

# 有限紧致格式中不同激波识别方法的比较研究

刘利, 申义庆

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京海淀区 100190)

**摘要** 为了能无振荡地捕捉激波又能高精度低耗散的分辨流场中的小尺度结构, 杂交格式在近年来得到快速的发展和广泛的应用。有限紧致格式通过有效的激波识别方法, 利用激波将计算区域划分为有限个光滑紧致区域, 在每个紧致区域上利用低耗散紧致格式, 紧致格式所需的边界通量通过高阶 WENO 格式获得, 因而有限紧致格式具有自适应的无振荡激波捕捉能力以及紧致格式在光滑区域的类谱分辨精度。与杂交格式一样, 激波识别方法的有效性、准确性极大地影响有限紧致格式的整体性能。本文通过一维以及二维的数值试验, 研究多种激波判别方法对有限紧致格式计算精度以及无振荡性质的影响, 并通过对比分析, 评估各种激波判别方法。

**关键词** 数值方法, 加权基本无振荡格式, 激波, 杂交格式

## 引言

为了精确模拟高速可压缩流场中的激波/边界层、激波/涡干扰等复杂流动现象, 要求使用的数值方法既要能无振荡高分辨的捕捉流场中的激波, 又要能高精度低耗散的分辨流场中精细的小尺度结构 [1]。加权基本无振荡格式 (WENO) [2, 3] 因具有基本无振荡的性质以及光滑区域上的高精度特性而成为当前主流的激波捕捉方法, 其精确性和鲁棒性已在强激波及复杂激波相互作用的计算中得到验证。

虽然理论上可以构造出任意高阶精度的 WENO 格式 [3-5], 但其迎风偏心特性仍然使其在分辨短波以及小尺度结构时存在过度的数值耗散, 以至于掩盖了物理粘性导致计算的不准确, 尤其是在可压缩湍流的模拟中 [6]。为了解决这一问题, 众多学者提出发展杂交格式, 即在间断附近使用高性能的激波捕捉格式, 而在光滑区域使用高精度低耗散线性格式的数值方法。与 WENO 格式相结合, 发展了不同的杂交格式, 如 WENO-紧致格式 [8-11], WENO-中心格式 [12-14], WENO-迎风格式 [7, 15] 等。由于杂交格式的精度、鲁棒性及效率等与计算过程能否准确判断激波的极其相关, 因此发展有效、精确的激波识别方法成为构造杂交格式的一个关键问题。

紧致格式对光滑解的计算具有类似谱分辨的精度而受到特别的关注, 其不足之处在于计算间断解时将产生非物理振荡, 而且由于其隐式计算部分是整体相关的, 非物理振荡将传播到整个计算区域。为了克服这一缺点, shen 等提出有限紧致格式的概念, 并发展了系列的高分辨有限紧致激波捕捉格式 [11, 16, 17]。有限紧致格式将流场中的激波作为内边界, 将计算区域划分为有限个光滑的区域, 在此区域上使用紧致格式求解, 内边界上的通量由激波捕捉格式计算并自动作为紧致格式求解的边界公式。因此, 有限紧致格式的性能同样受到激波判别方法的影响。

最近, Li & Qiu [15] 对比研究了应用不同激波识别器时杂交 WENO-迎风格式的性能, 数值算例表明杂交格式比 WENO 格式更有效率, 并对多种激波识别方法 [15, 18] 的效率和可靠性进行了评估。最近, Shen & Zha [11] 利用 WENO 格式光滑因子 [3] 之间的关系, 提出了一个新的激波识别方法 (本文称为 SZ 方法), 该方法无人造的、问题相关的参数, 其性能在有限紧致格式的应用中得到了验证。

本文将系统研究各种激波判别方法 (包括文献 [15] 中认为效果较好的几种方法以及 SZ 方法等) 对有限紧致格式计算精度以及无振荡性质的影响, 并通过对比分析, 评估各种激波判别方法。

## 1 数值方法

对于双曲守恒形式方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

通量函数  $f(u)$  可以分裂成两部分  $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$  其中  $df^+(u)/du \geq 0$  和  $df^-(u)/du \leq 0$ 。

方程(1)的半离散形式可以写成：

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(h_{i+1/2} - h_{i-1/2})$$

其中数值通量为： $h_{i+1/2} = h_{i+1/2}^+ + h_{i+1/2}^-$ 。本文只给出  $h_{i+1/2}^+$  的公式，并省略上标“+”。 $h_{i+1/2}^-$  可通过与  $x_{i+1/2}$  对称的原则获得。

### 1.1 有限紧致 (FC) 格式 [11, 16]

由于紧致格式是在一个区域内求解，因此在有限紧致格式的算法中，在利用激波判别方法对模板 (stencil) 进行判别时，需要一个数组来界定光滑紧致模板的起点与终点。其具体算法如下[11]：

1. 利用边界公式计算  $h_{1/2}$  和  $h_{N+1/2}$ ；
2. M=1 !(搜索第 M 个光滑区域)
 

```

            start_point(M)=1 ! (M 光滑区域的起点)
            DO i=1,N-1
            (对模板  $S_i$  使用激波判别方法)
            IF ( $S_i$  为激波模板) THEN
            end_point(M)=i !(M 光滑区域的终点)
            M=M+1
            start_point(M)=i+1
            利用激波捕捉格式计算  $h_{i+1/2}$ 
            END IF
            end_point(M)=N
            END DO
            
```
3. DO k=1,M !(对 M 个光滑的区域，构造高精度低耗散的通量)
 

```

            DO i=start_point(k),end_point(k)-1
            利用紧致格式计算通量  $h_{i+1/2}$ 
            END DO
            END DO
            
```

