z) \\ vB_x - uB_y \\ vB_y - vB_y \\ vB_z - wB_y \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - B_z B_x \\ \rho vw - B_z B_y \\ \rho w^2 + p_t - B_z^2 \\ (\rho e + p_t)w - B_z(uB_x + vB_y + wB_z) \\ wB_x - uB_z \\ wB_y - vB_z \\ wB_z - wB_z \end{bmatrix}$$

1.2 E-CUSP 分裂方法

在文[8]中, E-CPSP 算法将通量 E 分裂为如下形式

$$E = fu + P + \varphi u \quad (4)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ p_t - B_x B_y \\ -B_y B_x \\ -B_z B_x \\ -B_x(uB_x + vB_y + wB_z) \\ -uB_x \\ -vB_y \\ -wB_z \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

数值通量 $E_{i+1/2}$ 构造如下:

$$E_{1/2} = a_{1/2} [C^+ f_L + C^- f_R] + [D_L^+ P_L + D_R^- P_R] + \varphi_{1/2} \quad (5)$$

其中:

$$M_{L,R} = \frac{u_{L,R}}{a_{1/2}}$$

$$C^+ = \alpha_L^+ (1 + \beta_L) M_L - \frac{1}{4} \beta_L (M_L + 1)^2$$

$$C^- = \alpha_R^- (1 + \beta_R) M_R + \frac{1}{4} \beta_R (M_R - 1)^2$$

$$\alpha_{L,R}^\pm = \frac{1}{2} [1 \pm \text{sign}(M_{L,R})]$$

$$\beta_{L,R} = -\max[0, 1 - \text{int}(|M_{L,R}|)]$$

$$D_{L,R}^\pm = \alpha_{L,R}^\pm (1 + \beta_{L,R}) - \frac{1}{2} \beta_{L,R} (1 \pm M_{L,R})$$

$$\varphi_{1/2} = \alpha_{1/2} (C^+ + C^-) (D^+ \varphi_L + D^- \varphi_R) \quad (6)$$

1.3 强制输运(Constrained transport)方法

如何满足 $\nabla \cdot B = 0$ 的限制条件是数值求解 MHD 方程的一个难点问题[12,13]。本文采用 Balsara & Spicer 提出的 CT (强制输运) 方法[12]。首先, 电磁感应方程如下:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0 \quad (7)$$

在理想状态下, 电场强度 E 为

$$E = -v \times B$$

在 CT 方法中, 磁场强度 B 沿区域边界取平均值 \bar{B} , 方程 (7) 的半离散形式为:

$$\frac{d\bar{B}_{x_{i-1/2,j,k}}}{dt} = -\frac{E_{z_{i-1/2,j+1/2,k}} - E_{z_{i-1/2,j-1/2,k}}}{\delta y} + \frac{E_{y_{i-1/2,j,k+1/2}} - E_{y_{i-1/2,j,k-1/2}}}{\delta z}$$

$$\frac{d\bar{B}_{z_{i,j,k-1/2}}}{dt} = -\frac{E_{y_{i+1/2,j,k-1/2}} - E_{y_{i-1/2,j,k-1/2}}}{\delta x} - \frac{E_{x_{i-1/2,j,k+1/2}} - E_{x_{i-1/2,j,k-1/2}}}{\delta y}$$

$$\frac{d\bar{B}_{y_{i,j-1/2,k}}}{dt} = \frac{E_{z_{i+1/2,j-1/2,k}} - E_{z_{i-1/2,j-1/2,k}}}{\delta x} - \frac{E_{x_{i,j-1/2,k+1/2}} - E_{x_{i,j-1/2,k-1/2}}}{\delta z} \quad (8)$$

其中,

$$E_{x_{i,j+1/2,k+1/2}} = \frac{1}{4} (G_{7i,j,k+1/2} + G_{7i,j+1,k+1/2} - F_{8i,j+1/2,k} - F_{8i,j+1/2,k+1})$$

$$E_{y_{i+1/2,j,k+1/2}} = \frac{1}{4} (E_{8i+1/2,j,k} + E_{8i+1/2,j,k+1} - G_{6i,j,k+1/2} - G_{6i+1,j,k+1/2})$$

$$E_{z_{i+1/2,j+1/2,k}} = \frac{1}{4} (F_{6i,j+1/2,k} + F_{6i+1,j+1/2,k} - E_{7i+1/2,j,k} - E_{7i+1/2,j+1,k})$$

