

逐阶加权基本无振荡格式

申义庆

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京海淀区 100190)

摘要 加权基本无振荡 (WENO) 格式在计算流体力学中得到了较为广泛的应用, 同时 WENO 格式也在不断的得到改进和完善。通过研究分析, 这些工作多数主要是针对 WENO 在极值点 (即一阶导数为 0) 的不足之处来进行改进的, 如 Henrick 等 2005 年构造的 WENO-M 格式, Borges 等 2008 年发展的 WENO-Z 格式等。进一步分析, 我们发现, 这些格式在靠近间断的点 (本文称为过渡点, 意为连接一个光滑区和间断点的点) 只有三阶精度, 而这个精度并不是最优的。本文提出利用逐阶加权方法结合 Henrick 等人的映射 (mapping) 函数来构造 WENO 格式, 如对五阶加权 WENO 格式, 先对两两相邻的 3 节点模板加权得到 2 个 4 阶的中间通量, 再对这两个中间通量进行加权, 得到最后的五阶加权通量。在每一步构造中, 利用了 Henrick 等人提出的映射函数来保证所获得的权满足五阶精度的充分条件。通过分析可知, 逐阶加权方法将过渡点的精度从三阶提高到了四阶。数值算例表明, 在光滑区域 (包括极值点) 新格式具有与 WENO-M、WENO-Z 等格式相同的五阶精度, 而由于改进了过渡点的精度, 新格式在包含间断的一个区域内, 数值精度都得到了提高, 从而获得性能更好的 WENO 格式。

关键词 计算流体力学, 激波捕捉格式, 加权基本无振荡格式

引言

近年来, 加权基本无振荡 (WENO) 格式在计算流体力学中得到了较为广泛的应用, 同时 WENO 格式本身也在不断的得到改进和完善。

Liu 等[1]首次提出 WENO 格式的思想, 即对基本无振荡 (ENO) 格式 [2]中所涉及的每个通量函数赋予一个合理的权, 用所有通量的一个加权凸组合来代替 ENO 格式中选取的最光滑的一个通量, 使得在光滑区每个通量都起着相同的作用, 而在梯度变化大的区域, 只有通量最光滑的那个起主要作用。这样既能保持基本无振荡的性质, 又能在光滑区达到较高的精度。Jiang & Shu [3]对 Liu 等人的 WENO 格式进行分析, 发现其格式精度还可进一步提高, 并给出了一个衡量模板光滑度的算子以及构造 WENO 格式的框架。

针对五阶 WENO 格式, Henrick 等[4]指出利用 Jiang & Shu 的光滑算子直接构造的 WENO 格式其精度在极值点处将降为 3 阶, 因此 Henrick 等提出利用一个映射函数重新构造

权来提高格式在极值点的精度。之后, Borges 等[5]提出利用五结点模板上光滑因子的一个函数来重构新的光滑因子, 以此发展的 WENO-Z 格式在极值点处能够得到与 Henrick 等人发展的 WENO-M 格式相同的五阶精度。另一方面, 很多学者还发展了更高阶的 WENO 格式[6, 7]以及优化 WENO 格式[8]、对称 WENO 格式 [9]等。

总体来说, 上述 WENO 格式基本上都是从 r 个模板直接发展 $(2r-1)$ 阶的格式。因此, 如果一个解含有间断, 那么在连接间断点与光滑区域的那些点处 (本文称为过渡点), 这些 WENO 格式的精度就不能达到最优。例如, Shen & Zha [10]等分析了现有的五阶 WENO 格式, 发现它们在过渡点只有 3 阶精度。事实上, 用类似[10]中的方法分析任意 $(2r-1)$ 阶的 WENO 格式, 可以得出: 如果在一个整体模板 (所有涉及到的模板并集, $2r-1$ 个点) 上包含了一个间断 (即间断两端的点), 那么 $(2r-1)$ 阶的格式在这个模板上都只有 r 阶精度。在早期的工作中[11], Shen 等发现在极值点处, Jiang & Shu 的光滑算子不满足

$\beta_k = D(1 + O(\Delta x^2))$ 的条件，并提出通过逐阶重构来避免此条件的限制，但分析发现，此方法不能满足 Borges 等人[5]提出的关于 WENO 格式五阶精度的条件。

由于解在过渡点仍然是连续的，那么只要整体模板中含有四个相邻的连续点，我们就可以构造四阶的数值通量，即在过渡点可构造比传统五阶 WENO 高一阶的通量。文[10]通过利用两个四阶通量与衡量相应的两个四点模板是否光滑的估计，来构造新的混合格式，以此来提高过渡点的精度并保持基本无振荡的性质。