### 1.2 加权基本无振荡 (WENO) 格式 [3, 22]

本文有限紧致格式中所用的激波捕捉格式为五阶 WENO 格式，其通量公式为

$$h_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 \omega_k q_k \quad (2)$$

其中  $q_k$  为基于模板  $S_k^3 = (x_{i+k-2}, x_{i+k-1}, x_{i+k})$  的三阶流通量，

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{3}f_{i-2} - \frac{7}{6}f_{i-1} + \frac{11}{6}f_i \\ q_1 = -\frac{1}{6}f_{i-1} + \frac{5}{6}f_i + \frac{1}{3}f_{i+1} \\ q_2 = \frac{1}{3}f_i + \frac{5}{6}f_{i+1} - \frac{1}{6}f_{i+2} \end{cases}$$

权重  $\omega_k$  如下

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}$$

其中

$$\alpha_k = \frac{c_k}{(\varepsilon + IS_k)^p}$$

$IS_k$  是模板  $S_k^3$  上的光滑度量因子。在文献[3]中 Jiang 和 Shu 建议  $IS_k$  为

$$IS_k = \sum_{l=1}^2 \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta x^{2l-1} [q_k^{(l)}(x)]^2 dx \quad (3)$$

上式泰勒展开为

$$\begin{cases} IS_0 = \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 \\ \quad + \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2 \\ IS_1 = \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 \\ \quad + \frac{1}{4}(f_{i-1} - f_{i+1})^2 \\ IS_2 = \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 \\ \quad + \frac{1}{4}(3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2 \end{cases} \quad (4)$$

$c_0 = 0.3$ ,  $c_1 = 0.6$  和  $c_2 = 0.1$  为构成五阶迎风格式的最优权重。由于当  $f_i' = 0$  会导致格式降阶，Borges 等人[22]提出一个参数  $\tau_5$

$$\tau_5 = |IS_0 - IS_2| \quad (5)$$

构造一个新的光滑度量因子

$$IS_k^z = \frac{IS_k + \varepsilon}{IS_k + \tau_5 + \varepsilon}$$

通过  $IS_k^z$  来重构 WENO 格式，新的格式（称为 WENO-Z）可以保证在  $f_i' = 0$  临界点依旧保证五阶精度。

### 1.3 紧致格式

以三对角隐式紧致格式为例，公式可以写为，

$$\alpha h_{i-1/2} + h_{i+1/2} + \beta h_{i+3/2} = \sum_{k=N}^M a_k f_{i+k} \quad (6)$$

不同差分紧致格式可以通过求解方程（6）得到。本文使用六阶 Pade 格式。

需要指出尽管近似黎曼求解器如 Steger-Warming 格式用来求解通量的值，在紧致格式计算的光滑区域并没有额外的耗散引入。黎曼求解器只有在应用迎风格式时会引入额外耗散，而中心格式时无额外耗散。

### 1.4 激波识别方法

为了表述方便，文献[15]在时间步  $t_n$ ， $I_j$  单元构建一个二次多项式  $P_2(x)$ ，

$$P_2(x) = u_j^{(0)} + u_j^{(1)} \frac{x - x_j}{\Delta x} + u_j^{(2)} \left[ \left( \frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^2 - \frac{1}{12} \right], \quad (7)$$

$I_j$  单元定义为： $x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 。由  $P_2(x_k) = u_k^n$ ， $k = j-1, j, j+1$ ，有

$$u_j^{(0)} = \frac{1}{24} (u_{j-1}^n + 22u_j^n + u_{j+1}^n),$$

$$u_j^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

$$u_j^{(2)} = \frac{1}{2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n).$$

下面列出本文中所比较的几种激波识别方法：

(1) 基于平均总变差的激波识别方法（ATV）。

令 TV 表示在  $t_n$  时间步的总变差：

$$TV \equiv TV(u^n(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx = \sum_j^N |u_{j+1}^n - u_j^n|$$

如果

$$|u_{j+1}^n - u_j^n| \geq \theta \frac{TV}{N}$$

我们定义单元  $I_j$  和  $I_{j+1}$  为问题单元，其中  $\theta$  是问题相关的。本文中  $\theta = 0.3$ 。

(2) 基于 minmod 函数的 TVB 激波识别方法 (TVB)[19]。

令

$$\tilde{u}_j = P_2(x_{j+1/2}) - u_j^{(0)}, \quad \tilde{u} = -P_2(x_{j-1/2}) + u_j^{(0)}.$$

通过改进的 minmod 函数进行优化

$$\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = \tilde{m}(\tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - u_j^{(0)}, u_j^{(0)} - u_{j-1}^{(0)})$$

$$\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = \tilde{m}(\tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - u_j^{(0)}, u_l^{(0)} - u_{j-1}^{(0)})$$

其中  $\tilde{m}$  为

$$\tilde{m}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1 & \text{if } |a_1| \leq M(\Delta x), \\ m(a_1, a_2, \dots, a_n) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

minmod 函数定义为

$$m(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} s \cdot \min_{1 \leq j \leq n} |a_j| & \text{if } \text{sign}(a_j) = s \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (8)$$

