

不可压缩流体力学问题 关于压力计算的一个算法

于欣

中国科学院力学研究所, 高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190

摘要 本文用[19]中的求解不可压缩 Navier-Stokes 方程的四阶精度交错网格紧致格式(FVC 格式)给出我们在[18]中提出的改进算法的一个算例, 这个对不可压缩 Navier-Stokes 方程的一些有限元方法求解压力的改进算法说明, 速度数值计算到满足速度的误差要求后, 压力只要用一个线性方程计算(即用离散的 N-S 方程求解压力时非线性项不变(用求解速度时算出的速度值计算非线性项))。本文将这个改进算法用到 FVC 格式。FVC 格式动量方程用紧致差分, 连续方程用有限体积法, 时间方向用 Runge-Kutta 方法。Runge-Kutta 法中间层边界处理我们采用一种比传统方式高一阶精度的方法。

关键词 有限体积法, 紧致差分, 不可压缩 Navier-Stokes 方程, 差分格式

引言

不可压缩 Navier-Stokes 方程速度压力分别计算时, 速度算出后, 对压力的方程是线性的, 所以应该能用线性方程计算。[18]中我们对一些有限元方法证明了速度算出后继续用 N-S 方程计算压力时非线性项可以不变(用已经算出的速度计算非线性项一次)。本文将这个改进算法用到不是有限元方法的 FVC 格式。希望这个改进算法能适用于各种速度压力分别计算的格式。

紧致差分格式在差分点不仅用到速度、压力的函数值, 而且用到导数值^{16,17,14,6}, 精度高, 差分点少, 稳定性好, 对高频波的分辨率高, 边界差分点少。对复杂网格, 即使精度不能达到四阶, 也可能有必要采用这样的紧致差分格式。紧致格式的一个应用是湍流直接数值模拟^{13,14}。

非定常粘性不可压缩 Navier-Stokes 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{V}) + \nabla p = 0, \quad (1.1)$$

其中 $\mathbf{A}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nu \nabla^2 \mathbf{V}$

不可压缩连续方程:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1.2)$$

(1.1)(1.2)的显示离散格式:

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} + \nabla_h p^{n+1} = 0 \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div}_h \mathbf{V}^{n+1} = 0, \quad (1.4)$$

其中

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^n - \Delta t \mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n) \quad (1.5)$$

这里时间方向的精度是一阶的。我们在第四部分给出对时间方向的 Runger-Kutta 方法。

1 求解压力的改进算法

不可压缩 Navier-Stokes 方程速度压力分别计算(先后计算)时, 压力用一个 Stokes 方程计算: 速度算出后继续用 N-S 方程计算压力时 $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ 对应的非线性部分不变(用已经算出的速度计算)。 $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ 中 $\nabla \mathbf{V}$ 对应的格式参见(3.5)。

我们也尝试了非线性项一部分不变的情况, 即 $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ 中只是前面的 \mathbf{V} 对应的项不变。这样也同样将 N-S 方程线性化了(求出速度的数值解后用这个近似解和离散的 N-S 方程求解压力时)。算例见后面的图 2。

2 连续方程的离散格式

这部分考虑二维不可压缩问题。在 $e = ((i-1)\Delta x, i\Delta x) \times ((j-1)\Delta y, j\Delta y)$ 上积分(1.2) 得到

$$\int_{\partial e} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\gamma = 0, \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{V} = (u, v)$, 设

$$\bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} u(i\Delta x, y) dy \quad (2.2)$$

$$\bar{v}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} v(x, j\Delta y) dx$$

则(2.1)可以写为

$$\frac{\bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}} - \bar{u}_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\bar{v}_{i-\frac{1}{2},j} - \bar{v}_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\Delta y} = 0, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M \end{matrix} \quad (2.3)$$

以下近似是四阶的

$$\bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}} = u_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{24}(u_{i,j-\frac{3}{2}} - 2u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{1}{2}}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq N-1 \\ 2 \leq j \leq M-1 \end{matrix} \quad (2.4)_1$$

$$\bar{v}_{i-\frac{1}{2},j} = v_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{24}(v_{i-\frac{3}{2},j} - 2v_{i-\frac{1}{2},j} + v_{i+\frac{1}{2},j}) \quad \begin{matrix} 2 < i < N-1 \\ 1 \leq j \leq M-1 \end{matrix} \quad (2.4)_2$$

