

# 间断 Galerkin 法对前台阶绕流问题的研究

赵文赓, 郑洪伟

中国科学院力学研究所, 高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190

**摘要** 相对于有限差分法, 间断 Galerkin 方法可以很容易的运用于非结构网格, 并且在边界上通量的计算只需要相邻两个单元的信息, 因此在处理复杂的边界问题时具有很大优势。本文采用基于三角形非结构网格的间断 Galerkin 方法计算前台阶绕流问题, 用分片线性的多项式近似精确解, 采用龙格库塔法进行时间推进。从计算结果可以清晰地观察到流场建立的过程。

**关键词** 前台阶绕流, 间断 Galerkin, 龙格库塔法, 非结构网格

## 引言

间断有限元方法的出现, 最早可以追溯到 1973 年 Reed 和 Hill 关于中子输运方程问题的论文。之后, 在解决含有间断现象的问题中发挥着越来越大的作用, 它被广泛地应用到了水动力学, 气动力学, 波传播等问题。

DG 方法在很多方面有突出的优点, 使得该方法引起很多学者的关注。首先, DG 中, 精度的提高是通过适当选取基函数, 即提高单元插值多项式的次数来实现, 这克服了有限体积法 (FVM) 中通过扩大基架点数目 (比如 k-exact, ENO, WENO) 来提高精度的不足; 其次, 由于近似解的间断性假设, 这使得 DG 容易运用于非结构网格中, 易于处理复杂边界和边值问题, 并且间断性假设导致不需要考虑连续性的限制条件就可以对网格进行加密或减疏处理, 而且不同单元可以采用不同形式、不同次数的逼近多项式, 有利于自适应网格的形成; 通过适当地选取基函数, 可以使得质量矩阵是分块对角的, 而且每一块的阶数和相应单元的自由度相同, 并且在每一步 Runge-Kutta 计算中, 为了求解给定单元内部的自由度, 只需要相邻单元的自由度, 从而处理器之间的信息传递量保持最小, 有利于并行算法的实现<sup>[1]</sup>。

## 1 间断 Galerkin 方法

### 1.1 控制方程

以二维无粘守恒型的欧拉方程为例

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

上式的矢量形式为:

$$\mathbf{U}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0,$$

其中  $\mathbf{U}$  是状态变量,  $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$ , 具体为,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}.$$

这里,  $\rho$ 、 $u$ 、 $v$ 、 $p$ 、 $E$  分别表示气体密度,  $x$  方向的速度分量,  $y$  方向的速度分量, 压强, 以及单位体积上的总能量。为了使方程组封闭, 需要加入理想气体状态方程:

$$p = (\gamma - 1) \left[ E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right].$$

### 1.2 离散格式

#### 1.2.1 空间离散

控制方程 (1) 乘以试函数  $\varphi$ , 并在域  $\Omega$  内积分, 然后分部积分得到弱形式:

$$\int_{\Omega} \varphi \mathbf{U}_t dV + \oint_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{F} dV = 0$$

将求解域离散为若干互不重叠的单元, 并在每个单元  $T_i$  内采用加权余量形式的积分得到

半离散的格式。假设解和试函数都是分片多项式的形式。多项式的基底可以表示为

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) = \{\xi_1(\mathbf{r}), \dots, \xi_n(\mathbf{r})\}^T.$$

在单元  $T_i$  内，解表示为：

$$\mathbf{U}_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^n Q_i^j(t) \xi_j(\mathbf{r})$$

另外取试函数为基函数，带入分部积分的弱形式中得到：

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} \xi_j \sum_{k=1}^n Q_i^k(t) \xi_k(\mathbf{r}) dV + \oint_{\partial T_i} \xi_j \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{T_i} \nabla \xi_j \cdot \mathbf{F} dV = 0$$

也就是

$$\sum_{k=1}^n \int_{T_i} \xi_k \xi_j \frac{dQ_i^k(t)}{dt} dV + \int_{\partial T_i} \xi_j \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{T_i} \nabla \xi_j \cdot \mathbf{F} dV = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

