

基于非结构网格间断有限元方法的不同间断识别器和限制器的比较

赵文赓, 郑洪伟

中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京海淀区 100190

摘要 间断有限元方法 (DG) 在很多问题中显示了很好的性能。但是随着研究的不断深入, 对于限制器的研究已经成为限制 DG 发展的瓶颈。本文首先介绍了 DG 的基本算法, 然后详细分析各种不同间断识别器和限制器的原理, 包括 Cockburn 限制器、Barth 限制器、KXRCF 识别器等, 最后通过数值试验验证不同的间断识别器和限制器对于计算结果的影响并给出相关结论。

关键词 高阶精度, 间断有限元, 间断识别器, 限制器

引言

间断有限元方法 (DG) 在最近一段时间获得了长足的发展, 已经在很多问题中显示出了很好的性能, 引起了越来越多学者的重视[1-4]。但是, 随着研究的不断深入, 时至今日, 对于限制器的研究已经成为影响 DG 发展的瓶颈。

众所周知, 由于在高速可压缩流体的计算中存在激波等物理间断, 如何能够有效地捕捉间断成为几乎所有的数值计算方法的难点。当计算格式的精度为一阶时, 算法自身的耗散足以抑制激波附近的数值振荡; 当计算精度高于一阶时, 算法的耗散减小, 在激波附近会产生非物理的振荡, 严重时, 甚至会导致计算失败。

间断有限元方法的基函数在单元间是间断的, 因而对于捕捉激波有明显的优势, 并且有文献指出, 当激波位于单元交界面的时候, 并不需要特殊的处理就可以很好地捕捉到激波, 但是, 当激波位于单元内部的时候, 必须采用特殊的方法来抑制单元内的振荡。一种方法是采用添加人工粘性的方法来捕捉激波。作为一种传统的捕捉激波技巧, 该方法在 DG 的框架下仍能够有效地捕捉到激波, 获得不错的结果[5]。但是由于该方法引入了人为参数, 而参数需要根据具体问题

确定, 这使得该方法的通用性大大减弱。另外一种方法是通过使用限制器来抑制振荡。此种方法一般分为两个步骤, 首先利用间断识别器确定“问题单元”, 即对于哪些单元进行限制。常见的间断识别器有 Cockburn 识别器、矩识别器、KXRCF 识别器、Physics-based 识别器和 Herten 子单元识别器; 其次, 利用不同的限制器对于问题单元进行限制, 以消除激波附近产生的虚假振荡[6], 几种比较常见的限制器有 Cockburn 提出的基于 minmod 函数的限制器, Barth 限制器, 矩限制器, HWENO 限制器等。此外, 由于非结构网格对于复杂几何外形有很好的适应性, 因而在实际工程中经常采用非结构网格进行网格划分。但是, 非结构网格拓扑结构复杂, 因而如何将限制器应用于非结构网格中是个不小的挑战。本文重点研究的是可以应用于非结构化网格中的间断识别器和限制器。文章的结构如下: 第一部分阐述了 DG 基本算法, 第二部分详细介绍了几种常见的间断识别器和限制器的原理, 第三部分为数值试验的结果, 最后给出相关的结论。

1 DG 算法介绍

以二维无粘守恒型的欧拉方程为例

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

上式的矢量形式为： $\mathbf{u}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$,

其中 $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}$$

这里， ρ 、 u 、 v 、 p 、 E 分别表示气体密度， x 方向的速度分量， y 方向的速度分量，压强，以及单位体积上的总能量。为了使方程组封闭，需要加入理想气体状态方程：

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right)$$

如果给定合适的初边值条件，就可以在求解域 Ω 内寻找数值解。求解该方程的主要困难在于即使初始条件是光滑的，解中仍然可能包含间断。

1.1 空间离散

控制方程乘以试函数 φ ，并在域 Ω 内积分，然后分部积分得到弱形式：

$$\int_{\Omega} \varphi \mathbf{u}_t dV + \oint_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{F} dV = 0$$

将求解域离散为若干互不重叠的单元，并在每个单元 T_i 内采用加权余量形式的积分得到半离散的格式。假设解和试函数都是分片多项式的形式。多项式的基底可以表示为 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) = \{\xi_1(\mathbf{r}), \dots, \xi_n(\mathbf{r})\}^T$ 。在单元 T_i 内，解和试函数分别可以表示为：