TVB 识别器参数  $M > 0$  为常数。如果  $\tilde{u}_j^{(\text{mod})} \neq \tilde{u}_j$  或者  $\tilde{u}_j^{(\text{mod})} \neq \tilde{u}_j$  我们定义  $I_j$  单元为问题单元。

根据在文献[23]中的讨论，TVB 识别器参数  $M$  是和问题相关的，所以很难决定不同计算情况下  $M$  的值。我们采用文献[20]中使用的正比于初始值二次导数的  $M$  值。

$$M = \frac{2}{3} M_2 = \frac{2}{3} \max_j |u_{xx}^0|$$

(3) Biswas 等[20]人提出的矩限制方法 (BDF)。

$$u_j^{(l), \text{mod}} = \frac{1}{(2l-1)} m((2l-1)u_j^{(l)}),$$

$$u_{j+1}^{(l-1)} - u_j^{(l-1)}, u_j^{(l-1)} - u_{j-1}^{(l-1)}, \quad l = 1, 2,$$

其中  $m$  为 mindmod 函数。如果

$$u_j^{(2),\text{mod}} \neq u_j^{(2)}$$

定义  $I_j$  单元为问题单元。

(4) Krivodonova 等[21]提出的激波识别方法(KXRCF)。将单元  $I_j$  的边界分为  $\partial I_j^+$  和  $\partial I_j^-$  分别代表流入和流出边界, 如果

$$\frac{\left| \int_{\partial I_j^-} \left( u^h|_{I_j} - u^h|_{I_{n_j}} \right) ds \right|}{h_j^{k+1} \left\| \partial I_j^- \right\| \left\| u^h|_{I_j} \right\|} > 1 \quad (9)$$

则单元  $I_j$  定义为问题单元。这里  $h_j$  是单元外接圆半径,  $I_{n_j}$  是  $I_j$  单元在  $\partial I_j^-$  边界的临近单元。模数是单元平均。在本文中公式(9)可以简化为

$$\frac{\left| u^h \left( -\frac{1}{2} \right) \Big|_j - u^h \left( \frac{1}{2} \right) \Big|_{j-1} \right|}{(\Delta x)^{3/2} \sqrt{\int_{-1/2}^{1/2} \left[ u^h(x) \Big|_j \right]^2 dx}} > 1$$

其中

$$u^h \left( -\frac{1}{2} \right) \Big|_j = u_j^{(0)} - \frac{1}{2} u_j^{(1)} + \frac{1}{6} u_j^{(2)},$$

$$u^h \left( \frac{1}{2} \right) \Big|_{j-1} = u_{j-1}^{(0)} + \frac{1}{2} u_{j-1}^{(1)} + \frac{1}{6} u_{j-1}^{(2)},$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left[ u^h(x) \Big|_j \right]^2 dx = a^2 + \frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{80} + \frac{ac}{6}$$

其中

$$a = u_j^{(0)} - \frac{1}{12} u_j^{(2)},$$

$$b = u_j^{(1)},$$

$$c = u_j^{(2)},$$

(5) 基于  $\tau_5$  的激波识别方法 (SZ)。

在文[11]中, Shen & Zha 提出:

引理1: 如果满足  $\tau_5 > \min(IS_0, IS_1, IS_2)$  则认为模板  $S^5 = (x_{j-2}, x_{j-1}, \dots, x_{j+2})$  为非光滑模板。

该引理基于这样的事实,

(i) 对于模板  $S^5 = (x_{j-2}, x_{j-1}, \dots, x_{j+2})$  如果  $S^5$  不包含间断, 则  $\tau_5 \ll IS_k$ , 其中  $k = 1, 2, 3$ ;

(ii) 如果解在某些模板  $S_k^3$  上连续, 但是在整个模板  $S^5$  上间断, 则对于光滑模板  $IS_k \ll \tau_5$ ;

(iii)  $\tau_5 \ll \max(IS_0, IS_1, IS_2)$ 。

满足引理1的单元  $I_j$ , 我们认为为问题单元。

## 2 数值算例

本文中时间推进应用三阶 Runge-Kutta 方法。

### 2.1 线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 \leq x \leq 1$$

周期边界条件, 初始条件为  $u(x, 0) = u_0(x)$

$$(1) u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(G(x, \beta, z - \delta) + G(x, \beta, z + \delta) + 4G(x, \beta, z)) & -0.8 \leq x \leq -0.6 \\ 1 & -0.4 \leq x \leq -0.2 \\ 1 - 10(x - 0.1) & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \frac{1}{6}(F(x, \alpha, a - \delta) + F(x, \alpha, a + \delta) + 4F(x, \alpha, a)) & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

初始条件包含一个光滑的高斯波、一个方波、一个三角波和一个半圆波。其中,

$$G(x, \beta, z) = e^{-\beta(x-z)^2},$$

$$F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x - a)^2, 0)},$$

常数取值  $a = 0.5$ ,  $z = -0.7$ ,  $\delta = 0.005$ , 和  $\beta = \log 2 / 36\delta^2$ 。有限紧致格式应用不同识别方法在  $t=8$  时刻计算结果在图 1 中画出。可以看到, 总体来说, 除了 ATV 识别方法在捕捉方波时存在振荡, 另外几种识别方法都能较稳定的计算四种波形。精度方面对于高斯波、三角波以及方波, SZ 识别方法具有明显的优势, 然后是 TVB 识别方法; 对于半圆波除了 ATV 识别方法外其他的识别方法计算结果都高于真解, KXRCF 识别方法精度效果最好, 然后是 TVB 以及 SZ 识别方法。