与[10]的构造方法不同，本文提出逐阶加权基本无振荡格式的构造方法，如对五阶加权 WENO 格式，先对两两相邻的 3 节点模板加权得到 2 个 4 阶的中间通量，再对这两个中间通量进行加权，得到最后的五阶加权通量。在每一步构造中，利用了 Henrick 等人提出的映射函数来保证所获得的权满足五阶精度的充分条件。通过分析可知，逐阶加权方法将过渡点的精度从三阶提高到了四阶。数值算例表明，在光滑区域（包括极值点）新格式具有与 WENO-M、WENO-Z 等格式相同的五阶精度，而由于改进了过渡点的精度，新格式在包含间断的一个区域内，数值精度都得到了提高，从而获得了性能更好的 WENO 格式。

1 数值方法

考虑如下的双曲守恒方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其半离散方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} (h_{i+1/2} - h_{i-1/2}) \quad (2)$$

其中 $h_{i+1/2}$ 为数值通量函数。

1.1 WENO 格式[3-5]

五阶 WENO 格式的数值通量函数可表示为：

$$h_{i+1/2} = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k q_k \quad (3)$$

其中 ω_k 为权函数， q_k 为函数 f 在模板 $S_k = (x_{i+k-r+1}, x_{i+k-r+2}, \dots, x_{i+k})$ 上的 r 阶差分

通量函数。权函数 ω_k 的计算需要引入衡量函数光滑度的光滑因子，如在 Jiang & Shu[3] 的 WENO 格式中，

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1}}$$

其中

$$\alpha_k = \frac{C_k^r}{(\varepsilon + IS_k)^p}, k = 0, 1, \dots, r-1, \\ IS_k = \sum_{l=1}^2 \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta x^{2l-1} [q_k^{(l)}(x)]^2 dx \quad (4)$$

C_k^r 是(3)式达到 $(2r-1)$ 阶的最优权， IS_k 称为光滑因子， ε 是为了使分母不为 0 的小参数， p 为大于或等于 1 的指数。在文[3]中， $\varepsilon = 10^{-6}$ ， $p = 2$ 。

Henrick 等[4]对上述格式进行分析，指出在极值点 $f'_i = 0$ 处其精度只有 3 阶精度，并提出五阶 WENO 格式满足五阶精度收敛的充分必要为：

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^2 A_k (\omega_k^+ - \omega_k^-) = O(\Delta x^3) \\ \omega_k^\pm - c_k = O(\Delta x^2) \end{cases} \quad (5)$$

并提出一个映射函数 $g_k(\omega)$

$$g_k(\omega) = \frac{\omega(c_k + c_k^2 - 3c_k\omega + \omega^2)}{c_k^2 + \omega(1 - 2c_k)} \quad (6)$$

