

# 均匀各向同性湍流在后期衰变时的涡性结构

周培源

蔡樹棠

(北京大学数学力学系)

(中国科学院力学研究所)

## 提 要

流体力学工作者很早就認識到,湍流运动是由許許多多微小的渦旋运动所組成。本論文的目的,在于从粘性不可壓縮流体的綫性化以后的运动方程的渦旋运动解,來說明均匀各向同性湍流在后期衰变时期的运动現象。确定在这时期作为湍流元随机运动着的渦旋的物理条件是:首先,渦旋的渦量分布必須集中在渦旋的几何中心附近,其次,每一个渦旋的总角动量是一常数。我們运用辛和林家翹的方法來計算湍流中的二元速度关联函数,从而導致米里洪西科夫解。这个解的速度关联和湍能耗損定律都和白却勒尔与湯生德的实验相符合。最后,我們指出了湍流的湍性結構是和作为湍流元的渦旋的渦性結構有密切联系以及依据現有渦旋运动解來計算出高元速度关联和其他种类关联函数的可能性。

## 1. 引 言

在作快速运动的流水和空气中,渦旋运动的出現是很普通的,并和流体的粘性有着密切的联系。流体力学工作者很早就認識到,流体的湍流运动是由許許多多微小的渦旋所組成<sup>[1]</sup>。但是由于解非綫性的奈菲尔-斯托克斯运动方程所遇到的巨大困难,到現在为止,要从这組粘性流体的运动方程,來求渦旋运动的解,并因此能够系統地建立一个湍流的統計理論还没有成功。

辛和林家翹<sup>[2]</sup>曾假定均匀各向同性湍流是由許多作不規則运动的理想流体中的希耳球形渦旋所組成,因而提出了一个均匀各向同性湍流的統計理論。从他們的理論里,虽然能够導得与实验比較符合的二元速度关联函数,但是由于希耳渦球的速度分布并不滿足奈菲尔-斯托克斯方程,所以他們的理論不能給出湍流能量的耗損定律。他們用渦球作湍流元的理論的另一困难是:所有的三元速度关联函数都恆等于零,这是和实验結果不相符合的。

在我們不久以前發表的論文<sup>[3]</sup>里,作者曾求得在不可壓縮的粘性流体中各种渦球

运动的类型。这些结果是在略去涡量方程中各非线性项的条件下得到的。本论文要讨论另一族新的涡旋运动解；它们是从一种涡量比较集中在涡球几何中心的涡球的速度和涡量分布函数对笛卡儿坐标作一次偏微分求得的。这族解中的一个解具有轴对称的速度分布，其他皆是不对称的涡旋运动。拿这族解所代表的涡旋运动作均匀各向同性湍流的运动元，就可获得在后期衰变时期满足卡门-霍华司运动方程的米里洪西科夫二元速度关联函数解<sup>[4]</sup>（在后期衰变时期运动方程中包括三元速度关联各项可以略去）。这个解是和白却勒尔与汤生德<sup>[5]</sup>关于湍能的耗损与速度关联的实验结果相符合的。确定这族涡旋运动解作湍流的运动元的主要物理根据是：首先，涡旋的涡量必须集中在涡球的几何中心附近，其次，每一个涡旋的总角动量在整个流体中必须是一常数。

本论文指出了，在后期衰变时期速度关联函数所代表的湍流的湍性，是由湍流元的涡性结构所规定，而与涡旋流线条形的关系比较小。湍流元的速度分布现在既知道了，则不仅二元速度关联，甚至三元或更高次元的速度关联以及其他关联函数皆可以计算出来。这些预见到的理论结果都可以用实验来验证。

如同以前的论文所指出的一样，本论文所给出在后期衰变时的近似结果可用摄动法作为求进一步近似解的基础。这些解可用作求均匀各向同性湍流比后期为早的湍流结构的理论根据。

## 2. 涡球、轴对称与不对称的涡旋运动

在参考文献[3]里，我们讨论了参数  $k = \frac{5}{4}$  情形的特殊涡球运动。这涡球的涡量  $\eta$  与流函数  $\Psi$  是由下列二式所规定：

$$\eta = \frac{15U}{2a^2} R \sin \theta F(\xi), \quad \Psi = \frac{1}{2} UR^2 \sin^2 \theta G(\xi), \quad (2.1)$$