其中 E_n, F_n, G_n ($n=6,7,8$) 是 E-CUSP 格式 (5) 中的第 n 通量。

二维情况下, 通量可简化为:

$$E_{x_{i,j+1/2}} = -F_{8i,j+1/2}$$

$$E_{y_{i+1/2,j}} = E_{8i+1/2,j}$$

$$E_{z_{i+1/2,j+1/2}} = \frac{1}{4} (F_{6i,j+1/2} + F_{6i+1,j+1/2} - E_{7i+1/2,j} - E_{7i+1/2,j+1}) \quad (9)$$

由于 \bar{B} 是 B 在计算区域的平均值, 因此需要对能量进行修正, 如下公式:

$$\rho e = \rho e + \frac{1}{2} \left((\bar{B}^{n+1})^2 - (B^{n+1})^2 \right) \quad (10)$$

1.4 无振荡有限紧致格式

针对如下的双曲守恒方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

其半离散方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} (h_{i+1/2} - h_{i-1/2})$$

其中 $h_{i+1/2}$ 为数值通量函数。

文[8]中，提出利用 WENO 格式光滑因子之间的关系来判断一个模板是否光滑的引理，即令 $\tau_5 = |IS_0 - IS_2|$ ，当

$$\tau_5 > \min(IS_0, IS_1, IS_2)$$

成立时，模板 S^5 则认为是不光滑的，在此模板上需要使用激波捕捉格式；否则， S^5 则是光滑的，可利用一般的线性格式。其中 IS_0, IS_1, IS_2 为 Jiang & Shu 在文[14]中提出的光滑因子。

利用上述引理构造的有限紧致格式(FC)的具体算法如下[8]：

1. 利用边界公式计算 $h_{1/2}$ 和 $h_{N+1/2}$ ；
2. M=1 (搜索第 M 个可导区域)
 - start_point(M)=1 (M 可导区域的起点)
 - DO i=1,N-1
 - 计算 IS_0, IS_1, IS_2, τ_5
 - IF $\tau_5 > \min(IS_0, IS_1, IS_2)$ THEN
 - end_point(M)=i (M 可导区域的终点)
 - M=M+1
 - start_point(M)=i+1
 - 利用激波捕捉格式计算 $h_{i+1/2}$
 - END IF
 - end_point(M)=N
 - END DO
3. DO k=1,M (对 M 个可导的区域，构造高精度低耗散的通量)
 - DO i=start_point(k),end_point(k)-1
 - 利用紧致格式计算通量 $h_{i+1/2}$

END DO

END DO

在本文中，上述算法用来重构守恒变量 U_L (U_R 的构造与 U_L 按 $i+1/2$ 对称)。其中激波捕捉格式使用了 Borges 等人[15]发展的 WENO-Z 格式，紧致格式则是 6 阶 Pade 格式[16]。

1.5. 时间离散

时间离散本文采用三阶 Runge-Kutta 方法[17]。以下方程为例，

$$\frac{du}{dt} = L(u) \quad (15)$$

三阶 Runge-Kutta 法为：

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(0)} + \Delta t L(u^{(0)}) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^{(0)} + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}) \\ u^{(3)} &= \frac{1}{3}u^{(0)} + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}) \end{aligned} \quad (16)$$