(2)  $u_0(x) = \sin(\pi x)$

这一问题用来简单的测试各种激波识别方法对于光滑函数准确识别能力，对比计算为全域紧致格式计算和全域 WENO-Z 格式计算结果。从表 1 中我们可以看出，SZ 识别方法下有限紧

致格式有同于紧致格式的计算结果，表明 SZ 识别器能准确的将整个正弦波函数识别为光滑。其他识别方法如 KXRCF 识别方法也有较好的识别效果。

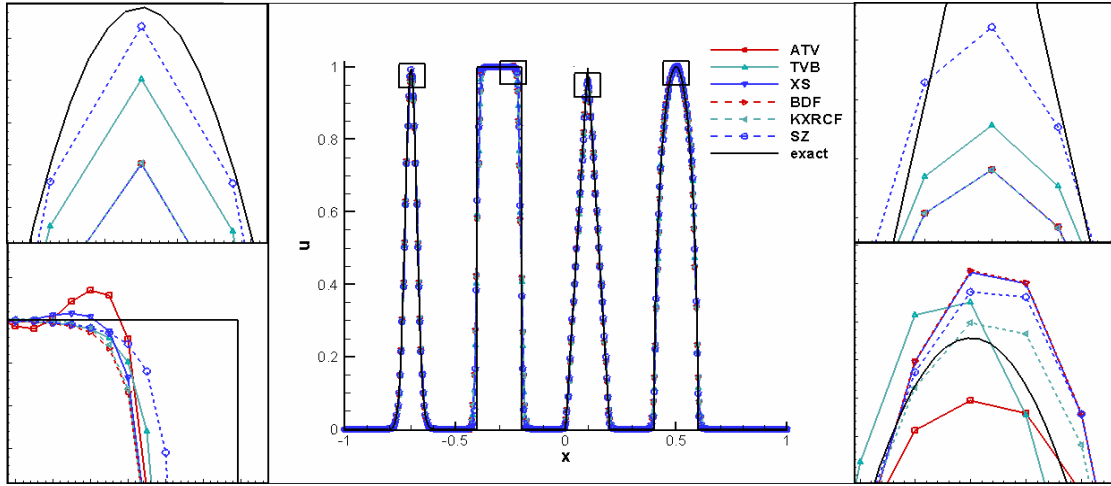


图 1 对流方程组合波算例，T=8（左上、左下、右上和右下依次对应四种波形）

表 1 对流方程  $u = \sin(\pi x)$  函数  $L_\infty$  误差,  $t = 10, dx=0.02$

识别方法	$L_\infty$ 误差	识别方法	$L_\infty$ 误差
Wenoz	5.613E-007	TVB	4.217E-007
BDF	5.613E-007	KXRCF	2.566E-007
XS	5.593E-007	SZ	2.071E-007
ATV	5.593E-007	紧致格式	2.071E-007

## 2.2 一维激波管问题

一维欧拉方程组可以写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{bmatrix},$$

$$p = (\gamma - 1)(\rho e - \rho u^2 / 2), \gamma = 1.4.$$

(1) Shu-Osher 激波熵波作用问题[24]

初值条件为,

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.3333), & \text{where } x < -4 \\ (1 + \varepsilon \sin(5x), 0, 1.0) & \text{where } x \geq -4 \end{cases}$$

本问题描述的是一个马赫数为 3 的激波和一个正弦熵波的相互作用。图 2 中是应用不同识别方法的有限紧致格式计算结果，其中“精确解”为节点为 2000 时的数值解。可以看出，在从波峰波谷放大图可以看到 SZ 识别方法具有最接近真解效果，TVB 识别方法效果也很好，而 KXRCF 识别方法和 BDF 识别方法分别在波峰和波谷表现出较好的效果。

(2) Lax 激波管问题

初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528), & \text{where } x < 5 \\ (0.5, 0, 0.571) & \text{where } x \geq 5 \end{cases}$$

计算区域为  $[-5, 5]$ ，计算时间为  $t = 1.3$ 。图 3 为不同识别方法下有限紧致格式计算结果。

“精确解”为网格加密至 2000 计算结果。由放大图可以看出 ATV, TVB, XS, KXRCF 都有或多或少的振荡, KXRCF 识别方法振荡最为剧烈。SZ 识别方法的精度效果最好, BDF 识别方法也有较好的效果。

(3) 爆炸波问题

本问题包含爆炸波相互作用和复杂的光滑区域。初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000), & \text{如果 } 0 \leq x < 0.1, \\ (1, 0, 0.01) & \text{如果 } 0.1 \leq x < 0.9, \\ (1, 0, 100) & \text{如果 } 0.9 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

边界条件为反射边界条件, 计算域为  $[0, 1]$ , 计算时间为  $t = 0.038$ 。从图 4 可以到, 波峰处 SZ 识别方法和 AVT 识别方法有较好的效果, 然后是 TVB 识别方法。极小值处 KXRCF 识别方法最佳, 第 3 张放大图是梯度较大的光滑区域, SZ 识别方法有最精确的效果。