其中

$$u_{i,j-\frac{1}{2}} = u(i\Delta x, (j - \frac{1}{2})\Delta y)$$

$$v_{i-\frac{1}{2},j} = v((i - \frac{1}{2})\Delta x, j\Delta y)$$

对离散格式用同样的符号则(2.3)(2.4)为连续方程(1.2)的四阶离散格式。

边界上的三阶离散格式为

$$\bar{u}_{i,\frac{1}{2}} = u_{i,\frac{1}{2}} + \frac{1}{18}(2u_{i,0}^\Gamma - 3u_{i,\frac{1}{2}} + u_{i,\frac{3}{2}}) \quad (1 \leq i \leq N) \quad (2.5)_1$$

$$\bar{u}_{i,M-\frac{1}{2}} = u_{i,M-\frac{1}{2}} + \frac{1}{18}(2u_{i,M}^\Gamma - 3u_{i,M-\frac{1}{2}} + u_{i,M-\frac{3}{2}}) \quad (1 \leq i \leq N) \quad (2.5)_2$$

$$\bar{v}_{\frac{1}{2},j} = v_{\frac{1}{2},j} + \frac{1}{18}(2v_{0,j}^\Gamma - 3v_{\frac{1}{2},j} + v_{\frac{3}{2},j}) \quad (1 \leq j \leq M) \quad (2.5)_3$$

$$\bar{v}_{N-\frac{1}{2},j} = v_{N-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{18}(2v_{N,j}^\Gamma - 3v_{N-\frac{1}{2},j} + v_{N-\frac{3}{2},j}) \quad (1 \leq j \leq M) \quad (2.5)_4$$

$$u_{i,0}^\Gamma = u^\Gamma(i\Delta x, 0), u_{i,M}^\Gamma = u^\Gamma(i\Delta x, L^y),$$

$$v_{0,j}^\Gamma = v^\Gamma(0, j\Delta y), v_{N,j}^\Gamma = v^\Gamma(L^x, j\Delta y)$$

\bar{u}, \bar{v} 是积分平均值, 例如

$$\bar{u}_{0,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} u(0, y) dy \quad (2.6)$$

3 交错网格紧致差分格式

考虑二维非定常粘性不可压缩 Navier-Stokes 方程(1.1)(1.2)中的

$$\mathbf{A}(\mathbf{V}) = (uu_x + vv_y - \nu(u_{xx} + v_{yy}), uv_x + vv_y - \nu(v_{xx} + v_{yy}))^T \quad (3.1)$$

$$\nabla p = (p_x, p_y)^T, \operatorname{div} \mathbf{V} = u_x + v_y \quad (3.2)$$

我们考虑(1.1)(1.2)(3.1)(3.2)的差分格式

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n) + \nabla_h p^{n+1} = 0, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div}_h \mathbf{V}^{n+1} = 0, \quad (3.4)$$

其中

$$\mathbf{V}^n = (u^n, v^n)^T,$$

(1) $\mathbf{A}_h(\mathbf{V})$ 中的一阶导数 u_x, u_y 的差分离散为

$$\frac{u'_{i-1,j-\frac{1}{2}} + 4u'_{i,j-\frac{1}{2}} + u'_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{6} = \frac{u_{i+1,j-\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq j \leq M \end{matrix} \quad (3.5)_1$$

$$\frac{u'_{i,j-\frac{3}{2}} + 4u'_{i,j-\frac{1}{2}} + u'_{i,j+\frac{1}{2}}}{6} = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{3}{2}}}{2\Delta y}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq N-1 \\ 2 \leq j \leq M-1 \end{matrix} \quad (3.5)_2$$