令

$$M_{kj} = \int_{T_i} \xi_k \xi_j dV$$

那么，我们有

$$M_{kj} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n Q_i^k(t) + \int_{\partial T_i} \xi_j \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{T_i} \nabla \xi_j \cdot \mathbf{F} dV = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

最后，可以写成下面形式，

$$M \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \oint_{\partial T_i} \boldsymbol{\xi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{T_i} \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F} dV = 0$$

其中，

$$\mathbf{Q} = \{Q_i^1, \dots, Q_i^n\}^T.$$

将单元矩阵叠加到整体矩阵中，上式变为：

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = R(\mathbf{Q})$$

其中  $R(\mathbf{Q})$  为余量，在单元  $T_i$  内其表达式为：

$$R(\mathbf{Q}) = -M^{-1} \left( \oint_{\partial T_i} \boldsymbol{\xi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{T_i} \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F} dV \right)$$

由于插值函数在单元的边界上是间断的，因而需要确定单元边界上的流通量。在半离散的方程中，流通量函数  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  用数值流通量函数  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+, \mathbf{n})$  代替。其中， $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+, \mathbf{n})$  取决于  $\mathbf{U}_h^-$ 、 $\mathbf{U}_h^+$  和  $\mathbf{n}$ ，并且要满足一致性条件，即： $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+, \mathbf{n}) = -\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+, -\mathbf{n})$ 。

$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+, \mathbf{n})$  可以有不同的形式，本文采用 Lax-Friedrichs 通量<sup>(2)</sup>。

$$\hat{\mathbf{F}}(a, b) = \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{F}}(a) \cdot \mathbf{n} + \hat{\mathbf{F}}(b) \cdot \mathbf{n} - \alpha(b-a)]$$

其中， $\alpha$  是 Jacobian 矩阵在对应边界上的最大特征值，其表达式为：

$$\alpha = \max \left( |\mathbf{u}^L \cdot \mathbf{n}| + \sqrt{\gamma \frac{\rho^L}{\rho^L}}, |\mathbf{u}^R \cdot \mathbf{n}| + \sqrt{\gamma \frac{\rho^R}{\rho^R}} \right)$$

上式中， $\mathbf{u}$  为边界上的速度矢量， $\mathbf{n}$  为边界外法线方向矢量。

通过以上分析可以知道，在空间离散中，需要计算的积分项有三部分<sup>[3]</sup>：

$$I_1 = \oint_{\partial T_i} \xi_j \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{r=1}^K \int_{A_r} \xi_j \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$I_2 = \int_{T_i} \nabla \xi_j \cdot \mathbf{F} dV$$

$$I_3 = \int_{T_i} \xi_k \xi_l dV$$

积分都是采用高斯数值积分来计算，其中  $I_3$  表示质量矩阵  $\mathbf{M}$ ，与流场解向量无关，可以事先计算好并保存。

对于  $I_1$ ，在边界上利用高斯数值积分有：

$$\int_{A_r} \xi_j \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_{s=1}^{ns} w_{rs} \xi_j(\mathbf{r}_{rs}) \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}^L(\mathbf{r}_{rs}), \mathbf{U}^R(\mathbf{r}_{rs}), \mathbf{n}_r) A_r$$

单元  $T_i$  内的积分  $I_2$  为：

$$\int_{T_i} \nabla \xi_j \cdot \mathbf{F} dV \approx \sum_{s=1}^{mv} w_s \nabla \xi_j(\mathbf{r}_s) \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_i(\mathbf{r}_s)) V_i$$

$K$  表示单元内的边界数， $ns$  表示单元边界积分上的积分点数， $mv$  表示单元内的数值积分点数， $w_{rs}$  和  $w_s$  为高级积分权， $\mathbf{r}_{rs}$  和  $\mathbf{r}_s$  为高斯积分点<sup>(4)</sup>。