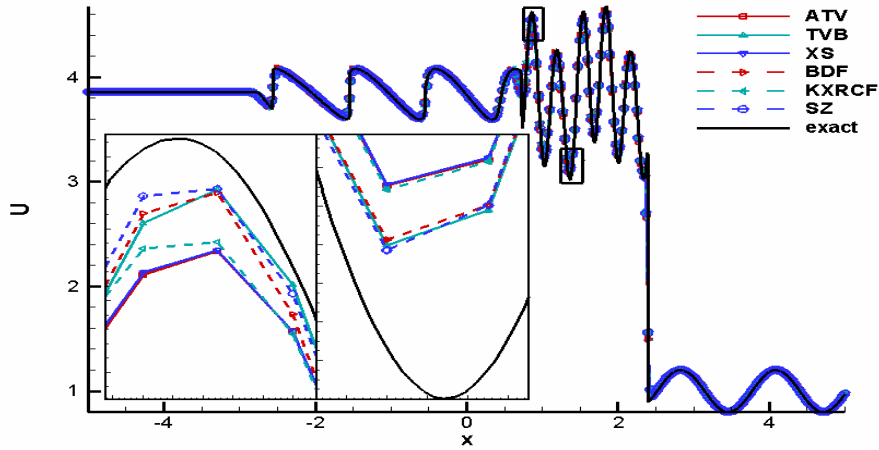


图 2 密度, Shu-Osher 激波管问题,  $T=1.8$ ,  $dx=0.025$

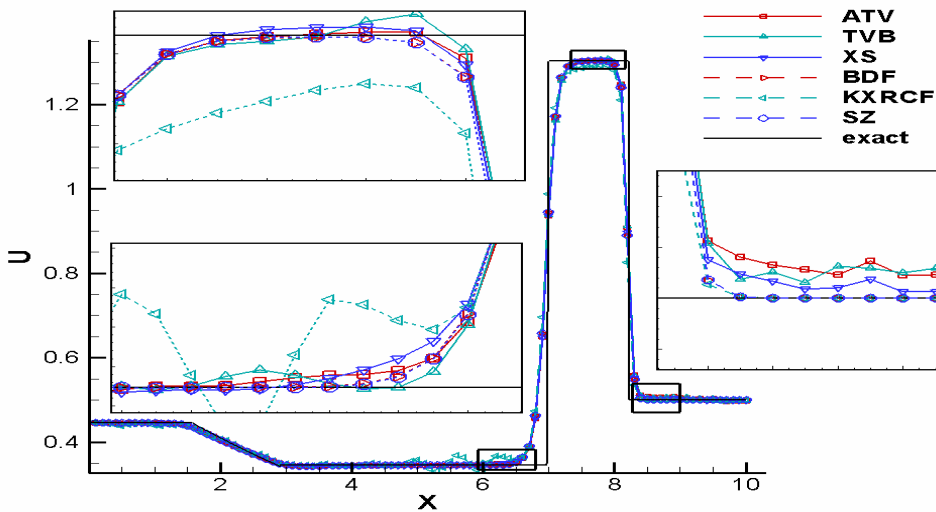


图3 密度, Lax 问题,  $T=1.3$ ,  $dx=0.02$

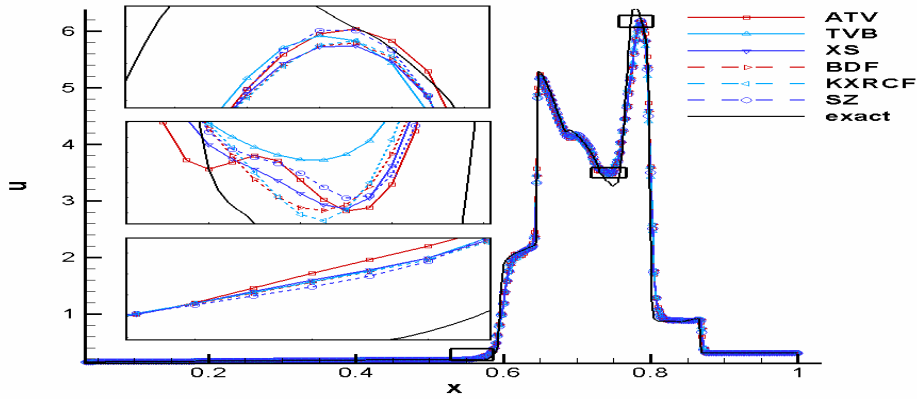


图4 密度, 爆炸波问题,  $T=1.8$ ,  $dx=0.0025$

### 2.3 二维问题

二维欧拉方程组为,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$\text{其中 } U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho e + p) \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho e + p) \end{bmatrix},$$

$$p = (\gamma - 1) \left[ \rho e - \rho \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right], \gamma = 1.4$$

#### (1) 二维气体动力学问题

我们考虑文献[25]中提出的 2D 气体动力学问题, 本问题的初始条件为,

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.5, 0, 0, 1.5) & \text{if } 0.8 \leq x \leq 1, 0.8 \leq y \leq 1, \\ (0.5323, 1.206, 0, 0.3) & \text{if } 0 \leq x < 0.8, 0.8 \leq y \leq 1, \\ (0.138, 1.2606, 1.206, 0.029) & \text{if } 0 \leq x < 0.8, 0 \leq y < 0.8, \\ (0.5323, 0, 1.206, 0.3) & \text{if } 0.8 < x \leq 1, 0 \leq y < 0.8. \end{cases}$$