来重构新的权。以此构造的 WENO-M 格式在极值点出仍然具有五阶精度。

Borges 等[5]提出五阶精度 WENO 的一个充分条件为：

$$\omega_k^\pm - c_k = O(\Delta x^3) \quad (7)$$

并引入一个参数 $\tau_5 = |IS_0 - IS_2|$ 来构造新的光滑因子 IS_k^z 为

$$IS_k^z = \frac{IS_k + \varepsilon}{IS_k + \tau_5 + \varepsilon}$$

用 IS_k^z 来构造的 WENO-Z 格式在极值点满足充分条件(7)，即格式具有五阶精度。

1.2 逐阶加权 WENO 格式

Shen & Zha[10]对五阶 WENO 格式的分析表明，在过渡点 $i-1$ （见图 1），上述 WENO 格式只有三阶精度。

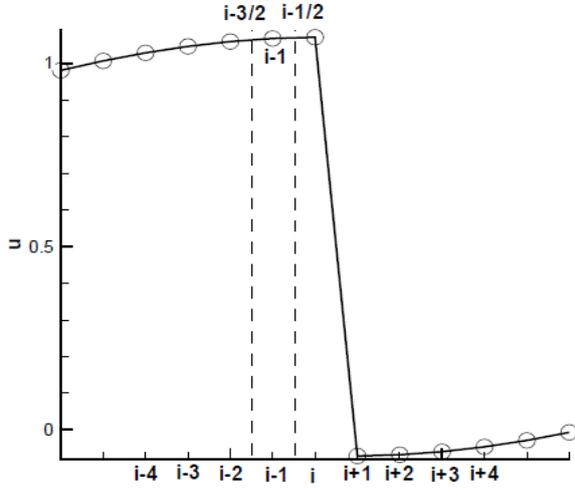


图 1 过渡点示意图

本文结合 Henrick 等人的映射函数(6)及逐阶构造 WENO-Z 格式，发展新的逐阶加权方法。图 2 可用来说明逐阶的加权过程。

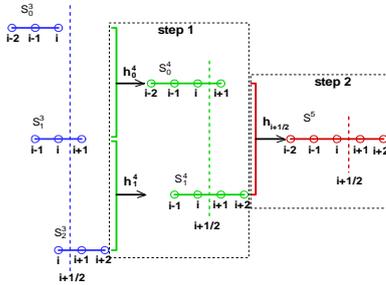


图 2 逐阶加权过程示意图

第一步，构造两个四阶加权通量如下：

$$\begin{cases} h_0^4 = \omega_0^{4,0} q_0 + \omega_1^{4,0} q_1 \\ h_1^4 = \omega_0^{4,1} q_1 + \omega_1^{4,1} q_2 \end{cases} \quad (8)$$

其中，

$$\omega_k^{4,l} = \frac{g_k(\psi_k^{4,l})}{\sum_k g_k(\psi_k^{4,l})}, \quad \psi_k^{4,l} = \frac{\alpha_k^{4,l}}{\sum_k \alpha_k^{4,l}},$$

$$\alpha_k^{4,l} = c_k^{4,l} \left(1 + \frac{\tau_4^l}{IS_{l+k} + \varepsilon} \right), \quad \tau_4^l = |IS_{l+1} - IS_l|,$$

以及 $c_0^{4,0} = 0.25$ ， $c_1^{4,0} = 0.75$ ； $c_0^{4,1} = 0.5$ ， $c_1^{4,1} = 0.5$ 。

第二步，获得最后的五阶通量如下：

$$h_{i+1/2} = \omega_0 h_0^4 + \omega_1 h_1^4 \quad (9)$$

其中， $\omega_k = \frac{g_k(\psi_k)}{\sum_k g_k(\psi_k)}$ ， $\psi_k = \frac{\alpha_k}{\sum_k \alpha_k}$ ，

$\alpha_k = c_k^5 \left(1 + \frac{\tau_5}{IS_{2k} + \varepsilon} \right)$ ， $\tau_5 = |IS_2 - IS_0|$ ，及 $c_0^5 = 0.4$ ， $c_1^5 = 0.6$ 。

下面对新格式(8)和(9)进行精度分析。利用 Taylor 展开，有

$$\tau_4^l = |f_i' f_i'''| \Delta x^4 + O(\Delta x^5)$$

因此

$$\psi_k^{4,l} = \begin{cases} c_k^{4,l} + O(\Delta x^2), & \text{if } f_i' \neq 0 \\ c_k^{4,l} + O(\Delta x), & \text{if } f_i' = 0 \text{ and } f_i'' \neq 0 \end{cases}$$

利用映射函数的性质

$$g_k(\psi_k^{4,l}) = c_k^{4,l} + \frac{(\psi_k^{4,l} - c_k^{4,l})^3}{c_k^{4,l} - (c_k^{4,l})^3} + \dots$$

有

$$\omega_k^{4,l} = \begin{cases} c_k^{4,l} + O(\Delta x^6), & \text{if } f_i' \neq 0 \\ c_k^{4,l} + O(\Delta x^3), & \text{if } f_i' = 0 \text{ and } f_i'' \neq 0 \end{cases}$$

同理，有

$$\omega_k = \begin{cases} c_k^5 + O(\Delta x^9), & \text{if } f_i' \neq 0 \\ c_k^5 + O(\Delta x^3), & \text{if } f_i' = 0 \text{ and } f_i'' \neq 0 \end{cases}$$

也就是说，无论在 $f_i' \neq 0$ 或 $f_i' = 0$ 和 $f_i'' \neq 0$ 条件下，五阶精度的充分条件(7)总能得到满足。因此，新格式在光滑区域（包括极值点）具有五阶精度。

如果 x_i 是一个过渡点（如在点 x_{i+1} 和 x_{i+2} 之间存在间断），那么在第一步中，由(8)可得到一个四阶通量 h_0^4 。在第二步(9)中，由于 $IS_2 \gg IS_0$ 及 $\omega_1 \rightarrow 0$ ，最后的通量 $h_{i+1/2}$ 由 $h_{i+1/2} \rightarrow h_0^4$ 得到。因此新格式在过渡点具有四阶精度