### 1.2.2 时间离散

利用显式龙格库塔格式进行时间离散。引入质量矩阵之后，方程变为常微分方程。由于函数  $\varphi$  是间断的，质量矩阵是分块对角阵；如果选择局部正交基底，质量矩阵就是对角阵。为了在时间上获得高阶的精度，使用 TVD 龙格库塔时间离散。用迭代法进行时间推进，比较容易编程实现。

例如，如果想获得三阶的时间精度，相应的龙格库塔格式为：

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^n + \Delta t R(\mathbf{Q}^n)$$

$$\mathbf{Q}^{(2)} = \frac{3}{4} \mathbf{Q}^n + \frac{1}{4} [\mathbf{Q}^{(1)} + \Delta t R(\mathbf{Q}^{(1)})]$$

$$Q^{n+1} = \frac{1}{3}Q^n + \frac{2}{3}\left[Q^{(2)} + \Delta t R(Q^{(2)})\right]$$

有文献指出，对于高雷诺数定常粘性流动，为了准确模拟边界层，壁面附近的网格间距必须很小。此时，如果采用显式格式进行时间离散，将会因稳定性条件限制，而使时间步长过小，以致需要花费大量计算机时间收敛于定常解。因此，通常采用隐式计算方法来提高数值求解效率。可以借鉴非结构网格有限体积 LU-SGS 隐式计算格式，构造适用于间断 Galerkin 有限元法的 LU-SGS 隐式计算格式。<sup>(5)</sup>

### 1.3 限制器

高阶数值格式在间断附近处会产生数值振荡，从而导致数值不稳定，严重时可能无法继续求解。虽然一阶精度格式是惟一能够在间断处产生单调解的方法，但是它存在数值耗散过大的缺点；当采用高阶 DG 时，即使在单元边界选择合适的近似黎曼通量函数，也不能很好的避免数值振荡的存在。由于目前对限制器的研究还处在不断的探讨过程中，至今没有形成很成熟稳定的限制器。<sup>(4)</sup> 下面介绍几种限制器。

#### (1) 方程组特征分量限制算子

在时间推进算法中引入斜率限制器  $A\Pi_h$ 。Cockburn 和舒启望在 Euler 方程计算中按照如下的思想给出了一种实用的  $A\Pi_h$ ，只有当伪震荡出现在一阶的解  $u_h^1$  中的  $P^1$  中时，才会出现震荡。如果  $u_h^1$  中不存在震荡，即，如果  $u_h^1 = A\Pi_h u_h^1$ ，假设不存在震荡，不需要进行限制， $u_h = A\Pi_h u_h$ ；如果在  $u_h^1$  的  $P^1$  中存在震荡，即，如果  $u_h^1 \neq A\Pi_h u_h^1$ ，则将高阶的数值解去掉并限制余下的  $P^1$  部分， $A\Pi_h u_h = A\Pi_h u_h^1$ 。

#### (2) 单调限制器

在非结构化网格中，没有坐标方向来定义特征向量，因此很难在多位系统中设计基于特征变量的限制器。此处，选择特定组件方法 (component-wise approach) 的限制器。建立单调准则  $\bar{Q}_i^{\min} \leq Q_i(r_s) \leq \bar{Q}_i^{\max}$ 。如果对于所有的正交点，该准则都不满足，那么该单元处于间断附近，单元内的解变为局部线性的  $Q_i(r) = \bar{Q} + \nabla \cdot (r - r_i)$

为了使得上式满足单调性准则，加入标量形式的限制器  $\varphi \in [0, 1]$

$$Q_i(r) = \bar{Q} + \varphi \nabla \cdot (r - r_i)$$

### (3) moment 限制器

moment 限制器本身属于 minmod 类型的限制器。minmod 限制器的工作原理是：如果一个单元的解超过了其相邻单元解的平均值，就减小这个单元解的斜率。moment 限制器与此类似：第 k 单元数值解的第 i 阶导数应落在第 i-1 阶导数与前后两单元 i-1 阶导数梯度范围之内。在不存在间断的区域，解的泰勒展开式说明了系数与解的阶导数是相关的，因而限制解的系数意味着限制了解的导数。<sup>(2)</sup>

