

基于非结构四边形背景网格的各向异性自适应求解算法研究

郑洪伟

中国科学院力学研究所, 高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190

摘要 复杂几何外形问题中多尺度及各向异性的特征的捕捉, 对于计算结果的精确性有很大的意义。本文发展了基于非结构化四边形背景网格的各向异性的自适应网格生成方法, 能容易生成高质量的贴体自适应网格, 同时占用内存少、效率高的优点, 并且能容易捕捉各向异性的特征。本文详细阐述了具体的数据结构和自适应算法, 最后应用 NACA0012 翼型绕流问题的数值模拟来考察发展的自适应算法。

关键词 非结构化四边形背景网格, 各向异性, 自适应网格, NACA0012 翼型

引言

随着计算机技术的迅猛发展, 现在计算流体力学的能力也越来越强。尽管如此, 对于很多复杂外形的复杂流动, 其流动现象(如激波、边界层及多介质界面不稳定等)一般具有多尺度及各向异性的特征。为了精确模拟和捕捉这些流动特征, 传统的网格生成技术很难胜任。比如, 对于多介质流体的界面的捕捉, 如果网格没有达到足够密的情况下, 很难捕捉到界面不稳定性引起的小涡。这就要求发展能够自适应网格生成技术。

自适应网格中一大类是笛卡儿网格[1-3]。它具有快速自动生成的优点。但是它也有其致命缺点, 那就是边界很难精确拟合, 因此边界处理精度不高。另外一大类是是非结构化背景网格的各向异性的自适应网格生成方法[4-6]。比如基于三角形和四面体的自适应网格生成方法[4]。这种方法, 很容易产生质量很差的网格, 比如对一个三角形某个顶点陆续加密几次后, 会导致这个三角形偏斜度特别大。

因此, 本文发展了基于非结构化四边形背景网格的各向异性的自适应网格生成方法。由于是基于非结构化背景网格下的自适应方法, 因此可以生成贴体网格, 这样很容易解决复杂几何外形的问题, 也就没有笛卡儿网格边界处理的问题。另外, 由于它是基于非结构四边形的自适应, 不会导致网格质量问题。除此外,

本自适应网格方法具有占用内存少的优点。此方法一大特点是, 所有单元的面是按照有非加密分别存储在两个不同列表里, 这样就可以用上基于边的算残量方法, 也就是只算没有加密的边的通量, 然后同时更新这个面的左右单元的残量。我们知道, 有限体积法的计算量主要集中在面的通量的计算上, 因此这样做的结果是极大的减少了计算量, 提高了计算效率。此方法另外一大特点是, 各个不同层的单元也存储在不同的列表里, 因此求解方程可以只在最底层的单元中进行, 而上面各个层的单元的解只要从各自下层单元的解通过守恒律直接得到。本文应用 NACA0012 翼型绕流问题的数值模拟来考察发展的自适应算法, 对压力分布、激波位置及升阻力与其它结果进行了细致的比较, 结果表明, 它能捕捉各向异性的流场特征, 另外其结果与其它结果很吻合。

1 数据结构及自适应网格生成方法

本方法是基于非结构化背景网格的各向异性的自适应网格生成方法。如图 1 所示, 单元 A、B 和 C 构成了非结构化的背景网格。单元 D 和 E 是在单元 A 的基础上沿一个方向的加密。单元 F 和 G 是在单元 C 的基础上沿另外一个方向的加密。单元 D 继续沿图中所示方向加密, 可以得到单元 H 和 I。

为了提高效率和减少内存, 我们采用面向对象编程方法, 抽象出点、边和面三类对象来

保存网格数据(如图 2 所示)。并且,这三类对象均继承自一个几何类对象。这样做的好处是对这三个继承类的对象的增加或者删除操作都可以调用基类(几何类)同一个操作来完成。为了记录不同方向的加密信息,单元还添加了不同方向加密层数得信息 $level_i$ 和 $level_j$ 。对于边,为了使用基于边的有限体积法,这里边的数据结构存储了指向左右单元和子边的指针。而且为了追溯边的加密历史,还保存了指向子边的指针。