(2) $A_h(\mathbf{V})$ 中的二阶导数 u_{xx}, u_{yy} 的差分离散为

$$\frac{u''_{i-1,j-\frac{1}{2}} + 10u''_{i,j-\frac{1}{2}} + u''_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{12} = \frac{u_{i-1,j-\frac{1}{2}} - 2u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2}, \quad (3.6)_1$$

$$\begin{aligned} & (1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq M) \\ & \frac{u''_{i,j-\frac{3}{2}} + 10u''_{i,j-\frac{1}{2}} + u''_{i,j+\frac{1}{2}}}{12} = \frac{u_{i,j-\frac{3}{2}} - 2u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{1}{2}}}{(\Delta y)^2}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq N-1 \\ 2 \leq j \leq M-1 \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.6)_2$$

(3) 压力的一阶导数的差分离散

$$\frac{p'_{i-1,j-\frac{1}{2}} + 22p'_{i,j-\frac{1}{2}} + p'_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{24} = \frac{p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad \begin{matrix} 2 \leq i \leq N-2 \\ 1 \leq j \leq M \end{matrix} \quad (3.7)$$

(4) 连续方程中速度一阶导数的差分离散 (本文主要采用另外的离散格式, 见第二部分)

$$\frac{u'_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} + 22u'_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + u'_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{24} = \frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad \begin{matrix} 2 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq j \leq M \end{matrix} \quad (3.8)$$

(5) 非线性项中的 uv_x 里的 u 用以下插值公式

$$\begin{aligned} & u_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{\tilde{u}_{i-1,j-\frac{1}{2}} + \tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}} + \tilde{u}_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}}{4} \\ & \begin{matrix} 1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M-1 \end{matrix}, \quad (3.9)_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}} = u_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{(\Delta x)^2(u_{xx})_{i,j-\frac{1}{2}} + (\Delta y)^2(u_{yy})_{i,j-\frac{1}{2}}}{8} \\ & \begin{matrix} 0 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M \end{matrix} \quad (3.9)_2 \end{aligned}$$

其中二阶导数的近似可用(3.6)(3.12)(3.13)的结果。

下面给出边界上的差分逼近。我们主要给出 $x=0$ 上的差分方程:

$$\begin{aligned} (1)_1 \quad & (u_x)_{0,j-\frac{1}{2}} = (-v_y^\Gamma)_{0,j-\frac{1}{2}} \\ & (u_x)_{N,j-\frac{1}{2}} = (-v_y^\Gamma)_{N,j-\frac{1}{2}}, \\ & (1 \leq j \leq M) \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1)_2 \quad & u_y \text{ at } y = \frac{3}{4}\Delta y \\ & \text{and } y = L^y - \frac{3}{4}\Delta y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3u'_{i,\frac{1}{2}} + u'_{i,\frac{3}{2}}}{4} = \frac{u_{i,\frac{3}{2}} - u_{i,0}}{\frac{3}{2}\Delta y}, \\ & \frac{u'_{i,M-\frac{3}{2}} + 3u'_{i,M-\frac{1}{2}}}{4} = \frac{u_{i,M} - u_{i,M-\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\Delta y}, \\ & (1 \leq i \leq N-1) \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\text{here } u_{i,0} = u^\Gamma(i\Delta x, 0),$$

$$u_{i,M} = u^\Gamma(i\Delta x, L^y);$$

$$(2)_1 \quad u_{xx} \text{ at } x = \frac{2}{3}\Delta x:$$

$$\frac{u''_{0,j-\frac{1}{2}} + 2u''_{1,j-\frac{1}{2}}}{3} =$$

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{2,j-\frac{1}{2}} - u_{0,j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} - u'_{0,j-\frac{1}{2}} \right),$$

$$(1 \leq j \leq M) \quad (3.12)$$

其中:

$$\begin{aligned} u'_{0,j-\frac{1}{2}} &= -(v_y^\Gamma)_{0,j-\frac{1}{2}} \\ &= -v_y^\Gamma(0, (j-\frac{1}{2})\Delta y) \end{aligned}$$

$$(2)_2 \quad u_{yy} \text{ at } y = \frac{2}{3}\Delta y:$$

$$\begin{aligned} &\frac{5u''_{i,\frac{1}{2}} + u''_{i,\frac{3}{2}}}{6} - \frac{1}{48}(u''_{i,\frac{1}{2}} - 2u''_{i,\frac{3}{2}} + u''_{i,\frac{5}{2}}) \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{2u_{i,0} - 3u_{i,\frac{1}{2}} + u_{i,\frac{3}{2}}}{(\Delta y)^2}, \quad (3.13) \end{aligned}$$