2. 数值算例

2.1 二维周期 Alfvén 波

本算例用来测试 FC 格式在 MHD 光滑流场中的精度，采用[8,12]中相同的计算条件，其计算区域为：

$$0 < x < 1/\cos(\alpha), \quad 0 < y < 1/\sin(\alpha)$$

其中 $\alpha = 30^\circ$ 为 Alfvén 波传播方向与 x 轴的夹角，初始条件 ($t=0$):

$$\rho = 1, \quad p = 0.1, \quad v_{\parallel} = 0, \quad B_{\parallel} = 1$$

$$v_{\perp} = B_{\perp} = 0.1 \sin[2\pi(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]$$

$$w = B_z = 0.1 \cos[2\pi(c \cos \alpha + y \sin \alpha)]$$

其中

$$B_{\perp} = B_y \cos \alpha - B_x \sin \alpha$$

$$B_{\parallel} = B_x \cos \alpha + B_y \sin \alpha, \quad \gamma = 5/3$$

表1是FC格式与WENO-Z格式关于 B_{\perp} 的数值精度比较，计算时间为 $t=5$ 。可以看出，尽管FC最大误差的精度阶有一定波动，但其绝对误差要小WENO-Z格式一个数量级，而从平均误差来看，FC格式基本能达6阶精度。

表 1 WENO 格式和有限紧致格式 Alfvén 波误差

格式	$N_x \times N_y$	L_∞	L_∞	L_1	L_1
		误差	阶数	误差	阶数
1	8×8	$3.01E-2$	—	$1.99E-2$	—
	16×16	$8.93E-4$	5.07	$6.37E-4$	4.97
	32×32	$2.38E-5$	5.23	$1.68E-5$	5.25
	64×64	$7.62E-7$	4.96	$4.99E-7$	5.07
2	8×8	$7.27E-3$	—	$3.26E-3$	—
	16×16	$2.40E-4$	4.92	$6.76E-5$	5.59
	32×32	$2.39E-6$	6.65	$7.86E-7$	6.42
	64×64	$7.54E-8$	4.98	$1.64E-8$	5.58

(其中 1 为五阶 WENO 格式, 2 为有限紧致格式)

2.2 二维 MHD Kelvin-Helmholtz 不稳定性

研究表明 Kelvin-Helmholtz 不稳定性机理在地球磁大气层边界层的动量传递中起着重要的作用[18]。初始条件为:

$$\rho_0 = 1, \quad u = \frac{u_0}{2} \tanh(y/a), \quad v = w = 0$$

$$p_0 = 0.5, \quad B_{x0} = B_{y0} = 0, \quad B_{z0} = 1$$

其中 a 代表速度剪切层的厚度, 并在 $t=0$ 时刻, 引入一个以下形式的小扰动:

$$\tilde{u}_0 = \begin{cases} -\bar{u}_0 \sin(2\pi x/\lambda)/(1+y^2), & -\frac{\lambda}{2} < x < \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

计算区域为 $0 < x < L$, $0 < y < H$, 其中 $u_0 = 2$, $\bar{u}_0 = 0.008$, $L = \lambda = 5\pi$, $H = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 2$ 。X 方向采用周期边界条件, 上边界 $y = H$ 采用自由边界条件, 在下边界 ($y = 0$) 中 ρ , p 和 B_z 对称, u , v 反对称。本文采用 Roberts 变换对 $y = 0$ 附近网格进行加密