2 数值算例

本文算例中，时间积分采用 4 阶 Runge-Kutta 方法[12]。

2.1 对流方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{周期边界} \end{cases}$$

(1) 初始条件

$$u_0(x) = \sin\left(\pi x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right)$$

此问题含有两个极值点。表 1 给出了几种格式的误差及精度对比。可见本文格式对于光滑解获得了与 WENO-M、WENO-Z 格式相同的五阶精度。

(2) 初始条件

$$u_0(x) = \begin{cases} -\sin(\pi x) - \frac{1}{2}x^3, & -1 < x \leq 0 \\ -\sin(\pi x) - \frac{1}{2}x^3 + 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

图 3 给出时间 $t=6$ 时的解。可以看出，在间断附近，本文格式得到的解比其它两种格式更精确。

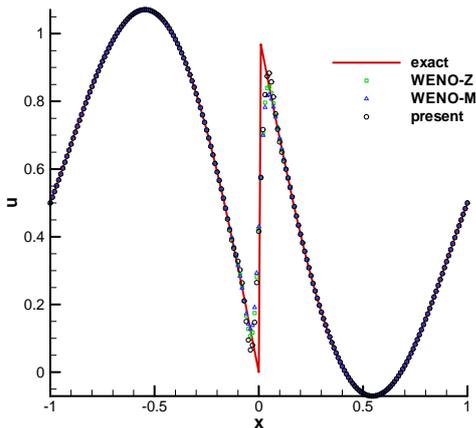


图 3 问题(2), $T=6$

(3) 初始条件

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{6}(G(x, \beta, z - \delta) + G(x, \beta, z + \delta)) \\ + 4G(x, \beta, z), & -0.8 \leq x \leq -0.6; \\ 1, & -0.4 \leq x \leq -0.2; \\ 1 - |10(x - 0.1)|, & 0 \leq x \leq 0.2; \\ \frac{1}{6}(F(x, \alpha, a - \delta) + F(x, \alpha, a + \delta)) \\ + 4F(x, \alpha, a), & 0.4 \leq x \leq 0.6; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中, $G(x, \beta, z) = e^{-\beta(x-z)^2}$,

$$F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x - a)^2, 0)},$$

其它参数取 $a = 0.5$, $z = -0.7$, $\delta = 0.005$ 和 $\beta = \log 2 / 36\delta^2$ 。

从图 4 的比较中可以看出，无论是对间断或是极值点，新格式都比另两个格式有所提高。

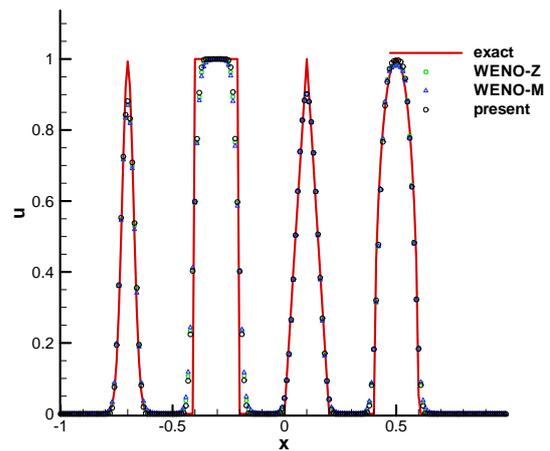


图 4 问题(3), $T=6$

2.2 非线性输运方程

求解非线性输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

初始条件为 $u_0(x) = 0.3 + 0.7 \sin(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$ 以及周期边界条件。利用 $f^\pm = (f \pm au)/2$ 进行通量分裂，其中 $f = u^2/2$, $a = \max(u_i)$ 。图 5 给出 $t=2$ 网格 $N=80$ 点的数值结果，从图中可以看出，本文格式比 WENO-Z 及 WENO-M 更接近准确解。