解和试函数分别可以表示为：

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^n Q_i^j(t) \xi_j(\mathbf{r}), \quad \varphi_h = \sum_{j=1}^n \varphi_h^j \xi_j(\mathbf{r})$$

将 $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$ 和 φ_h 带入分部积分的弱形式中得到：

将 $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$ 和 φ_h 带入分部积分的弱形式中得到：

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} \xi_j \mathbf{u}_i dV + \oint_{\partial T_i} \xi_j \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{T_i} \nabla \xi_j \cdot \mathbf{F} dV = 0 \quad (2)$$

上式中，由于插值函数在单元的边界上是间断的，因而需要确定单元边界上的流通量。在半离散的方程中，流通量函数用数值通量函数 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h^-, \mathbf{u}_h^+)$ 代替。其中，数值通量

取决于 \mathbf{u}_h^- 、 \mathbf{u}_h^+ 和 \mathbf{n} ，并且要满足一致性条件，本文采用局部 Lax-Friedrichs 通量。

令 $\mathbf{U}^i = \{Q_i^1, \dots, Q_i^n\}^T$ ，并带入上式中得：

$$\int_{T_i} \xi_j \xi_j(\mathbf{r}) dV \sum_{j=1}^n \frac{dQ_i^j(t)}{dt} + \int_{\partial T_i} \xi_j \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{T_i} \nabla \xi_j \cdot \mathbf{F} dV = 0$$

令 $W^i = \int_{T_i} \xi_j \xi_j dV$ 带入上式中：

$$W^i \frac{d\mathbf{U}^i}{dt} + \int_{\partial T_i} \xi_j \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{T_i} \nabla \xi_j \cdot \mathbf{F} dV = 0$$

最后整理可以变为：

$$\frac{d\mathbf{U}^i}{dt} = \mathbf{R}^i(\mathbf{U}) \quad (3)$$

其中 $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ 为余量，在单元 T_i 内其表达式为：

$$\mathbf{R}^i(\mathbf{U}) = - \left(W^i \right)^{-1} \left(\oint_{\partial T_i} \boldsymbol{\xi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{T_i} \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F} dV \right)$$

1.2 时间离散

利用显式龙格库塔格式进行时间离散。为了在时间上获得高阶的精度，使用 TVD 龙格库塔时间离散进行时间推进。例如，最常用的三步龙格库塔时间离散格式为：

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{U}^n) \\ \mathbf{U}^{(2)} = \frac{3}{4} \mathbf{U}^n + \frac{1}{4} [\mathbf{U}^{(1)} + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(1)})] \\ \mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{3} \mathbf{U}^n + \frac{2}{3} [\mathbf{U}^{(2)} + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(2)})] \end{cases} \quad (4)$$

2 间断识别器和限制器

众所周知，由于在高速可压缩流体的计算中存在激波、接触间断等物理间断，如何能够有效地捕捉间断成为几乎所有的计算方法的难点，因而对于激波的捕捉能力也成为评价一种数值方法优劣很重要的一个方面。

对于 DG 而言，在流场中的光滑区，该方法可以很容易地获得高阶精度；在含有间断的流场中，计算中会出现数值振荡，严重时压力和密度出现负值，导致计算失败。为了抑制单元内的振荡，需要使用限制器，此种方法一般分为两个步骤，首先利用间断识别器确定“问题单元”，即对于哪些单元进行限制；其次，利用不同的限制器对于问题单元进行限制，以消除激波附近产生的虚假振荡。由于 DG 对于限制器比较敏感，不同限制器会不同程度地影响 DG 格式的精度，因而一种高效、稳健的限制器对于 DG 的高阶精度的实现起着重要的作用。下面详细介绍间断识别器和限制器。

2.1 间断识别器

识别当前计算单元是否位于间断附近是抑制振荡中很重要的一步。如果很多问题单元没有被识别出来而放弃对其进行限制，则无法实现最初消除数值振荡的目的；如果光滑区的单元被误识别为问题单元并进行限制，则容易使得解的精度降低，并且计算量会增加。常用的几种识别器如下。