其中  $F(\xi)$  和  $G(\xi)$  的形式是 [[3], (3.29) 与 (3.30)]

$$F(\xi) = e^{-\frac{\beta}{2}\xi^2}, \quad G(\xi) = -\frac{15}{\beta} \frac{1}{\xi^3} \int_0^\xi \xi^2 e^{-\frac{\beta}{2}\xi^2} d\xi + 1. \quad (2.2)$$

方程 (2.1) 和 (2.2) 中所用的符号的物理意义皆已在[3]中解释过。

我们再考虑文献[3]解原公式 (3.14) 的另一个特殊情形， $k = \frac{9}{4}$ 。它的  $F(\xi)$  与  $G(\xi)$  函数是由下列二式所代表：

$$F(\xi) = e^{-\frac{\beta}{2}\xi^2} \left(1 - \frac{1}{5}\beta\xi^2\right), \quad G(\xi) = -\frac{3}{\beta} e^{-\frac{\beta}{2}\xi^2} + 1. \quad (2.3)$$

在圆球流綫面  $\Psi=0$  上, 即在  $G(\xi)=0$  上,  $\xi=1$ , 从而定出常数  $\beta$  的数值为 1.452. 虽然这一个特殊涡球的流綫分布和  $k=\frac{5}{4}$  的涡球有很相近的形式 (圖 1), 但是它的渦量

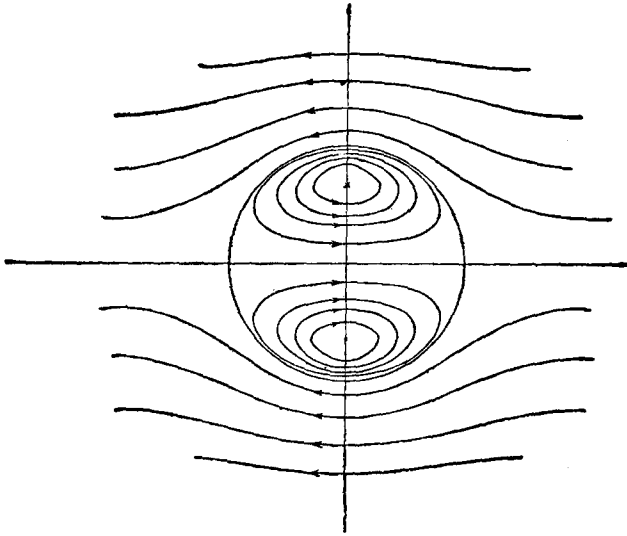


圖 1. 渦球  $k=\frac{9}{4}$

分布則甚为不同: 它分布在流体的比較廣大的範圍內; 并且在以  $R=\sqrt{\frac{5}{\beta}} a = \sqrt{10vt}$  为半徑的圓球之外, 渦量的数值是負的。

特殊解  $k=\frac{9}{4}$  (2.3) 属于普通相似性渦球解[[3], (3.14)]的一种特殊类型。在这种类型中,  $k-\frac{5}{4}$  等于一个正整数, 因此, 在  $F(\xi)$  函数中的級数因子退化成一个以  $\xi$  为变数的多項式。如果  $k-\frac{5}{4}$  不等于一个正整数, 則函数  $F(\xi)$  在  $\xi$  大数值区域内的漸近值是和  $\xi^{\frac{5}{2}+2k}$  成反比 [[3], (3.21)]。从这些解的性質來看, 我們可以得出这样的結論:  $k=\frac{5}{4}$  的特殊解 (2.2) 所代表的渦量分布是最集中在渦球几何中心附近的一个渦球, 而其他所有相似性的渦球解的渦量分布都比較分散。

我們現在討論从渦球  $k=\frac{5}{4}$  的渦量函数与流函数 (2.2) 与 (2.1) 求得的、对  $z$  坐标偏微分一次的渦旋运动的軸对称解。由于只考慮普通渦旋运动方程[[3], (3.5), (3.6)]綫性化了之后的解, 凡是相似性的渦球运动的普通解(3.14)对  $z$  坐标的偏微分一次或几次所導出的函数, 都滿足渦旋运动方程。今只考慮把 (2.2) 式对  $z$  微分一次, 并寫出类似 (2.1) 式中的渦量和流函数:

$$\eta = \frac{15U}{2a^2} R \sin \theta F(\xi, \theta) = \frac{\lambda \sqrt{2\beta} U \xi^2 \sin 2\theta e^{-\frac{\beta}{2} \xi^2}}{3a}, \quad (2.4)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} UR^2 \sin^2 \theta G(\xi, \theta) = \frac{a^2 U \xi^2 \sin^2 \theta \left\{ 1 - \frac{8\lambda}{\beta^3 \xi^4} \cos \theta \left[ \operatorname{Erf} \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} \xi \right) - \sqrt{\frac{\beta}{2}} \xi e^{-\frac{\beta}{2} \xi^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \beta \xi^2 \right) \right] \right\}}{2};$$