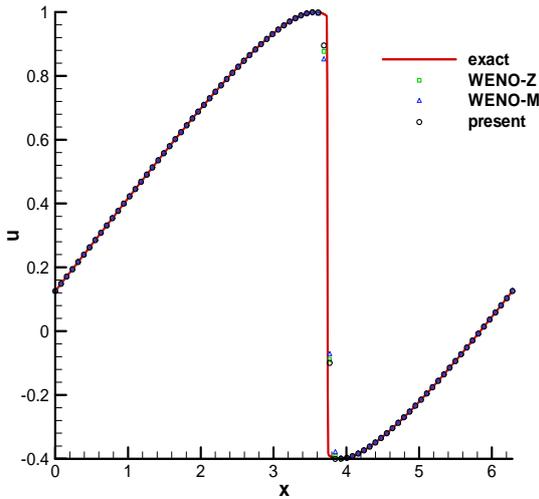


图 5 非线性输运方程, T=2

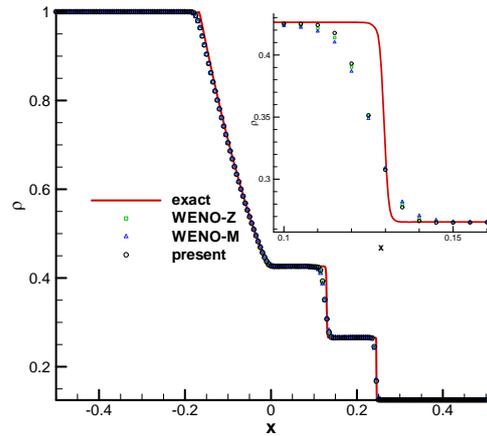


图 6 Sod 问题, T=0.14

2.3 一维激波管问题

(1) Sod 问题

初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1), & x < 0 \\ (0.125, 0, 0.1), & x \geq 0 \end{cases}$$

(2) Lax 问题

初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 0.3528), & x < 0 \\ (0.500, 0.000, 0.5710), & x \geq 0 \end{cases}$$

(3) Shu-Osher 问题

初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 1033333) & \text{when } x < -4 \\ (1 + \varepsilon \sin 5x, 0, 1), & \text{when } x \geq -4 \end{cases}$$

(4) 爆炸波碰撞问题

初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000), & 0 \leq x < 0.1 \\ (1, 0, 0.01), & 0.1 \leq x < 0.9 \\ (1, 0, 100), & 0.9 \leq x \leq 1.0 \end{cases}$$

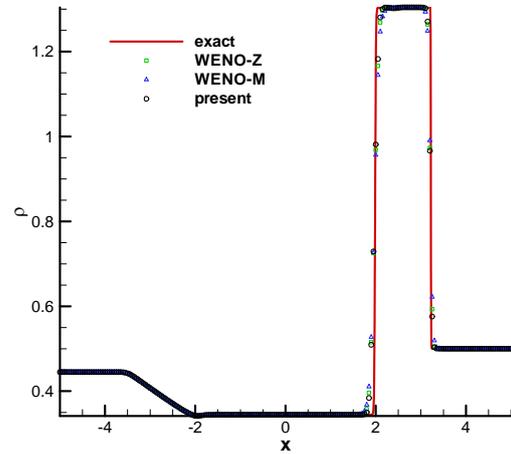


图 7 Lax 问题, T=1.3

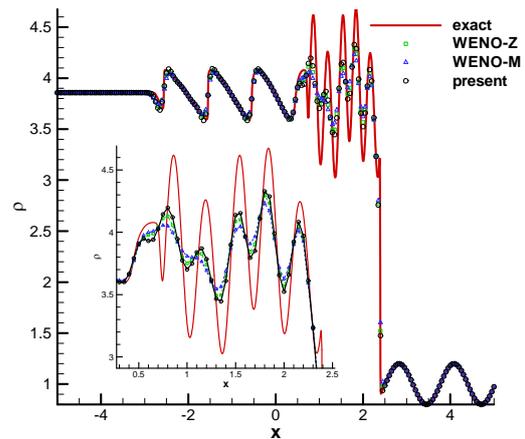
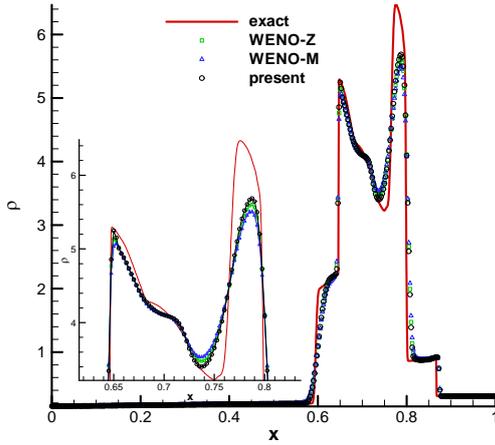


图 8 Shu-Osher 问题, T=1.8

图 6-图 9 分别给出问题 (1) - (4) 的数值计算结果比较。可以看出, 对这四个一维激波管问题, 在激波附近区域, 本文发展格式的精度均比另两个 WENO 格式好。图 8 的结果也说明, 对变化剧烈的光滑解, 新格式的耗散更小。