1、Cockburn 间断识别器[4]。该识别器最早是由 Cockburn 在发明龙格库塔间断伽辽金方法（RKDG）时提出的。

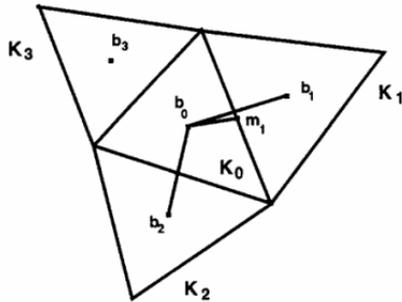


图 1：三角形单元中，Cockburn 限制器示意

在三角形网格中，我们按照如下的思路采取限制，对于图 1，存在如下几何关系：

$$m_1 - b_0 = \alpha_1 (b_1 - b_0) + \alpha_2 (b_2 - b_0)$$

其中 α_1 和 α_2 为非负，其大小与几何有关。如果 u_h 为线性函数，并且在单元间是连续的，则有

$$\begin{aligned} u_h(m_1) - u_h(b_0) &= \\ \alpha_1 (u_h(b_1) - u_h(b_0)) &+ \alpha_2 (u_h(b_2) - u_h(b_0)) \end{aligned}$$

令

$$\tilde{u}_h(m_1, K_0) \equiv u_h(m_1) - \bar{u}_{K_0}$$

$$\Delta \bar{u}(m_1, K_0) = \alpha_1 (\bar{u}_{K_1} - \bar{u}_{K_0}) + \alpha_2 (\bar{u}_{K_2} - \bar{u}_{K_0})$$

则有：

$$\Delta_i = \bar{m}(\tilde{u}_h(m_1, K_0), \nu \Delta \bar{u}(m_1, K_0))$$

\bar{m} 为具有 TVB 性质的修改后的 minmod 函数，即当差量 $\tilde{u}_h(m_1, K_0)$ 为小量时，放弃限制。使用该函数可以有效地减少在光滑区附近对于不必要单元进行限制， \bar{m} 的形式如下：

$$\bar{m}(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} a_1 & \text{if } |a_i| \leq M \Delta x^2 \\ m(a_1, \dots, a_m) & \text{otherwise} \end{cases}$$

如果 $\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$ ，则该单元不需限制；

如果该条件不被满足，则该单元为问题单元，需要采用限制器进行限制。

2、KXRCF 识别器[7]。Adjerid 等人在研究过程中发现：在 DG 中，解为光滑的情况下，在单元的出流边界存在很强的超收敛特性[8]。当试函数的次数为 P 阶时，全局的收敛率为 $O(h^{P+1})$ ，但光滑解的单元出流边界的收敛率为 $O(h^{2P+1})$ ，利用 DG 的这一特性可以知道：处于间断解区域的单元与处于光滑解区域的单元与其相邻单元之间的差

值有不同而量级，进而可以构造相应的间断识别器，用于识别问题单元。

这样该思路，构造如下形式的间断识别器：

$$I_j = \frac{\left| \int_{\partial\Omega_j} (Q_j - Q_{nbj}) ds \right|}{h^{(p+1)/2} \|\partial\Omega_j^-\| \|Q_j\|} \quad (5)$$

$$\text{当解光滑时, } I_j \sim O\left(h^{\frac{1}{2}(p+1)}\right), h \rightarrow 0$$

或者 $p \rightarrow \infty$ 时, $I_j \rightarrow 0$; 当解间断时,

$$I_j \sim O\left(h^{-\frac{1}{2}(p+1)}\right), h \rightarrow 0 \text{ 或者 } p \rightarrow \infty \text{ 时,}$$

$$I_j \rightarrow \infty$$

间断识别器判别标准为：

$$\begin{cases} \text{如果 } I_j > 1 & q_{\partial\Omega_j} \text{ 光滑} \\ \text{如果 } I_j < 1 & q_{\partial\Omega_j} \text{ 间断} \end{cases}$$

需要指出的是，很多间断识别器是基于一维单元出发的，当扩展到多维单元中时，会遇到各种各样的问题，例如 minmod 在一维单元中具有 TVB 性质在二维问题中尚无法证明。一般而言，对于双曲方程系统，确定问题单元之后，可以选择守恒量或者特征量作为检验是否限制的标准：前者对于解向量的每个分量分别测试，很容易实现，但是容易将更多的单元识别为问题单元；后者对于局部的特征分量进行测试，计算量会增加，但是更加精确[4]。

2.2 限制器

当采用如上所述的间断识别器将某些单元识别为问题单元之后，需要采用不同的方法对其进行限制以抑制振荡。由于 DG 方法对于限制器比较敏感，限制器的引入会对原有 DG 格式的精度产生影响。对于间断识别器而言，虽然不同的识别器有优劣之分，但是，问题单元的识别只能是一个相对模糊的过程，并不严格，总会存在一些虽然内部梯度很大但是并不存在间断的单元会被误识