### 1.4 边界处理

边界通量函数用  $\hat{F}_{bc} = F(U_h^-, U_{bc})$  表示。 $U_h^-$  为边界内的状态量， $U_{bc}$  为边界上的状态量。在入口边界上， $U_{bc}$  可以直接设定为初始值；在出口边界上， $U_{bc} = U_h^-$ ；在固壁上要求满足壁面反射条件，使用对称性方法， $U_{bc}$  的密度、内能和切向速度分量与  $U_h^-$  相同；法向速度分量与之相反。

## 2、前台阶绕流计算分析

### 2.1 问题简述

用 DG 方法计算经典的前台阶绕流问题，流场的具体尺寸如图 1 所示。左侧为入口，右侧为出口，其余为壁面。当马赫数为 3 的超声速流进入管道内时，会在钝头体前方形成弓形激波，弓形激波遇到壁面会发生反射并与钝头体前缘产生的斜激波相交，相交后的激波再次遇到壁面，形成复杂流场。计算 0-4.0 秒内流场各点的状态量。

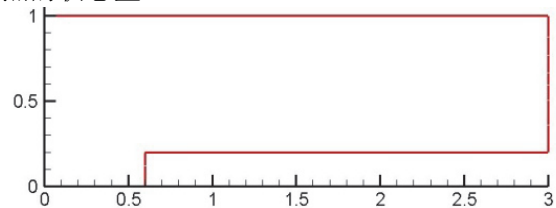


图 1:前台阶流场示意图

### 2.2 空间离散和时间离散

在本算例中，利用 easymesh 进行网格化得到三角形网格，单元数为 18372，节点数为 9411。图 2 显示了前台阶附近具体的网格分布情况。

完成网格化之后，数值计算在每个单元上进行。如图 3 所示的三角形单元内，三个顶点的坐标分别为 1 ( $x_1, y_1$ )、2 ( $x_2, y_2$ )、3 ( $x_3, y_3$ )

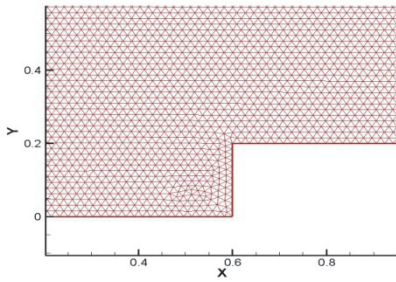


图 2: 前台阶附近的网格分布

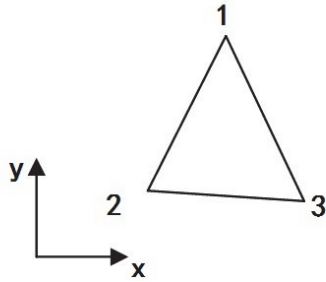


图 3: 三节点三角形单元

采用分片线性多项式来近似精确解，即采用 3 节点三角形单元模式。三个插值函数的表达式为：

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) = \{\xi_1(\mathbf{r}), \xi_2(\mathbf{r}), \xi_3(\mathbf{r})\}^T$$

$$\xi_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad i = 1, 2, 3$$

其中，

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = x_m - x_j$$

$$A = \frac{1}{2} D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

在物理空间中的真实三角形单元通过几何变换可以得到参考单元，并在参考单元内进行计算，这样可以很大程度上简化计算。从无量纲空间到真实的物理空间的变换是一个  $\hat{P}^m$  的多项式函数。在拉格朗日坐标内，可以写作：

$$\mathbf{x}_h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^l \mathbf{x}_i \hat{\psi}_i^m(\boldsymbol{\xi})$$

在一般的真实单元 E 内有：

$$\mathbf{U}_h(\mathbf{x}_h, t) = \hat{\mathbf{U}}_h[\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_h), t] \boldsymbol{\phi}^k(\mathbf{x}_h) = \hat{\boldsymbol{\phi}}^k[\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_h)] \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in E$$