计算域为  $[0,1] \times [0,1]$ , 计算时间为  $t = 0.8$ 。

图 5 为不同识别方法下有限紧致格式计算结果以及局部放大图, 用 WENOZ 格式计算结果以及加密网格 WENOZ 结果作为对照, 可以看出, 效果最好的为 SZ 识别方法能捕捉到更详细的小尺度结构; 然后是 TVB 识别方法也有优于 WENOZ 格式的结果; 而 KXRCF 识别方法和 BDF 识别方法对于小尺度结构捕捉能力的改善不明显, 效果最差的是 ATV 识别方法和 XS 识别方法, 会造成计算域不稳定振荡, 计算效果甚至差于 WENOZ 格式。

#### (2) 二维双马赫反射算例

本算例只采用上一算例中无振荡的四种识别方法, 即 TVB、KXRCF、BDF 以及 SZ 激波识别方法进行比较。本算例为一个正激波垂直的打在一个倾斜一定角度的楔上, 计算域选取为  $[0,4] \times [0,1]$ , 下边界  $1/6 \leq x \leq 4$  采用反射边界条件, 在  $x = 1/6, y = 0$  存在一个马赫数为 10 的右行激波, 和  $x$  轴成 60 度角。下边界  $0 \leq x < 1/6$  采用精确的波后条件。上边界采用马赫数为 10 的运动激波条件, 左右边界分别采用进出口边界条件。波前密度为 1.4 压强为 1。计算时间为 0.2。图 6 给出各种识别方法下有限紧致格式计算结果比较, 可以看出对于小