别为问题单元。综上，我们希望 DG 中的限制器具有高效、稳健、对识别器不敏感和具有高阶精度的特点。此处，我们列举了几种常见的限制器。

2.2.1 Cockburn 限制器

Cockburn 和 Shu 提出 RKDG 方法的同时，也给出了一种 TVB 性质的斜率限制器

$\Lambda\Pi_h$ ，并且该限制满足一下三个特性：

(1) 精度要求：如果 u_h 是线性的，

$$\text{则有 } \Lambda\Pi_h u_h = u_h$$

(2) 守恒性： $\int_K \Lambda\Pi_h u_h = \int_K u_h$

(3) 斜率限制： $\Lambda\Pi_h u_h$ 的梯度不大

于 u_h 的梯度

按照 Cockburn 识别器的思路，如果

$$\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0, \text{ 则不用限制；如果该条件不被}$$

满足，则

$$pos = \sum_{i=1}^3 \max(0, \Delta_i), neg = \sum_{i=1}^3 \max(0, -\Delta_i)$$

令

$$\theta^+ = \min\left(1, \frac{neg}{pos}\right), \theta^- = \min\left(1, \frac{pos}{neg}\right)$$

$$\hat{\Delta}_i = \theta^+ \max(0, \Delta_i) - \theta^- \max(0, -\Delta_i)$$

限制后的单元为：

$$\Lambda\Pi_h u_h(x, y) = \bar{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^3 \hat{\Delta}_i \varphi(x, y) \quad (6)$$

对于高阶精度的 DG 格式，采用如下假设： u_h 中的虚假振荡只出现在 u_h 中的一阶

部分；即如果在 u_h^1 中没有振荡，

$u_h^1 = \Lambda\Pi_h u_h^1$ ，则不需要进行限制；相反，

如果 $u_h^1 \neq \Lambda\Pi_h u_h^1$ ，则砍掉高阶部分，并对

于低阶部分进行限制， $\Lambda \Pi_h u_h = \Lambda \Pi_h u_h^1$

2.2.2 Barth 限制器

该限制器是 Barth 等于 1989 年提出[9]，并应用于有限体积法中；Adjerid 和 Krivodonova 等人将该方法引入到了间断有限元中，并获得了成功。

Barth 限制器的思想：限制单元的斜率使其单元边界上的每个积分点的值处于相邻单元的平均最大值和最小值之间：

$$\bar{U}_i^{\min} \leq U_i(x_j) \leq \bar{U}_i^{\max}$$

$U_i(x_j)$ 表示单元边界面上高斯积分点的

的值， \bar{U}_i^{\min} 和 \bar{U}_i^{\max} 为相邻单元的平均最小值和最大值（包括单元本身）。如果单元内任意一数值积分点不满足该条件，则对该单元进行限制：

$$U_i(x) = \bar{U}_i + \phi \nabla U \cdot (x - x_i)$$

其中， \bar{U}_i 为单元的平均值， x_i 为单元质心的坐标， x 为单元边界上某限制点的坐标。

$$\phi_j = \begin{cases} \min\left(1, \frac{\bar{U}_i^{\max} - \bar{U}_i}{U_i(x_j) - \bar{U}_i}\right), & \text{if } U_i(x_j) - \bar{U}_i > 0 \\ \min\left(1, \frac{\bar{U}_i^{\min} - \bar{U}_i}{U_i(x_j) - \bar{U}_i}\right), & \text{if } U_i(x_j) - \bar{U}_i < 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$\phi = \min\{\phi_j\} \quad (8)$$

3 数值试验

我们按照上述思路将 DG 以及相应的限制器应用于一维和二维问题的计算中。由于我们重点关注的是基于非结构网格的 DG 以及相应限制器的算法，因而对于很多一维问题，我们按照二维问题计算，采用三角形单元进行网格划分，结果按照一维格式输出。

3.1 二维激波管问题

计算域为 $[0,1]$ ，在 $x = 0.5$ 的地方有一个

隔膜将左右两侧的气体分开，两侧气体的状态量分别为：

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (1, 0, 1), & 0 \leq x < 0.5 \\ (0.1, 0, 0.125), & 0.5 \leq x \leq 1.0 \end{cases}$$