其中  $\lambda$  是在微分之后引进的一个任意常数, 它和涡旋的涡量强度有关. 流函数  $\Psi$  中的第一项代表流体的一个移动运动叠加在涡旋运动之上; 如果流函数  $\Psi$  不包括这一项, 则 (2.4) 代表一对定立涡旋运动的解. 方程 (2.4) 中的速度  $U$  等于

$$U = \frac{A}{t^2}, \quad (2.5)$$

$\operatorname{Erf} \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}} \xi \right)$  是误差函数  $\int_0^{\sqrt{\frac{\beta}{2}} \xi} e^{-u^2} du$ .

定立涡旋对与移动的轴对称涡旋的两种速度分布是用图 2 与图 3 画出. 如果与涡旋的强度有关的常数  $\lambda$  的数值不同, 则涡旋流线的形式可以大不相同.

非对称涡旋运动的解也可同样地用求偏微分的方法导出. 采用笛卡儿张量分析符

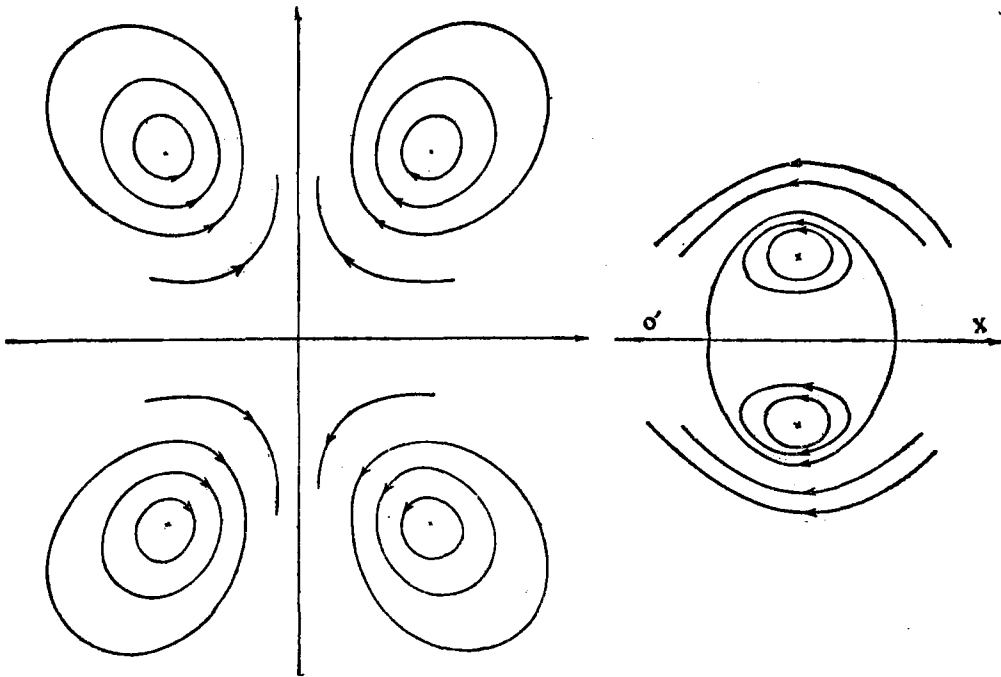


图 2. 定立轴对称涡旋:  $U \sim \frac{1}{t^2}$

图 3. 移动的轴对称涡旋:  $U \sim \frac{1}{t^2}$

号并用以渦球的几何中心为原点的笛卡兒坐标  $R_i$ 。在下列关系中，引用張量分析中的約定求和規則，即凡遇到具有两个相同的拉丁字母下标的乘積符号，則此符号代表这个乘積在 1, 2, 3 三項上的和：

$$R^2 = R_j R_j; \quad \xi_i = \frac{R_i}{a}; \quad \xi^2 = \xi_j \xi_j; \quad a^2 = 2\beta vt. \quad (2.6)$$