$$y = \frac{H \sinh(\tau\eta/2H)}{\sinh(\tau/2)} \quad (17)$$

本文取 $\tau = 6$ 。图 1 和图 2 分别是五阶 WENO 和有限紧致格式的计算结果。

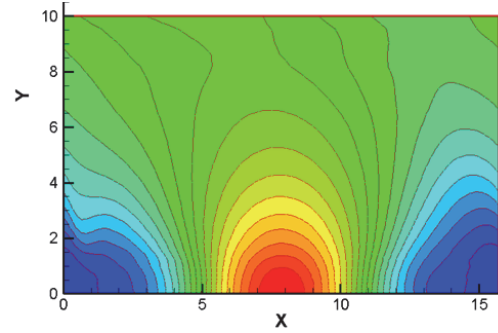


图 1 Kelvin-Helmholtz 不稳定性密度等值线, WENO-Z 格式

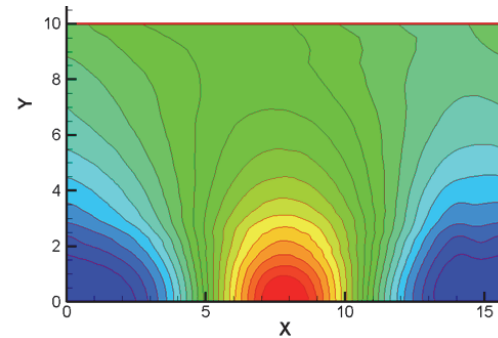


图 2 Kelvin-Helmholtz 不稳定性密度等值线, FC 格式

2.3 Orszag-Tang MHD 湍流问题

Orszag-Tang MHD 湍流问题[19]包含了很多重要的 MHD 湍流特征, 如在涡发展过程中会产生多种激波的相互干扰现象, 因此, 该问题成为 MHD 数值计算的一个标准模型。

初始条件如下:

$$\rho(x, y, 0) = \gamma^2, \quad u(x, y, 0) = -\sin(y),$$

$$v(x, y, 0) = \sin(x), \quad p(x, y, 0) = \gamma$$

$$B_x(x, y, 0) = -\sin(y), \quad B_y(x, y, 0) = \sin(2x)$$

其中 $\gamma = 5/3$ 。计算区域为:

$$0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < 2\pi,$$

本文计算了时间为 $t = 3.0$ 的流场。x 和 y 方向均采用周期边界条件。计算采用 192×192 空间网格点。图 4 和图 5 显示了 WENO-Z 格式和 FC 格式计算的密度等值线, 与 WENO-Z 格式一样, FC 格式能较好地分辨流场中的各种波结构。图 5 是在 $y = \pi$ 随 x 变化的密度曲线对比图, 可看出两种格式结果具有相似分布, 但在极值点处, FC 格式能得到比 WENO-Z 格式更高(或更低)的极值。

参考文献

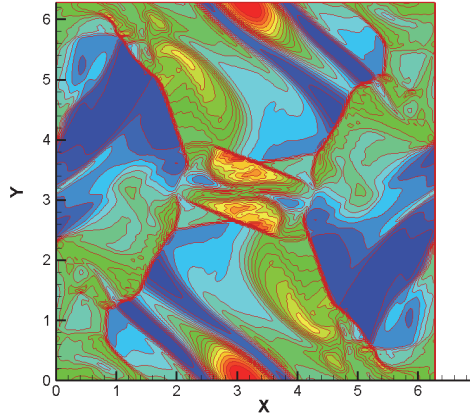


图3 Orszag-Tang MHD 湍流问题密度等值线, WENO-Z

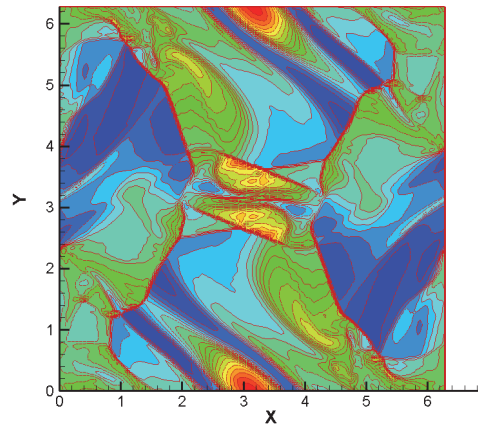


图4 Orszag-Tang MHD 湍流问题密度等值线, FC

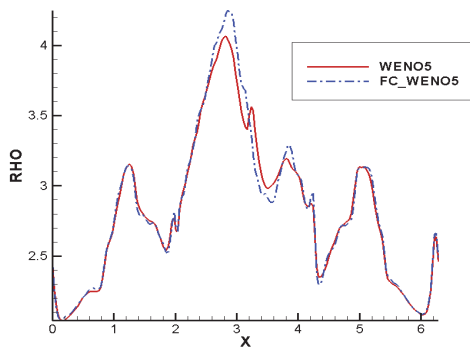


图5 直线在 $y = \pi$ 上的密度分布

3 结 论

本文成功的将有限紧致格式推广应用于 MHD 流场的计算。数值算例, 表明 FC 格式能较好地捕捉流场中的各种激波结构, 而且比五阶 WENO 格式能更好地分辨流场中的波峰和波谷。更多更详细的数值计算及分析正在进行之中。