从上式可以看到，当单元的边界为直线时，即线性化离散时，他们的形式在物理空间是多项式的形式。并且可以通过上式来求得 Jacobian 矩阵的逆变换。

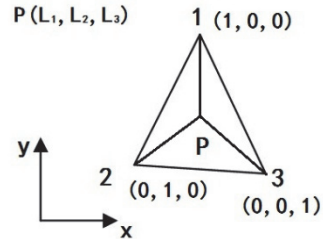


图 4: 三角形单元的面积坐标

此处，采用了局部的面积坐标无量纲化，如图 4 所示，P 为单元内部一点，坐标为  $(L_1, L_2, L_3)$ 。<sup>(6)</sup>

$$L_1 = A_1 / A$$

$$L_2 = A_2 / A$$

$$L_3 = A_3 / A$$

将  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  和  $A$  等用直角坐标表示，就可以建立面积坐标和直角坐标的转换关系。通过计算可以发现，面积坐标与插值函数完全相同，故可以直接利用面积坐标计算数值积分。这样，将单元内在直角坐标系下的计算转化到了在面积坐标下。

在二维单元内的高斯积分中，形函数的阶数  $k$  和高斯正交点数目  $n$  的关系为：

$$n = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

利用以上公式可知，在线性的、二阶和三阶的形函数时，高斯积分需要的正交点数目在内部是分别是 3、6 和 12。

标准积分式  $\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$  中，可以推导出积分点数、积分点坐标和积分权系数存在如下关系。

表 1: 高斯积分点和权系数

积分点数 n	坐标	权系数
1	0	2.0
2	$\pm 0.57735$	1.0
3	$\pm 0.774597$	0.55556
	0.0	0.88889

4	$\pm 0.861136$	0.34785
	$\pm 0.339981$	0.65215

在本算例中， $n=2$ ，并且积分区间已经归一化为  $(0, 1)$ 。在边界  $r$  上，利用表 1，经过线性变换可以得到相应的积分点的位置和权系数：

$$x_{A,B} = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}, \quad w_{1,2} = \frac{1}{2}$$

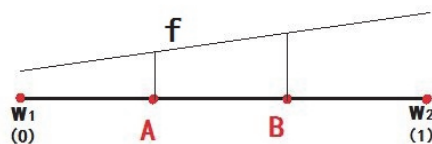


图 5：归一化之后的高斯积分点 A、B

由于积分函数在边界上关于面积坐标是线性的，A、B 两点的函数值可以通过两个端点的函数值线性插值来获得：

$$f(x_A) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) f(x_{w_1}) + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) f(x_{w_2})$$

$$f(x_B) = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) f(x_{w_1}) + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) f(x_{w_2})$$

这样，在单元  $T_i$  的边界  $r$  上，A 和 B 的面积坐标分别为：（假设 A、B 位于顶点 3 的对边）

$$r_A = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$r_B = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

将 A 和 B 的面积坐标带入高斯积分表达式中，可以计算得到边界上的积分：

$$\int_r \xi_j F \cdot n dl \approx \sum_{s=1}^{ns} w_{rs} \xi_j(r_{rs}) \hat{F}(u^L(r_{rs}), u^R(r_{rs}), n_r)$$

$$= \frac{1}{2} (\xi_j(r_A) \hat{F}(u^L(r_A), u^R(r_A), n_A)) +$$

$$\frac{1}{2} (\xi_j(r_B) \hat{F}(u^L(r_B), u^R(r_B), n_B)))$$

图 6 表示三角形单元的边界上所有积分点的位置。在单元  $T_i$  的三条边界上，将每条边上的数值通量求和，即可得到最后的单元边界上的积分。

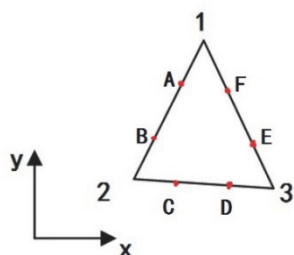


图 6：单元边界上的高斯积分点位置。

对于单元内的积分  $\int_{T_i} \nabla \xi \cdot F dV$  的计算：

$$\nabla \xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x} & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \end{pmatrix}$$