渦球所感生的速度  $u_i^{(0)}$  在笛卡兒坐标系中可用下列公式表出：

$$u_i^{(0)} = U^{(0)} \alpha_{ij} l_j, \quad (2.7)$$

其中  $l_j$  代表渦球軸綫的方向余弦， $U^{(0)}$  是渦球移动的速度。如果只考慮  $k = \frac{5}{4}$  的情形，則得

$$U^{(0)} = \frac{A^{(0)}}{t^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.8)$$

方程 (2.7) 中  $\alpha_{ij}$  的定义是

$$\alpha_{ij} = \left[ \frac{\xi_i \xi_j}{2\xi} \frac{dG}{d\xi} - \left( G + \frac{\xi}{2} \frac{dG}{d\xi} \right) \delta_{ij} \right]. \quad (2.9)$$

此处函数  $G(\xi)$  的形式已在 (2.2) 式中規定。

以  $m_i$  代表在空間的任一方向的方向余弦。我們將沿这方向把渦球的速度分布 (2.7) 对笛卡兒坐标作偏微分，來求渦旋运动的新的解。因为渦球的普通解 [[3], (3.14), (3.18)] 是渦旋运动方程 [[3], (3.5), (3.6)] 綫性化之后的解，与它相应的速度分布 (2.7) 也滿足下列綫性化了的奈菲尔-斯托克斯运动方程与連續方程：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial R_j \partial R_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial R_j} = 0. \quad (2.10)$$

所以把 (2.7) 式对坐标  $R_k$  的偏微分得出的函数也滿足方程 (2.10)。換句話說，下列速度分布也是运动方程 (2.10) 的解：

$$u_i = -\frac{16\lambda L}{45} m_k \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial R_k}, \quad (2.11)$$

其中  $\lambda$  是一个任意常数， $L$  是某一長度。上式中的常数系数是这样确定的：在微分的方向  $m_k$  和渦球的軸綫方向  $l_k$  相合时，上列方程中的  $\lambda$  和方程 (2.4) 中的  $\lambda$  相等。用 (2.7), (2.8) 和 (2.9) 各值代入 (2.11) 并簡化，乃得

$$u_i = -\frac{2\lambda}{15} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \frac{U}{\xi^2} \left\{ - (l_j m_j \xi_i + m_j \xi_j l_i + l_j \xi_j m_i) + \frac{5}{\xi^2} l_j \xi_j m_k \xi_k \xi_i \right\} \left( G - 1 + \frac{5}{\beta} F \right) + 5 m_k \xi_k (l_j \xi_j \xi_i - \xi^2 l_i) F \}; \quad (2.12)$$

其中特征速度  $U$  的形式是

$$U = \frac{A}{t^2}, \quad \text{而} \quad A = \frac{2LA^{(0)}}{\sqrt{\nu}}. \quad (2.13)$$

公式 (2.12) 所代表的运动情形是定立的渦旋运动。如果在这运动上再叠加一个移动, 則方程中尚須增加一項移动速度。

从渦球的速度分布用偏微分的方法求得的渦旋运动 (2.4) 或 (2.12), 是和在理想不可压缩的流体中源与匯所組成的偶極子位势运动相类似。單个源或匯的速度分布在空間有球对称性; 这相当于渦球运动 [[3], (3.14), (3.18)]。偶極子的速度分布是从源的速度分布用偏微分獲得, 正像現在求得渦旋运动解 (2.4) 与 (2.12) 一样。不同之处是: 在理想不可压缩的流体位势运动中, 只有一种源或匯的速度分布可推导出偶極子所代表的运动情况; 而在粘性不可压缩的渦旋运动里, 則有一族的渦球运动解 [[3], (3.14), (3.18)], 从这族无窮数的解都可推导出軸对称或不对称的渦旋运动。解 (2.4) 与 (2.12) 所代表的渦旋运动, 只是从渦量比較最集中的  $k = \frac{5}{4}$  的渦球运动 (2.2) 所導出的。因此, 从渦量的集中性來說, 渦旋运动 (2.4) 与 (2.12) 的渦量分布和用同样次数的偏微分从其他种  $k$  不等于  $\frac{5}{4}$  的渦球运动所導出的軸对称的与不对称的渦旋运动的渦量分布來比还是最集中的。