 图 9 爆炸波碰撞问题, $T=0.038$

2.4 二维激波/涡干扰问题

本算例求解二维 Euler 方程。

问题描述 [3, 13]：计算区域取为 $[0,2] \times [0,1]$ ，在 $x=0.5$ 处有一个垂直于 x 轴的静止激波，其马赫数为 1.1，其左端气体状态分布为 $(\rho, u, v, p) = (1, 1.1\sqrt{\gamma}, 0, 1)$ 。一个中心点位于 $(x_c, y_c) = (0.25, 0.5)$ 的小涡以扰动的形式作用于速度 (u, v) 、温度 $(T = p/\rho)$ 和熵 $(S = \ln(p/\rho^\gamma))$ ，扰动量为

$$\begin{cases} \tilde{u} = \varepsilon \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \sin \theta \\ \tilde{v} = -\varepsilon \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \cos \theta \\ \tilde{T} = -\frac{(\gamma-1)\varepsilon^2 e^{2\alpha(1-\tau^2)}}{4\alpha\gamma} \\ \tilde{S} = 0 \end{cases}$$

其中 $\tau = r/r_c$ ， $r = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}$ ，及参数 $\varepsilon = 0.3$ ， $r_c = 0.05$ ， $\alpha = 0.204$ 。

时间步长取 [14]

$$\Delta t = \sigma \frac{\Delta t_x \Delta t_y}{\Delta t_x + \Delta t_y},$$

其中， $\sigma = 0.5$ 为 CFL 数，

$$\Delta t_x = \frac{\Delta x}{\max_{i,j} (|u_{i,j}| + c_{i,j})},$$

$$\Delta t_y = \frac{\Delta y}{\max_{i,j} (|v_{i,j}| + c_{i,j})}$$

图 10 给出时间 $t=0.6$ 时由本文格式计算的压力等值线。图 11a-11c 为压力沿中心线 $y=0.5$ 的分布比较。图中精确解是网格为 2001×401 的 WENO-Z 格式计算结果。其它结果则利用网格 251×101 。从图中可见，在激波后，本文格式获得了几乎与精确解形同的最大值，远远好于其它两种格式，甚至在光滑的谷底区域，本文格式也要精确一些。

2.5 二维激波/剪切层干扰问题

本算例求解二维 Navier-Stokes 方程，其中粘性项采用四阶中心格式离散 [15]。

问题描述 [16]：计算区域取为 $[0,200] \times [-20,20]$ 。一个入射角为 $\theta = 12^\circ$ 的斜激波射入一个初始马赫数为 0.5 的空间发展的混合层。入口来流速度呈如下的双曲正切分布，

$$u = 2.5 + 0.5 \tanh(2y)$$

上、下两部分自由来流的密度及压力分布分别为 $\rho_u = 1.6374$ ， $p_u = 0.3327$ 和 $\rho_l = 0.3626$ ， $p_l = 0.3327$ 。

对 y 方向的来流速度分量施加一个扰动，

$$v' = \sum_{k=1}^2 a_k \cos(2\pi k t / T + \phi_k) \exp(-y^2 / b)$$

其中 $T = \lambda / u_c$ ， $\lambda = 30$ ， $u_c = 2.68$ ， $b = 10$ ， $a_1 = a_2 = 0.05$ ， $\phi_1 = 0$ ， $\phi_2 = \pi/2$ 。Prandtl 数取 0.72，Reynolds 数为 500。时间步长的选取与上一算例相同。

图 12 给出网格为 321×81 时间 $t=120$ 的密度等值线。可以看出，三种格式都能较好的分辨激波，但对涡的分辨，特别是后面四个涡，本文格式获得了比另两个格式更加清晰的涡结构。