在 $t = 0$ 时，隔膜破裂，左侧的高压气体开始向右流动，在右侧形成激波，左侧形成膨胀波，中间存在接触间断，接触间断两侧，气体的压力、速度相等，但密度不同。计算时长为 $t = 0.2$ ，采用线性单元进行计算；计算时，Cockburn 限制器中 $M = 50$ ；KXRCF 识别器中，采用了熵和密度分别作为判断间断的标准。

从图 2 中限制的问题单元中可以发现，Cockburn 识别器和 KXRCF 识别器可以较好地识别出间断的位置；图 3 表示计算域内的密度和速度分布。从图中可以发现，这两种限制器都能够较好地捕捉到激波和接触间断等。



图 2: 不同限制器中“问题单元”(红色单元)的分布，由上到下分别为 Cockburn 限制器、KXRCF 熵判据和 KXRCF 密度判据

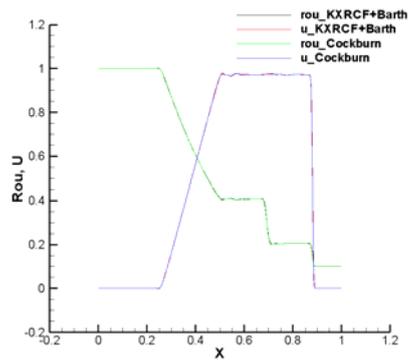


图 3: $t = 0.2$ 时，不同限制器在流场中密度和速度的分布

3.2 Shu-Osher 问题

该问题初始条件为：

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143, -0.920279, 10.33333) & x \leq 0 \\ (1 + 0.2 \sin(5x), -3.549648, 1.00) & 0 < x < 10 \\ (1.00000, -3.549648, 1.000000) & 10 \leq x \end{cases}$$

当扰动通过位于 $x = 0$ 的激波时，会产生小幅的振荡，如果数值方法耗散过大或者限制器无法很好地发挥作用，则振荡会被抑制掉。计算域 $[-10, 10]$ ，采用较粗的网格，网格尺寸 0.1，用网格尺寸为 0.01 的网格计算得到的解作为参考。

从图 4 和图 5 中可以发现 DG 格式对于激波和光滑波动解都算得较好。Cockburn 限制器和 Barth 限制器在不同的区域各有优劣。

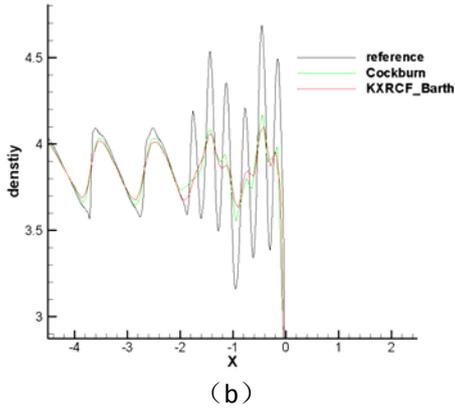
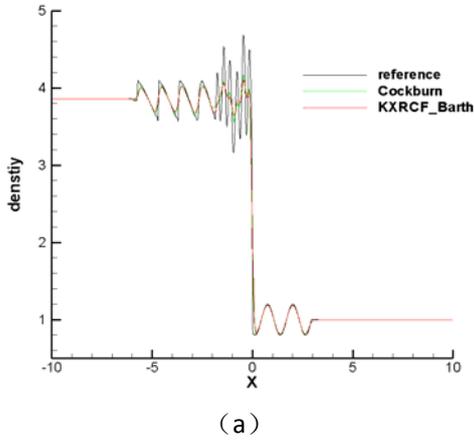
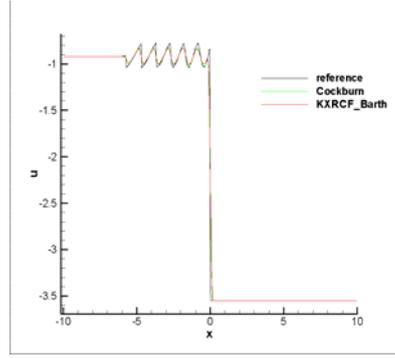
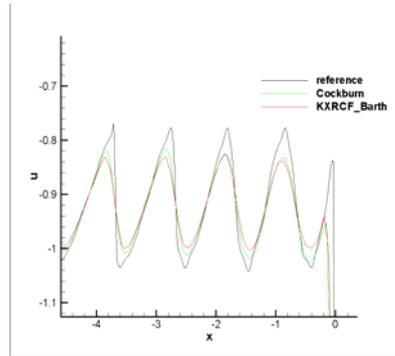