尺度结构 SZ 识别方法有最好的捕捉效果，而 TVB 识别方法也有较好的效果。

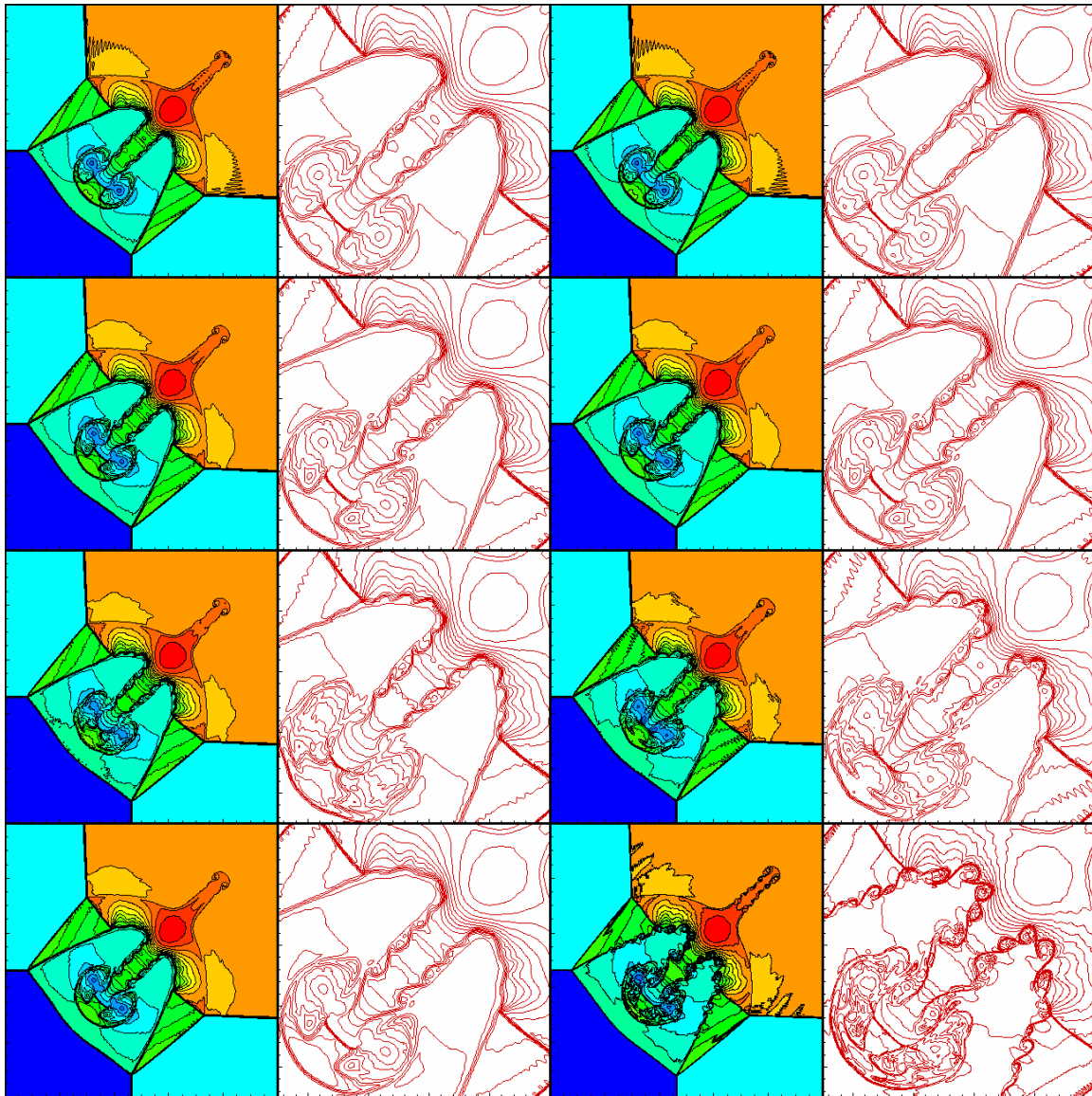


图 5 密度，气体动力学问题， $T=0.8$ ， $dx=dy=0.0025$  (从左到右，上到下依次为 ATV、XS、BDF、KXRCF、TVB、SZ 识别方法下 FC 格式，最后一排为  $400 \times 400$  网格下 WENOZ 格式以及  $800 \times 800$  网格下 WENOZ 格式)

### 3 结 论

本文我们将一系列激波识别方法引入有限紧致格式中，并计算了一维对流方程、欧拉方程及二维欧拉方程算例，通过结果比较可以得出在各种算例中 SZ 识别方法都有优于其他识别方法的计算效果的结论。并且我们可以看到，一些识别方法如 TVB，KXRCF 及 BDF 识

别方法也能达到无振荡的目的，但是并不能在每种工况中都能准确的判断激波而达到很好的计算结果。进一步的，我们可以将 SZ 激波识别方法推广到现存的需要进行激波识别的格式中，如杂交格式及自适应人工粘性格式等，改善对激波捕捉效果，还能据此构造新的格式。



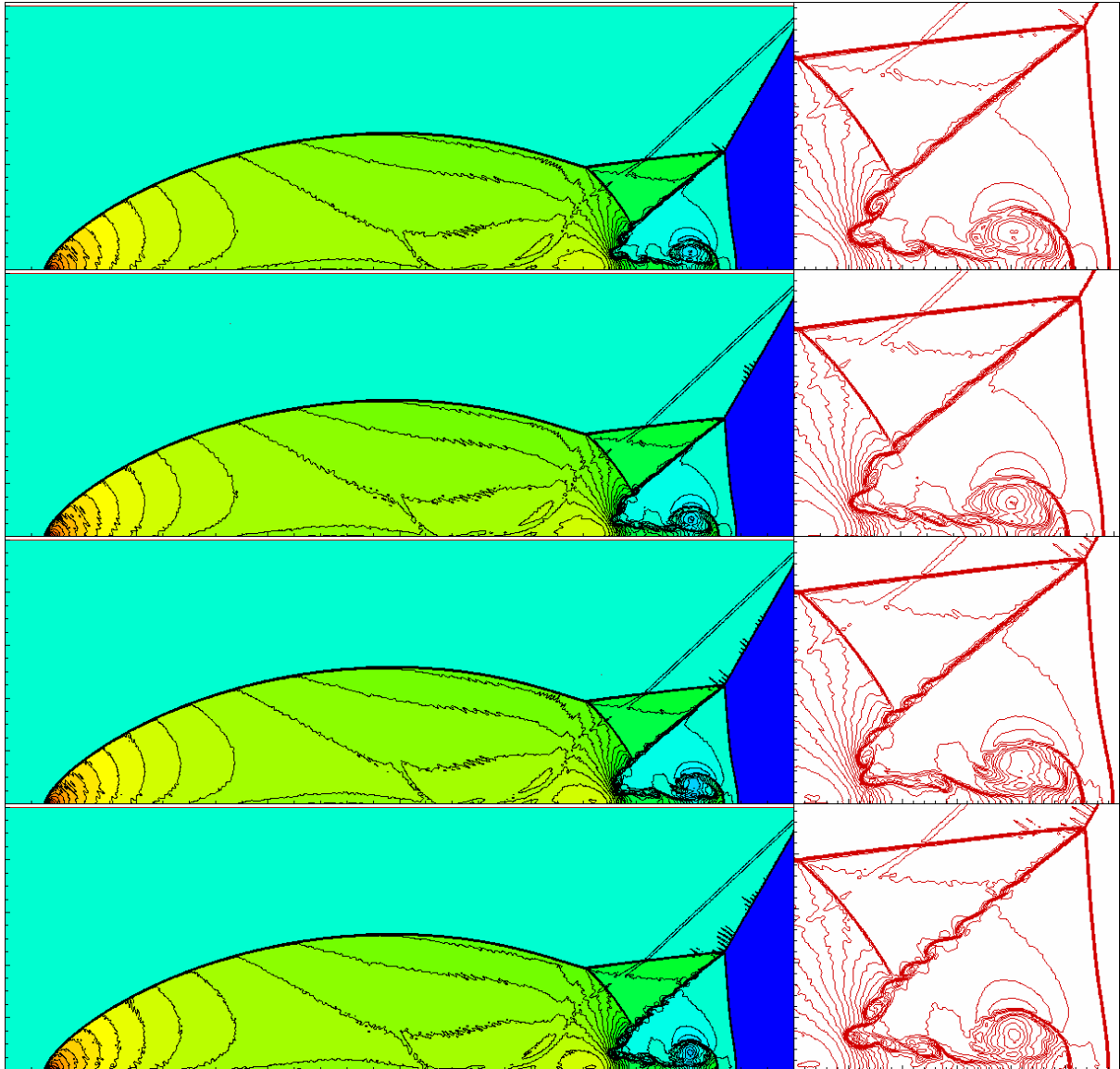


图 6 密度，双马赫反射问题， $T=0.2$ ，网格数  $1600 \times 400$  (从上到下依次为 BDF、KXRCF、TVB、SZ 识别方法下 FC 格式)