1. M. Brio, C. C. Wu, An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics* 75 (1988) 400 - 422
2. P. L. Roe, D. S. Balsara, Notes on the eigensystem of magnetohydrodynamics, *SIAM J. Appl. Math.* 56 (1996) 57 - 67
3. K. G. Powell, P. L. Roe, T. J. Linde, T. I. Gombosi, D. L. De Zeeuw, A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics* 154 (1999) 284 - 309.
4. Guang-Shan Jiang, Cheng-chin Wu, A High-Order WENO Finite Difference Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics* 150 (1999) 561 - 594.
5. H.-M. Damevin, K. A. Hoffmann, Development of a modified Runge-Kutta scheme with TVD limiters for ideal three-dimensional magnetogasdynamics, *AIAA* 2001- 2739, 2001
6. D. S. Balsara, D. S. Spicer, A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamics simulation, *Journal of Computational Physics* 149 (1999) 270 - 292.
7. Sang-Hoon Han, Jeong-Il Lee, Kyu Hong Kim, Accurate and Robust Pressure Weight Advection Upstream Splitting Method for Magnetohydrodynamics Equations, *AIAA Journal* 47 (2009) 970 - 981.
8. Shen Y.Q., Zha G.C., Huerta M.A., E-CUSP scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics with high order WENO Scheme, *Journal of Computational Physics*, 2012, 231:6233-6247
9. Shen Y.Q., Yang G.W., Gao Z., High-resolution finite compact difference schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 2006, 216: 114-137.
10. Shen Y.Q., Yang G.W., Hybrid finite compact-WENO schemes for shock calculation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007, 53: 531-560.
11. Shen Y.Q., Zha G.C., Generalized finite compact difference scheme for shock/complex flowfield interaction, *Journal of Computational Physics*, 2011, 230: 4419-4436.
12. G. Toth, The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes, *Journal of Computational Physics* 161 (2000) 605 - 652.
13. C. R. Evans, J. F. Hawley, Simulation of magnetohydrodynamic flows: A constrained transport method, *astrophy. J.* 332 (1988) 659 - 677.
14. Jiang G.S., Shu C.-W., Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comput. Phys.*, 1996, 126: 202-228
15. Borges R., Carmona M, Costa B., Don W.S., An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, 2008, 227: 3191 - 3211.
16. S.K. Lele, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *Journal of Computational Physics*, 1992, 103: 16-42
17. C.-W. Shu, O. Osher, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, *Journal of Computational Physics* 77 (1988) 439 - 471.

18. C. C. Wu, Kelvin-Helmholtz instability at the magnetopause boundary, *Journal of Geophysical Research* 91 (1986) 3042 - 3060.
19. S. A. Orszag, C. M. Tang, Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence, *J. Fluid. Mech.* 90 (1979) 129 - 143.

NON-OSCILLATORY FINITE COMPACT SCHEME FOR THE EQUATIONS OF IDEAL MAGNETOHYDRODYNAMICS

LIU Li, SHEN Yiqing

State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China

Abstract Although the equations of ideal Magnetohydrodynamics (MHD) is a non-strictly hyperbolic system, they have a wave-like structure analogous to that of the hydrodynamics equations, various numerical schemes for hydrodynamics equations have been extended to solve the MHD equations. The finite compact (FC) scheme treats the discontinuity as the internal boundary and avoids the global dependence of the traditional compact schemes. By using a parameter-free shock detecting method, the computational domain is divided into a series of smooth regions and shock wave regions. In the shock wave regions, the shock capturing scheme is used to construct the numerical flux, and in the smooth regions the compact scheme is used, the flux of shock wave region is automatically the boundary formulation of the compact scheme. Hence, the FC scheme can resolve shock essentially non-oscillatory and achieve high order of accuracy in smooth region. This paper develops the non-oscillation finite compact scheme for the ideal MHD equations.

Key words Ideal magnetohydrodynamics, weighted essentially non-oscillatory scheme, finite compact scheme