其中 $u_{i,0} = u_{i,0}^\Gamma$

$$(3) \quad p_x \text{ at } x = \Delta x:$$

$$\begin{aligned} &p'_{1,j-\frac{1}{2}} + \frac{p'_{1,j-\frac{1}{2}} - 2p'_{2,j-\frac{1}{2}} + p'_{3,j-\frac{1}{2}}}{24} = \\ &\frac{p_{\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (1 \leq j \leq M) \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$(4) \quad u_x \text{ in } \operatorname{div} \mathbf{V} \text{ at } x = \frac{1}{2}\Delta x,$$

(this is for (3.8)):

$$\frac{2u'_{0,j-\frac{1}{2}} + 15u'_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + u'_{\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}}{18} =$$

$$\frac{u_{1,j-\frac{1}{2}} - u_{0,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (1 \leq j \leq M), \quad (3.15)$$

其中

$$u'_{0,j-\frac{1}{2}} = -(v_y^\Gamma)_{0,j-\frac{1}{2}}$$

$$(5) \quad \text{boundary values of } \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{yy}$$

in (3.9)₂: for $j = 1, 2, \dots, M$,

$$(u_{xx})_{0,j-\frac{1}{2}} = 2(u_{xx})_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (u_{xx})_{1,j-\frac{1}{2}},$$

$$(3.16)_1$$

$$(u_{xx})_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = ((u_x)_{1,j-\frac{1}{2}} - (u_x)_{0,j-\frac{1}{2}})/\Delta x,$$

$$(3.16)_2$$

$$(u_{yy})_{0,j-\frac{1}{2}} = (u_{yy}^\Gamma)_{0,j-\frac{1}{2}}, \quad (3.16)_3$$

其中 $(u_x)_{1,j-\frac{1}{2}}$ 可以由 (3.5)₁, (3.10) 和

$$(u_x)_{0,j-\frac{1}{2}} = -(v_y^\Gamma)_{0,j-\frac{1}{2}}$$
 得到。

以上差分格式中的 u, v, p 的右上角的撇表示导数对应的差分方程中的未知量。

4 非定常问题时间方向离散的 Runger-Kutta 方法

$$\text{定义 } \mathbf{f}(\mathbf{V}) = \mathbf{A}_h(\mathbf{V}) + \nabla_h p,$$

其中 $p = p(\mathbf{V})$ 满足

$$\operatorname{div}_h(\mathbf{A}_h(\mathbf{V}) + \nabla_h p) = 0.$$

这样 \mathbf{f} 就是 \mathbf{v} 的函数。

求解 $\mathbf{V}_t + \mathbf{f}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$ 的四阶 Runger-Kutta 方法为:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} + \\ &\frac{\mathbf{f}(\mathbf{V}^n) + 2\mathbf{f}(\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}}) + 2\mathbf{f}(\bar{\mathbf{V}}^{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{V}}^{n+1})}{6} \\ &= \mathbf{0}, \quad (4.1) \end{aligned}$$

其中:

$$\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{V}^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}(\mathbf{V}^n)$$

$$\bar{\mathbf{V}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{V}^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}(\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}})$$

$$\bar{\mathbf{V}}^{n+1} = \mathbf{V}^n - \Delta t \mathbf{f}(\bar{\mathbf{V}}^{n+\frac{1}{2}})$$