图 4: $t = 2.0$ ，不同限制器下密度分布



(a)



(b)

图 5: $t = 2.0$ ，不同限制器下速度分布

3.3 声音在空气中传播

声音在空气中的传播满足线化的欧拉方程，控制方程形式如下：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} P \\ u \\ v \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho_0 c^2 u \\ P/\rho_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \rho_0 c^2 v \\ 0 \\ P/\rho_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

上述方程中， ρ_0 为流体的密度， c 为流体中的声速， P 、 u 和 v 分别为扰动的压力、 x 方向的速度和 y 方向的速度。在求解该方程的过程中，单元边界上数值通量采用的是一维黎曼问题的精确解。例如，单元边界的单位法向量为 $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ ，单元左右两侧的压力和法向速度分别为 P^l ， v_n^l 和 P^r ， v_n^r 。相应的黎曼解为：

$$P = \frac{P^l + P^r}{2} + \rho_0 c \frac{v_n^l - v_n^r}{2}$$

$$v_n = \frac{v_n^l + v_n^r}{2} + \frac{1}{\rho_0 c} \frac{P^l - P^r}{2}$$

相应的数值通量为：

$$F_n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho_0 c^2 (v_n^l + v_n^r) \\ (P^l + P^r) n_x / \rho_0 \\ (P^l + P^r) n_y / \rho_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} c \begin{bmatrix} (P^l - P^r) \\ (v_n^l - v_n^r) n_x \\ (v_n^l - v_n^r) n_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

对于该问题，我们选取 0.1×1 的矩形求解域，左侧边界为周期性振动的壁面，并且壁面的速度已经给定：

$$u(0, t) = 1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi ft)$$

其中，频率 $f = 1500\text{Hz}$ ，右侧为出口边界，上下壁面满足滑动边界条件。

流体选择空气作为介质，声速为

$$c = 340\text{m/s}，\text{密度为 } \rho_0 = 1.224\text{kg/m}^3，$$

计算时长为 1.5×10^3 ，波长为 0.2266m 。初

始时刻，计算域内空气静止，

$P = u = v = 0$ 。求解网格尺寸为 0.02 ，网格和计算域如图 6 所示。对于计算结果中的

$$\text{压力采用归一化为 } p = \frac{P}{\rho_0 c}$$



图 6：线化欧拉方程求解域和网格

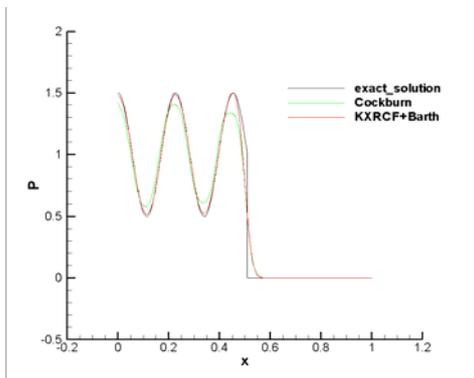


图 7：不同限制器计算结果比较

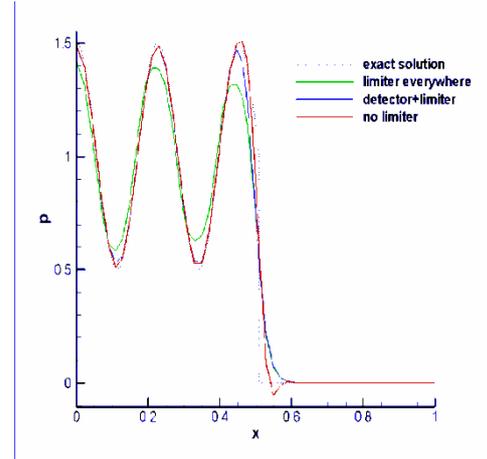


图 8：三种不同算法的结果：所有单元都进行限制，不适用限制器、采用识别器加限制器分别与精确解进行比较

图 7 中，两种不同限制器计算结果与精确解进行比较可以发现：在间断处，二者结果一致；在光滑区的极值点附近，KXRCF 识别器+Barth 限制器组合的计算结果明显优于 Cockburn 限制器，这是因为 Cockburn 限制器本质上属于 minmod 限制器，而 minmod 限制器在极值点会导致降阶。图 8 给出了三种不同计算方法下的结果，分别与精确解进行比较：对于所有单元进行限制时，在极值点计算结果比较差；不进行限制时，在间断处存在明显的振荡；而是用间断识别器加限制器的思路之后，在间断处能够很好地抑制振荡，并且光滑区仍然具有较好的计算结果，体现出了该方法的优点。