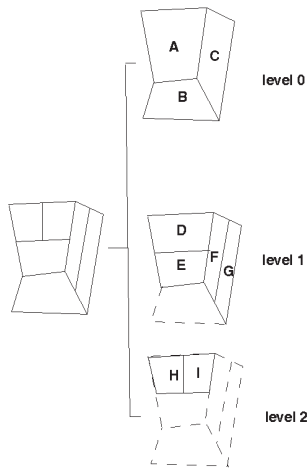


图 1 自适应网格存储示意图

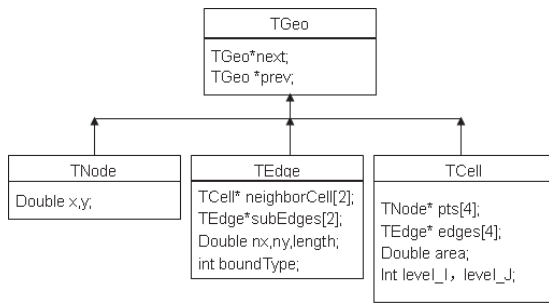


图 2 数据结构

有了这些基本对象的数据结构,整个网格就是这些对象的集合,具体就是由下面几个动态列表组成:一个点的动态列表;然后是 n 个单元列表(n 代表层数),分别存储各个层的单元,如图 1 所示;最后是两个边的列表,分别存储“叶”边(也就是没有子边的边)和非“叶”边(也就是有子边的边)。这样存储边可以极大提高计算效率,因为非“叶”边的通量是不用计算的。

有了这些数据结构,我们就可以追溯整个加密和稀疏过程的历史。因此可以很容易实现加密和稀疏网格的生成。图 3 是一个方向加密和稀疏的示意图。

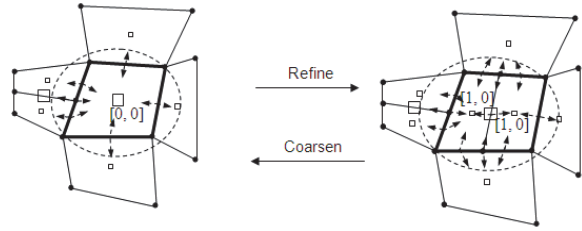


图 3 一个方向加密和稀疏的示意图

2 自适应求解方法

从上面对数据结构和存储方法的叙述,我们可以知道,各个不同层的网格单元是存储在不同的列表里,因此求解方程可以只在最底层的单元中进行,而上面各个层的单元的解只要从各自下层单元(如图 4 中 A 和 B 单元)的解通过守恒律直接得到。

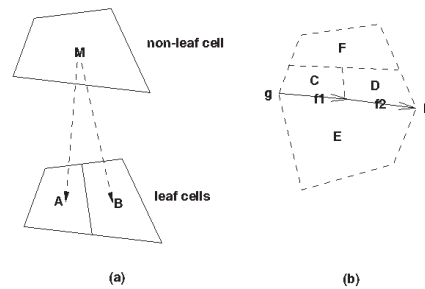


图 4 网格单元上的求解

为了说明方便,本文主要针对 Euler 方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U dV + \oint_{\Gamma} F^c(U, \vec{n}) dS = 0 \quad (1)$$

其中 Γ 为控制体 Ω 的表面, \vec{n} 是控制体表面的外法向。 U 为守恒变量, F^c 为非粘通量,

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{u} \\ E \end{pmatrix}, F^c = u_n U + \begin{pmatrix} 0 \\ p \vec{n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