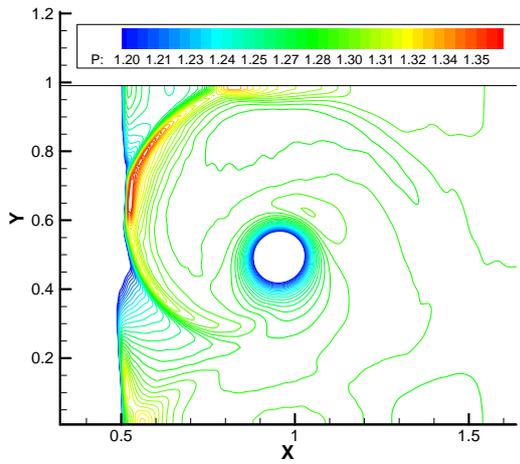


图 10 压力等值线，二维激波/涡干扰问题, $T=0.6$

3 结论

本文提出利用逐阶加权方法结合 Henrick 等人的映射 (mapping) 函数来构造 WENO 格式的新方法。

- (1) 在每一步构造中，利用了 Henrick 等人提出的映射函数来保证所获得的权满足五阶精度的充分条件，从而在光滑区（含极值点），格式具有五阶精度。
- (2) 该方法在过度点具有四阶精度，比传统五阶 WENO 格式的三阶精度提高了一阶。
- (3) 数值算例表明，在光滑区域（包括极值点）新格式具有与 WENO-M、WENO-Z 等格式相同的五阶精度，而由于改进了过渡点的精度，新格式在包含间断的一个区域内，数值精度都得到了提高，从而获得性能更好的 WENO 格式。

该格式将能更精确地模拟激波引起的分离、激波/湍流干扰等流动现象。

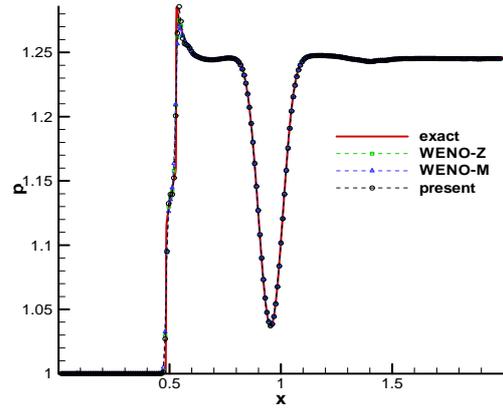


图 11a 压力沿中心线 $y=0.5$ 的分布比较

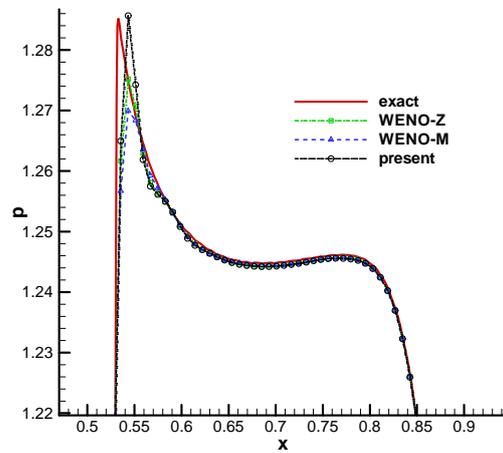


图 11b 图 11a 的局部放大图

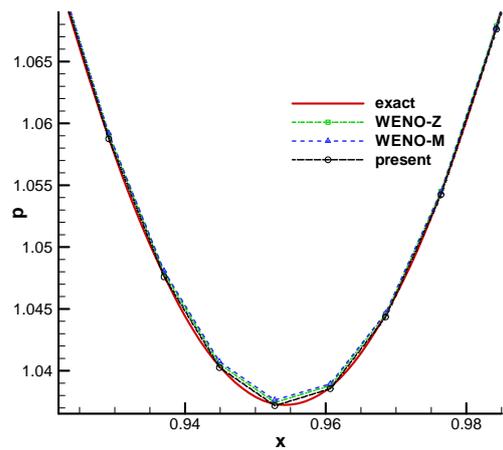


图 11c 图 11a 的局部放大图

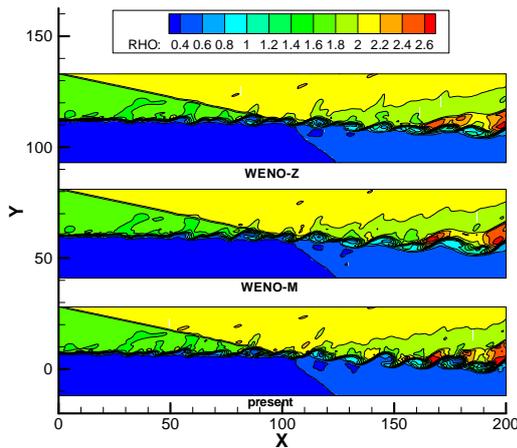


图 12 密度等值线，二维激波/剪切层干扰问题， $T=120$

参考文献

[1] X.D. Liu, S. Osher, T. Chan, Weighted essentially non-oscillatory schemes, *J. Comput. Phys.* 115 (1994) 200-212.
 [2] A. Harten, B. Enquist, S. Osher, S. Chakravarthy, Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III, *J. Comput. Phys.* 71 (1987) 231-303.
 [3] G.S. Jiang, C.W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comput. Phys.* 126 (1996) 202-228.
 [4] A.K. Henrick, T.D. Aslam, J.M. Powers, Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points, *J. Comput. Phys.* 207 (2005) 542-567.
 [5] R. Borges, M. Carmona, B. Costa, W.S. Don, An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 227 (2008) 3191-3211.
 [6] D.S. Balsara, C.W. Shu, Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy, *J. Comput.*