3.4 双马赫反射

该算例经常用来检验计算格式对于二维含间断流场的计算[10]。初始时刻，马赫数为 10 的正激波位于 $x = \frac{1}{6}, y = 0$ 处，并且向平板运动，激波与平板之间成 60° 。

计算域为 $[0, 4] \times [0, 1]$ ，如图 9 所示，红色边界为精确的波后状态量，绿色为波前边界，右侧为无穷远出口，下侧为无穿透绝热边界条件，具体处理方法参见[11]。计算采用三角形网格离散，网格大小为 0.01 。



图 9：初值及边界条件示意图

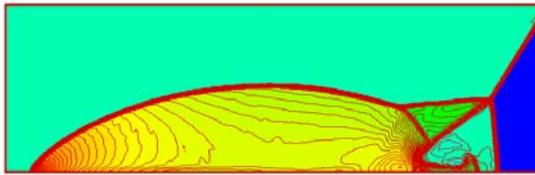


图 10：Cockburn 限制器下密度等值线

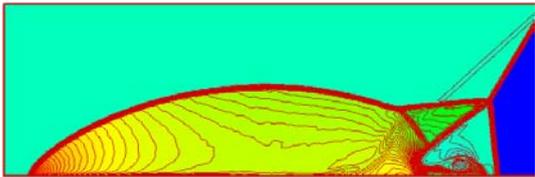


图 11：KXRCF+Barth 限制器下，密度等值线

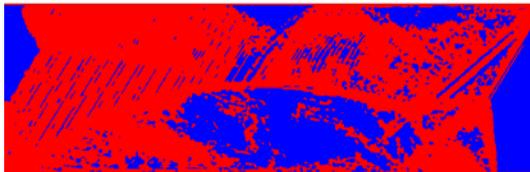


图 12：Cockburn 限制器下，问题单元分布（红色部分）

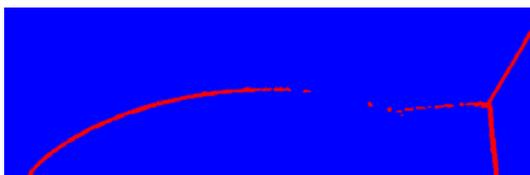


图 13：KXRCF+Barth 限制器下，问题单元分布（红色部分）

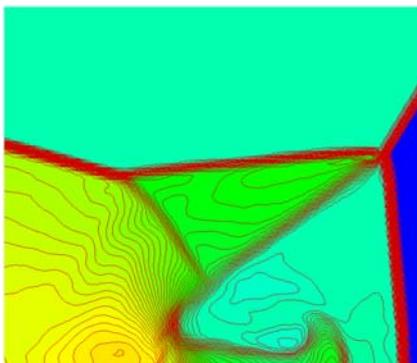


图 14：Cockburn 限制器下，流场局部细节

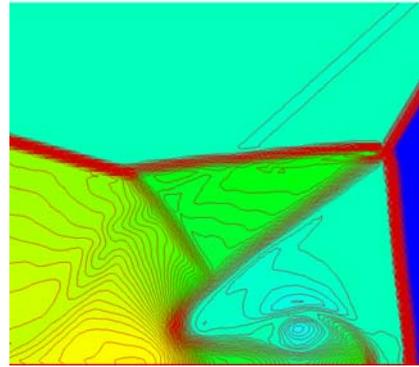


图 15：KXRCF+Barth 限制器，流场局部细节

分别比较图 10-15 可以发现，两种不同的限制器都能够较好地捕捉到激波，但是 KXRCF 识别器和 Barth 限制器的组合能够较好地捕捉流场的细节，并且能够很好地分辨出问题单元的位置，不会将很多非激波附近的问题单元进行误识别。