上式中, ρ 是密度, u 是速度, p 是压力。

这里先介绍各个“叶”网格单元(也就是没有子单元的单元,如图 4 中 A 和 B 单元)上的方程得求解。在每个网格单元 c , 方程(1)可以离散成如下形式,

$$U_c^{(*)} = U_c^n - \frac{\Delta t}{A_c} \text{Res}(U_c^n) \quad (2)$$

$$U_c^{n+1} = \frac{1}{2}U_c^n + \frac{1}{2}U_c^{(*)} - \frac{\Delta t}{2A_c} \text{Res}(U_c^{(*)})$$

其中残量 Res 可以表示为

$$\text{Res} = \sum_f \Phi_f(U^-, U^+, \vec{n}) \cdot \Delta l_f$$

上式中 Δl_f 、 Φ_f 分别表示边 f 的长度和数值通量。本文中， Φ_f 使用 HLLC 格式。

我们知道，有限体积法的计算量主要集中在边的通量的计算上。如果是按照单元区计算残量，那么由于边被左右两个单元共享，这样要么重复计算要么要存储这个边的数值通量。

因此，残量 Res 在本方法里换一个计算方式，也就是采用基于边的计算方法，

$$\text{Res}_{f \rightarrow L} = \text{Res}_{f \rightarrow L} + \Phi_f(U^-, U^+, \vec{n}) \cdot \Delta l_f$$

$$\text{Res}_{f \rightarrow R} = \text{Res}_{f \rightarrow R} - \Phi_f(U^-, U^+, \vec{n}) \cdot \Delta l_f$$

其中， $f \rightarrow L/R$ 表示边 f 的左或右单元。

采用上面的基于边的计算方法，可以较少内存和提高计算效率。因此，在设计数据存储时候，本自适应方法就把所有边按照有非加密分别存储在两个不同列表里。这样，只要算没有加密的边的通量，然后同时更新这个边的左右单元的残量。

对于各个非“叶”单元（也就是有子单元的单元，如图 4 中 M 单元）上的方程得求解，不用重新计算此单元各个边上的数值通量，只要把各个子单元的残量加起来作为这个单元的残量，然后采用方程(2)更新单元的解。

3 算例分析

为了验证本方法，这里对 NACA0012 翼型的经典算例进行计算。这里采用文献[3]中参数(攻角 $\alpha=1^\circ$, $Ma=0.85$)，并采用两层自适应计算网格来计算。背景网格如图 5 所示。为了更加清晰的看清 NACA0012 翼型周围网格，这里也给出局部放大图(见图 6)。从图中容易看出,这里的背景网格是贴体的。

最后的自适应网格局部放大图见图 7。从中可以明显看出，机翼上面都有一个的各向异性加密网格。这正好反映了流场中上下都有一道很强激波的重要特征。另外，在壁面附近的剪

切层也被流向加密的加密网格捕捉到。

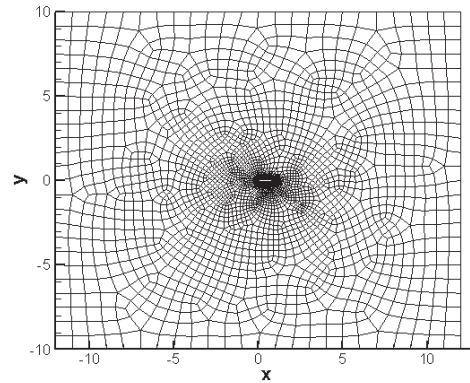


图 5 背景网格

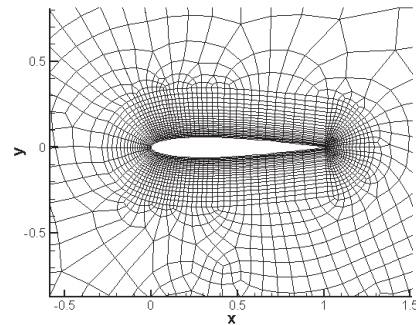


图 6 放大的背景网格

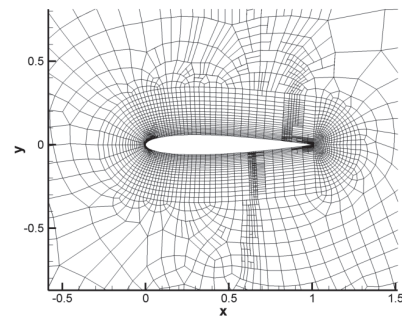


图 7 最后的网格局部放大图

计算所得的压力分布曲线如图 8 所示。从图中可以知道，计算的曲线基本与最小二乘法计算（文[7]）的结果很接近。激波位置分别是 0.855 和 0.63，与文[1]中的结果 0.861 和 0.627 很接近。另外，升力和阻力系数分别是 0.362988 和 0.0582487。这个结果也与其他人