Phys. 160 (2000) 405-452.
 [7] G.A. Gerolymos, D. Schal, I. Vallet, Very high order WENO schemes, *J. Comput. Phys.* 228 (2009) 8481-8524.
 [8] Z.J. Wang, R.F. Chen, Optimized weighted essentially non-oscillatory schemes for linear waves with discontinuity, *J. Comput. Phys.* 174 (2001) 381-404.
 [9] M.P. Martin, E.M. Taylor, M. Wu, V.G. Weirs, A bandwidth-optimized WENO scheme for effective direct numerical simulation of compressible turbulence, *J. Comput. Phys.* 220 (2006) 270-289.
 [10] Y.Q. Shen, G.C. Zha, Improvement of weighted essentially non-oscillatory schemes near discontinuities, 19th AIAA Computational Fluid Dynamics, 22 - 25 June 2009, San Antonio, Texas. AIAA 2009-3655, 2009
 [11] Y.Q. Shen, R.Q. Wang, H.Z. Liao, A fifth-order accurate weighted ENN difference scheme and its applications, *Journal of Computational Mathematics* 19 (2001) 531-538.
 [12] C.W. Shu, O. Osher, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, *J. Comput. Phys.* 77 (1988) 439-471.
 [13] Y.Q. Shen, G.W. Yang, Z. Gao, High-resolution finite compact difference schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.* 216 (2006) 114 - 137.
 [14] S. Pirozzoli, Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock - turbulence interaction, *J. Comput. Phys.* 178 (2002) 81 - 117.
 [15] Y.-Q. Shen, G.-Z. Zha, X.-Y. Chen, High order conservative differencing for viscous terms and the application to vortex-induced vibration flows, *J. Comput. Phys.* 228 (2009) 8283 - 8300.
 [16] H.C. Yee, N.D. Sandham, M.J. Djomehri, Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters, *J. Comput. Phys.* 150 (1999) 199 - 238.

表 1 误差及精度比较，2.1 节，问题 (1) , $T=2$

Scheme	N	L_1 error	L_1 order	L_∞ error	L_∞ order
WENO-Z	40	0.217102e-3	-	0.677211e-4	-
	80	0.649393e-5	5.063	0.237405e-5	4.834
	160	0.204882e-6	4.986	0.785200e-7	4.918
	320	0.748874e-8	4.774	0.250232e-8	4.971
	640	0.364893e-9	4.359	0.779779e-10	5.004
WENO-M	40	0.210766e-3	-	0.672781e-4	-
	80	0.648426e-5	5.023	0.225867e-5	4.897
	160	0.204671e-6	4.986	0.720345e-7	4.971
	320	0.640983e-8	4.997	0.226830e-8	4.989
	640	0.200631e-9	4.998	0.710974e-10	4.996
present	40	0.203332e-3	-	0.714827e-4	-
	80	0.649369e-5	4.969	0.229242e-5	4.963

	160	0.204635e-6	4.988	0.724031e-7	4.985
	320	0.640982e-8	4.997	0.227140e-8	4.994
	640	0.200642e-9	4.998	0.711126e-10	4.997

MULTI-STEP WEIGHTED ESSENTIALLY NON-OSCILLATORY SCHEME

SHEN Yiqing

(Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

Abstract Most of the weighted essentially non-oscillatory (WENO) schemes are designed to have $(2r-1)$ th accuracy in the smooth regions directly from r candidate stencils. Hence, for a whole stencil containing discontinuities, the flux constructed by these methods is of only r th -order accuracy, which is not the optimal accuracy. This paper proposes a multi-step weighting method to construct WENO scheme to overcome this shortcoming. For the fifth-order WENO scheme, Henrick's mapping function is used in each step to satisfy the sufficient condition of fifth-order convergence for a fifth-order WENO scheme. The new fifth-order WENO scheme is fifth-order accurate in smooth regions, and its distinctive advantage is that it can improve the accuracy by one order higher than the traditional WENO schemes at transition points (connecting a smooth region and a discontinuity point), and hence it improves the accuracy in the regions near discontinuities. Numerical examples show that the new scheme is efficient and robust, and is less dissipative than the traditional fifth-order WENO schemes.

Key words Numerical method, weighted essentially non-oscillatory scheme, shock wave, complex flowfield simulation