3.5 前台阶流动

该问题也被广泛地用作检验二维 Euler 方程计算格式优劣的一个标准算例。流场左侧为入口，右侧为出口，其余为无穿透绝热壁面。当马赫数为 3 的超声速流进入管道内时，会在钝头体前方形成弓形激波，弓形激波遇到壁面会发生反射并与钝头体前缘产生的斜激波相交，相交后的激波再次遇到壁面，形成复杂流场。网格大小为 0.02，计算到 $t = 4$ ，图 11 和图 12 给出了流场的密度云图。从计算结果可以看到，流场结构清晰，流场中的脱体弓形激波、反射激波、滑移线等都被很好地计算出来。两种限制器都能够较好的区分出激波所在的位置。

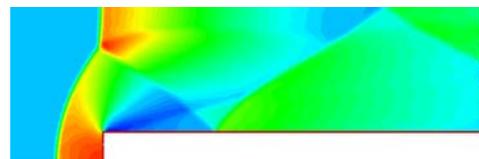


图 11：Cockburn 限制器，密度云图

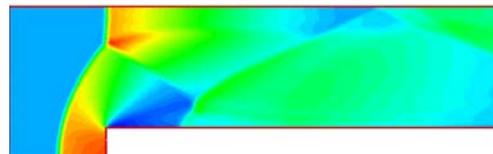


图 12：KXRCF+Barth 限制器，密度云图

4 结论

本文详述了基于非结构网格的间断有限元方法的基本算法。对于含间断的流场，需要抑制间断附近的数值振荡，常用的方法是采用“间断识别器”和“限制器”相结合的思路：为了保证光滑区域的精度不会受到影响和节省计算量，需要采用不同的间断识别器将间断附近的“问题单元”识别出来；然后利用不同种类的限制器进行限制，以抑制振荡。数值计算结果表明，基于 **minmod** 函数的 **Cockburn** 限制器，**KXRCF** 识别器能够高效而稳健地进行问题单元的识别和间断的捕捉，而不会引入过大的数值耗散，可以获得很好的数值结果。不同的算例中，二者表现各有优劣，相对而言，**KXRCF** 识别器和 **Barth** 限制器组合的性能更加优异。对于限制器的研究是 **DG** 研究的一个重点，本人将继续开展限制器方面的研究工作。

参考文献

- 1 B. Cockburn, C. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin Finite Element method for conservation laws II: General Frame Work, *Math. Comput.* 52(1989) 411-435.
- 2 B. Cockburn, S.-Y. Lin, C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one-dimensional systems, *J. Comput. Phys.* 84(1989) 90-113.
- 3 B. Cockburn, S. Hou, The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservaton laws IV: the multidimensional case, *Math. Comput.* 54(1990) 545-581.
- 4 B. Cockburn, C.-W. Shu, The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *J. Comput. Phys* 141(1998) 199-224.
- 5 P. O. Persson and J. Peraire. Sub-cell shock capturing for discontinuous Galerkin methods. *AIAA Paper* 2006-0112, 2006.
- 6 Qiu, J, and Shu, C.-W, A comparison of troubled-cell indicators for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods using WENO limiters. *SIAM J. Sci. Comput.* 27, (2005)995 - 1013.
- 7 L. Krivodonova, J. Xin, J.-F. Remacle, N. Chevaugeon, J.E. Flaherty, Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws, *Appl. Numer. Math.* 48 (2004) 323 - 338.
- 8 L. Krivodonova, J. Flaherty, Error estimation for discontinuous Galerkin solutions of multi dimensional hyperbolic problems, *Adv. Comput. Math.* 19 (2003) 57 - 71.
- 9 T. Barth, D. Jespersen, The design and application of upwind schemes on unstructured meshes, 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, *AIAA* 89-0366, 1989.
- 10 Woodward, P. Colella, The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks, *J. Comput. Phys.* 54(1984) 115 - 173.
- 11 J. Blazek: *Computational Fluid Dynamics: Principles And Applications*, Elsevier, 2001

Comparison of Different Discontinuity Detectors and Limiters of Discontinuous Galerkin Method Based on 2-D unstructured grids

ZHAO Wengeng, ZHENG Hongwei

State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, CAS, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China

Abstract In this paper, the discontinuous Galerkin method is studied. To capture the discontinuity without oscillation, discontinuity detector and limiter is applied. The Cockburn limiter based on minmod function, **KXRCF** detector and Barth limiter are discussed in detail to reveal how the limiters

work. Different numerical results show that these discontinuity detector and limiter can distinguish the trouble cell and restrict the oscillation effectively and the conclusion is given.

Key words high-order accuracy, discontinuous Galerkin method, discontinuity detector, limiter