边界上常用

$$\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{V}|_{t=(n+\frac{1}{2})\Delta t}$$

$$\bar{V}^{n+\frac{1}{2}} = V|_{t=(n+\frac{1}{2})\Delta t} \quad (4.2)$$

$$\bar{V}^{n+1} = V|_{t=(n+1)\Delta t}$$

(4.2) 在中间层 (n+0.5 时间层) 精度只有一阶。我们给出如下改进, 精度比(4.2)提高一阶

$$V^{n+\frac{1}{2}} = V^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} \right), \quad (4.3)_1$$

$$\bar{V}^{n+\frac{1}{2}} = 2(V|_{t=(n+\frac{1}{2})\Delta t}) - V^{n+\frac{1}{2}}, \quad (4.3)_2$$

$$\bar{V}^{n+1} = V|_{t=(n+1)\Delta t}, \quad (4.3)_3$$

5 方腔问题数值计算

考虑在顶部受剪切力驱动的二维方腔流动。控制方程为(1.1)(1.2)(3.1)(3.1), 计算区域为 $0 < x < 1, 0 < y < 1$, 边界上的速度:

上边界(y=1)上速度 $u=1, v=0$, 其他边界上速度均为零。

$$\Delta x = 1/N, \Delta y = 1/M,$$

$$M = N, Rc=1/\nu$$

FVC 格式连续方程用第二部分的离散公式。

[19]中的数值结果证实了FVC格式的高精度。

取 $Re=100, N=M=16$.

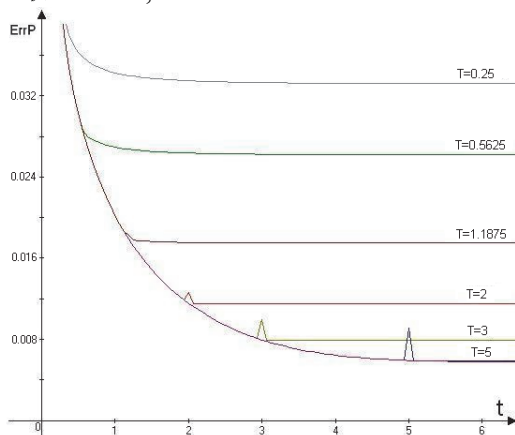


图 1. 用 N-S 方程计算到 $t=T$ 时压力置零且非线性项不变, 继续计算, 压力的误差的曲线

图 1 是用 N-S 方程计算到 $t=T$ ($T=0.25, 0.5625, 1.1875, 2, 3, 5, 8$) 时压力置零(初始化)且 $(V \cdot \nabla)V$ 对应的非线性部分不随 t 改变(用已经算出的速度计算非线性项)继续计算的压力的误差曲线, $Re=100, N=M=16$ 。压力的误差 ErrP 是压力与网格增加 (x, y 方向均加倍) 后计算出的压力的差 (所有点差的平方和除以压力的网格点数 再开方。网格增加后 (x, y 方向均加倍) 到原来网格上压力插值计算公式精度: 内部四阶, 边界上 3 阶)。

图 1 中 $t=T$ (>1.5) 时误差的一个‘尖’是由于压力置零导致的。压力置零是为了模拟在 $t=T$ 时刻开始计算压力时不知道压力值(只知道速度值)的情况。

从图 1 可以看出, 从 $t=5$ 开始用线性方程计算(图中 $T=5$ 的曲线)与非线性方程计算结果误差相当接近。在一定程度上说明这样的改进算法是成功的, 既节省了计算量(将非线性问题转化为线性问题)又保证了计算精度。

我们也试算了非线性项一部分不变的情况, 即 $V \cdot \nabla V$ 中只是前面的 V 对应的项不变, 见图 2。从图中可以看出, 计算结果比非线性项全部不变的情况有所改善。