### 参考文献

- 1 Sergio Pirozzoli, Numerical Methods for High-Speed Flows. *Annu Rev Fluid Mech* 43(2011)163 - 94.
- 2 X.D. Liu, S. Osher, T. Chan, Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics* 115 (1994) 200 - 212.
- 3 G.S. Jiang, C.W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics* 126(1996)202 - 228
- 4 D.S. Balsara, C.-W. Shu, Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy, *Journal of Computational Physics* 160 (2000) 405 - 452.
- 5 G.A. Gerolymos, D. Senechal, I. Vallet, Very-high-order WENO schemes, *Journal of Computational Physics* 228(2009)8481-8524.
- 6 S.H. Zhang, S.F. Jiang, C.W. Shu, Development of nonlinear weighted compact schemes with increasingly higher order accuracy, *Journal of Computational Physics* 227 (2008) 7294 - 7321.
- 7 Adams NA, Shariff K. 1996. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems. *J. Comput. Phys.* 127:27 - 51
- 8 S. Pirozzoli, Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction. *Journal of Computational Physics* 2002; 178:81 - 117.
- 9 Y.X. Ren, M.E. Liu, H.X. Zhang, A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics* 192 (2003) 365 - 386.

- 10 Q. Zhou, Z.H. Yao, F. He, M.Y. Shen, A new family of high-order compact upwind difference schemes with good spectral resolution, *Journal of Computational Physics* 227 (2007) 1306 - 1339.
- 11 Y.Q. Shen, G.C. Zha, Generalized finite compact difference scheme for shock/complex flowfield interaction, *Journal of Computational Physics* 230(2011)4419 - 4436.
- 12 D. J. Hill, D. I. Pullin, Hybrid tuned center-difference-WENO method for large eddy simulations in the presence of strong shock, *Journal of Computational Physics* 194(2004) 435 - 450.
- 13 C. Pantano, R. Deiterding, D.J. Hill and D.I. Pullin, "A low numerical dissipation patch-based adaptive mesh refinement method for large-eddy simulation of compressible flows, *Journal of Computational Physics* 221(2007) 63 - 87.
- 14 B. Cosat, W.S. Don, High order hybrid central-WENO finite difference scheme for conservation laws, *Journal of Computational Physics* 204(2007)209 - 218.
- 15 G. Li, J.X. Qiu, Hybrid weighted essentially non-oscillatory schemes with different indicators, *Journal of Computational Physics* 229(2010)8105 - 8129.
- 16 Y.-Q. Shen, G.-W. Yang, Z. Gao, High-resolution finite compact difference schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics* 216 (2006) 114 - 137.
- 17 Y.-Q. Shen, G.-W. Yang, Hybrid finite compact-WENO schemes for shock calculation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 53 (2007)531 - 560
- 18 J. Qiu, C.-W. Shu, A comparison of troubled-cell indicators for Runge - Kutta discontinuous Galerkin methods using weighted essentially nonoscillatory limiters, *SIAM Journal of Scientific Computing* 27 (2005) 995 - 1013.
- 19 B. Cockburn, S.-Y. Lin, C.-W. Shu, TVB Runge - Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element for conservation laws III: one dimensional systems, *Journal of Computational Physics* 84 (1989) 90 - 113.
- 20 R. Biswas, K. Devine, J. Flaherty, Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws, *Applied Numerical Mathematics* 14 (1994) 255 - 283.
- 21 L. Krivodonova, J. Xin, J.-F. Remacle, N. Chevaugeon, J. Flaherty, Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws, *Applied Numerical Mathematics* 48 (2004) 323 - 338.
- 22 R. Borges, M. Carmona, B. Costa, W.S. Don, An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics* 227 (2008) 3191 - 3211.
- 23 S. Pirozzoli, Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction, *Journal of Computational Physics* 178 (2002) 81 - 117.
- 24 C.W. Shu, S. Osher, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II, *J. Comput. Phys.* 83 (1989) 32 - 78.
- 25 C.W. Schulz-Rinne, J.P. Collins, H.M. Glaz, Numerical solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics, *SIAM J. Sci. Comput.* 14 (6)(1993) 1394 - 1414

## COMPARISON OF DIFFERENT SHOCK DETECTORS FOR FINITE COMPACT SCHEME

LIU Li SHEN Yiqing

(Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

**Abstract** Hybrid methods are constructed to overcome the excessive numerical dissipation in WENO schemes. Using WENO schemes near the discontinuities and the low dissipation linear schemes in smooth regions, hybrid methods have good effect in direct numerical simulation and large eddy simulation of interaction of shock waves/complex flows which have both shock waves and fine flow structures. Discontinuity detector is used to determine the discontinuities and the accuracy of it greatly influence the performance of hybrid methods. The accuracy and property of non-oscillatory are compared to test the performance of different detectors. At the end of this paper a conclusion in details is given.

**Key words** Numerical method, weighted essentially non-oscillatory scheme, shock wave, hybrid method.