的结果比较接近，如文[1]中的 0.3757 和 0.0595, 文[3]中的 0.3682 和 0.0599, 文[7]中的 0.3881 和 0.0556。

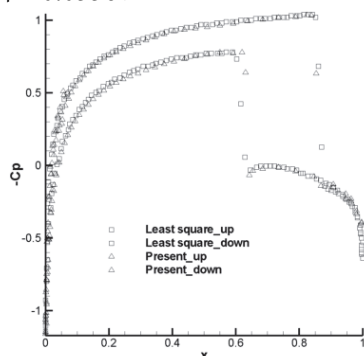


图 8 压力分布

4 结 论

本文发展了“基于非结构化四边形背景网格的各向异性自适应求解器”，对数据结构、存储方法和自适应算法。本文选用了 NACA0012 作为标准算例，对我们自己计算所得的压力分布、激波位置升力系数，都与其他计算结果吻合，反映了本方法的可靠性。

参考文献

- 1 Zeeuw, D. De and Powell, K. G., An Adaptive Refined Cartesian Mesh Method for the Euler Equations, *J. Comput. Phys.* 104 (1993) 56–68.
- 2 Berger, M.J. and LeVeque, R., Adaptive mesh refinement for two-dimensional hyperbolic systems and the AMRCLAW software, *SIAM J. Numer. Anal.* 35 (1998) 2298-2316.
- 3 Wang, Z.J., A Quadtree-based adaptive Cartesian/Quad grid flow solver for Navier-Stokes equations, *Computers & fluids* 27 (1998) 529-549.
- 4 Habashi WG, Dompierre J, Bourgault Y, Ait-Ali-Yahia D, Fortin M, Vallet MG. Anisotropic mesh adaptation: towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part II: Structured meshes, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids* 39(2002) 657–673
5. H. W. Zheng, C. Shu and Y.T. Chew, An Object-Oriented and Quadrilateral-mesh based Solution Adaptive Algorithm for Compressible Multi-fluid Flows, *Journal of Computational Physics*, 227(2008)6895–6921.
6. H. W. Zheng, N. Qin, F. Nicolleau, and C. Shu, A quadrilateral-mesh based anisotropic solution adaptive solver for Euler equation, *Communications in Computational Physics*, 9,1,(2011)68-88.
7. Sridar, D., and Balakrishnan, N., An upwind finite difference scheme for meshless solvers, *J. Comput. Phys.* 189 (2003) 1–29.

INVESTIGATION ON SOLUTION ADAPTIVE METHOD BASED ON UNSTRUCTURED QUADRILATERAL-CELL BACKGROUND MESH

ZHENG Hongwei

State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China

Abstract To resolve the multi-scale anisotropic flow features under the complex geometry, it is the key to keep a relative high order of accuracy. This article is to develop an anisotropic solution adaptive method based on unstructured quadrilateral meshes. As compared to the traditional methods, the method generates a body-fitted adaptive mesh to capture the anisotropic flow features. This greatly reduces the memory, as well as increases the efficiency. The data structures as well as the adaptive procedures are described. The flow over NACA0012 is provided to show that it could be used to resolve the anisotropic flow features and be applied to model the complex geometry as well as to keep a relative high resolution on an efficient anisotropic mesh.

Key words Unstructured quadrilateral-cell background mesh, anisotropic, adaptive mesh, NACA0012 airfoil