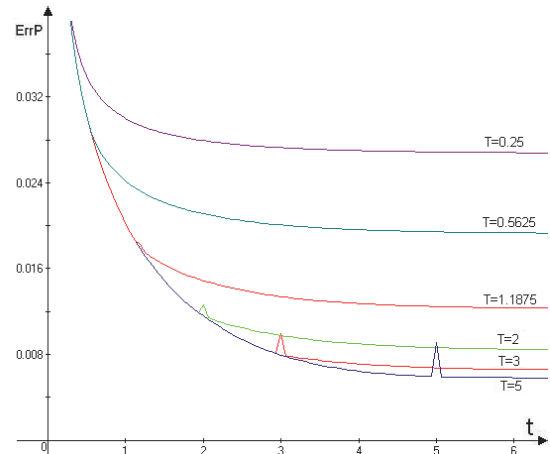


图 2. 用 N-S 方程计算到 $t=T$ 时压力置零且非线性项一部分不变, 继续计算, 压力的误差的曲线

文[19]勘误: 文[19]的(1.3),(3.9)应该与本文(1.3),(3.9)一致。

本文内容更新: 网址: <http://www.yuxin.net/FVC2012>

作者: 于欣, yu@imech.ac.cn, www.yuxin.net, 010-82545673

参考文献:

1. C. H. Bruneau, C. Jouron, An efficient scheme for solving steady incompressible Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, **89**, 389(1990).
2. U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, **48**,387(1982).
3. F. H. Harlow, J. E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, **8**(12), 2182(1965).
4. LIU Hong, FU Dexun, MA Yanwen, Hopf bifurcation of the driven flow in a square cavity, *Theories, Methods and Applications of Computational Fluid Mechanics*, (Science Press, Beijing, 1992), 267–270.
5. N. Baba, H. Miyata, H. Kajitani, *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, **159**, 33(1987).
6. S. Abdallah, Numerical solutions for the incompressible Navier–Stokes equations in primitive variables using a non-staggered grid II, *J. Comput. Phys.*, **70**, 193(1987).
7. Linbo ZHANG, A multigrid method for solving the steady Navier–Stokes equations, *Doctoral Dissertation*, (11st University of Paris, Orsay, 1987 (unpublished)), p. 189.
8. YU Xin, A staggered mesh compact difference scheme and a pressure–Poisson–equation that satisfies the equivalency, *Chinese J. of Numerical Mathematics and Application* **19**(2), 73(1997), see <http://www.imcas.cn/yu/ppe/>
9. R. Peyret, T. D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow*, (Springer–Verlag, New York/Berlin, 1983), p.358.
10. Mark H. Carpenter, David Gottlieb, Saul Abarbanel, Wai-Sun Don, The theoretical accuracy of Runge–Kutta time discretizations for the initial boundary value problem: a study of the boundary error, *SIAM J. Sci. Comput.* **16**, 1241(1995).
11. LIU Hong, FU Dexun, MA Yanwen, Upwind compact schemes and direct numerical simulations of the driven flow in a square cavity, *Science in China, Series A (Chinese Edition)*, **23**(6), 657(1993).
12. YU Xin, An iterative–pressure–Poisson–equation–method for solving unsteady incompressible N–S equations, *Chinese J. of Numerical Mathematics and Application*, to appear, see <http://www.imcas.net/yu/ipp/>, (Chinese version: *Mathematica Numerica Sinica*, **23**(4), 447(2001)).
13. LI Xinliang, MA Yanwen, FU Dexun, High efficient method for incompressible N–S equations and analysis of two-dimensional turbulent channel flow, *Acta Mechanica Sinica*, **33**(5), 577(2001)
14. L. Gamet, F. Dackos, F. Nicoud, et. Al., Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **29**, 159(1999).
15. YU Xin, Nonuniform mesh three point fourth order accurate compact difference schemes, Proc. of the 10th China Conference on Computational Fluid Mechanics, Sept 2000, Mianyang, China
16. M. Ciment, S. H. Leventhal, Higher order compact implicit schemes for the wave equation, *Mathematics of Computation*, **29**,985(1975).

17. Bernardo Cockburn, Chi-Wang Shu, Nonlinearly stable compact schemes for shock calculations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **31**, 607(1994).

18. 于欣,解不可压缩流体力学问题的降阶法 II. 空间 V^h 的基函数和误差估计, 计算物理,3(2), 217-226(1986), <http://www.yuxin.net/yuxin/paper/div2.htm>

19. 于欣, 不可压缩 N-S 方程的 FVC 紧致格式, 高温气体动力学研究进展, 120-126 (2011), <http://www.yuxin.net/FVC>