将  $\nabla \xi$  和 Lax-Friedrichs 形式的数值通量带入，可以得到相应的数值积分结果。

通过以上的讨论，空间离散中需要计算的积分项都已经确定。

时间离散采用二阶龙格库塔格式，为了避免数据震荡采用了 Cockburn 和 Shu 给出的  $\Delta \Pi$  型限制器。

### 2.3 计算结果

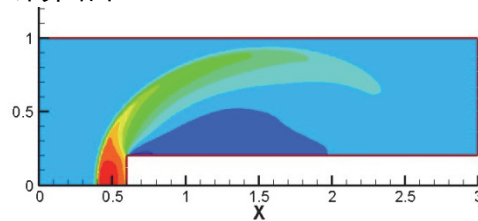


图 7：t=0.5s 时，流场内的密度等值线图

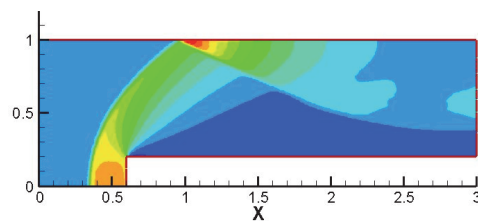


图 8：t=1.0s 时，流场内的密度等值线图

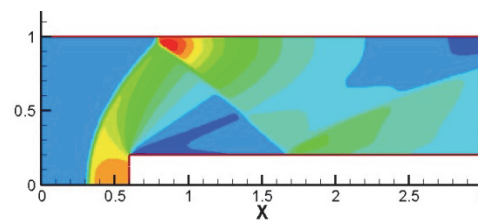


图 9：t=2.0s 时，流场内的密度等值线图

图 10:  $t=4.0s$  时, 流场内的密度等值线图

#### 参考文献

图 7-图 10 表示流场密度分布随着时间的变化情况, 可以观察到激波的扩展、马赫反射以及激波相互作用等现象。

### 3、结论

相对于有限差分法, DG 更容易处理具有复杂边界的流动问题, 并且 DG 对于边界的处理更加简单。本文采用基于三角形网格的龙格库塔间断 Galerkin 方法 (DG), 求解了经典的前台阶绕流问题, 通过计算结果, 可以清晰地观察到流场的建立过程。

- 1 李喜乐、杨永、张冬云, 基于二维结构化网格的间断 Galerkin 方法研究, 航空计算技术, 2009,39 (4)
- 2 蔚喜军、周铁, 流体力学方程的间断有限元方法, 计算物理, 2005,22 (2)
- 3 王刚、许和勇、叶正寅, 高阶间断有限元方法求解 Euler 方程时的数值积分问题研究, 西北工业大学学报, 2011,29 (1)
- 4 Yuzhi Sun Z.J. Wang, Evaluation of discontinuous Galerkin and spectral volume methods for scalar and system conservation laws on unstructured grids. International Journal for numerical methods in fluids. 2004, 45
- 5 贺立新、张来平、张涵信, 任意单元间断 Galerkin 有限元计算方法研究, 空气动力学学报, 2007,25 (2)
- 6 王勰成 有限单元法, 清华大学出版社

## RESEARCH ON FRONT STEP PROBLEM WITH THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD

ZHAO Wengeng, ZHENG Hongwei

State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China

**Abstract** As compared to the finite difference method, the discontinuous Galerkin (DG) method has an advantage in dealing with the problem with complex boundaries. Besides, the flux on each edge can be got from the neighboring two elements as the finite volume method. In this paper, the front step problem is studied by the discontinuous Galerkin method. The unstructured triangular grids and the Runge-Kutta algorithm is applied to get the result. The results extensively shows the establishment of the flow fields.

**Key words** front step problem, discontinuous Galerkin method, Runge-Kutta algorithm, unstructured grid