我們注意到: 由于运动方程 (2.10) 是綫性的, 把渦球解 (2.7) 对坐标  $R_k$  作偏微分任何多次所獲得的函数仍是运动方程 (2.10) 的解; 再把 (2.8) 与 (2.13) 二式中的特征速度  $U^{(0)}$  与  $U$  比較, 可知每偏微分一次所給出的新速度分布中的特征速度  $U$  的分母中, 多增加一次特征長度  $a$  的乘積, 即分母中的時間  $t$  多增加一个因子  $t^{\frac{1}{2}}$ 。

### 3. 二元速度关联函数

从上節的速度或渦量分布的公式, 可求得流体中两不同点之間的速度关联函数。令  $P'$  与  $P''$  代表渦旋中的任意两点。为了以后計算方便起見, 选择  $\overline{P'P''}$  綫的中点  $O$  作坐标系的原点 (圖 4)。仍用笛卡兒坐标与笛卡兒張量分析符号。令  $C$  代表渦旋的位置, 并以  $x'_i, x''_i$  与  $y_i$  各自代表  $P', P''$  与  $C$  三点的坐标。用下列符号分別代表  $\overline{CP'}$ ,  $\overline{CP''}$  与  $\overline{P'P''}$  三向量和它們的标量 (在这些符号中, 仍运用張量分析中的約定求和規則):

$$\begin{aligned} R'_i &= x'_i - y_i, & R'^2 &= R'_i R'_i; & R''_i &= x''_i - y_i, & R''^2 &= R''_i R''_i; \\ x_i &= x''_i - x'_i, & r^2 &= x_i x_i. \end{aligned} \quad (3.1)$$

先考慮具有軸对称性的渦旋。令  $l_i$  代表渦旋对称軸在空間的方向余弦。如果渦旋在  $P'$  与  $P''$  两点所感生的速度是  $u'_i$  与  $u''_i$ , 則它們两点間的速度关联函数如同辛与

林家翘所指出的那样是乘積  $u'_i u''_j$  的平均值。求取这平均值的方法，是計算乘積  $u'_i u''_j$  在  $C$  点的渦旋的对称軸綫各个方向上的平均以及渦旋  $C$  在流体各个点上的平均。如以  $N$  代表流体中渦旋的总数， $V$  为流体的体积，則速度关联  $\overline{u'_i u''_j}$  的定义是

$$\overline{u'_i u''_j} = \frac{N}{V} \iiint d\tau \cdot \frac{1}{4\pi} \iint u'_i u''_j d\Omega, \quad (3.2)$$

其中  $d\tau$  是体积元  $dy_1 dy_2 dy_3$ ， $d\Omega$  为在  $C$  点包括渦旋对称軸綫的立体角元素。

如果組成湍流的渦旋是不对称的，而这不对称的渦旋如同 (2.11) 式中速度分布一样是从渦球的速度分布沿着  $m_k$  所規定的方向導得，則

在速度关联函数的定义 (3.2) 中，尚須补充另一項平均；这个平均是由于  $m_k$  所規定的方向在空間有任意值，即，

$$\overline{u'_i u''_j} = \frac{N}{V} \iiint d\tau \cdot \frac{1}{4\pi} \iint d\Omega_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \iint u'_i u''_j d\Omega_0, \quad (3.3)$$

其中  $d\Omega_0$  代表包括具有方向  $m_k$  直綫的立体角元素； $d\Omega$  仍代表包括由方向余弦  $l_i$  規定的渦球軸綫的立体角元素。由于所有的独立速度分布 (2.11) 只是沿着在渦球的赤道平面上半空間內的各个方向綫上用偏微分得出的，故 (3.3) 中在  $m_k$  方向上的平均值只須求在半空間中所有方向上的平均就够了，而无須在整个空間的立体角上積分。

根据 (3.2) 或 (3.3) 式中速度关联的定义，我們利用流函数 (2.4) 或速度分布 (2.7) 与 (2.12) 不难算出各种渦旋的关联函数的形式。任何的方向余弦  $l_i$  满足下列平均值关系：

$$\frac{1}{4\pi} \iint l_i l_j d\Omega = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (3.4)$$

其中  $\delta_{ij} = 1$ ，如  $i = j$ ； $\delta_{ij} = 0$ ，如  $i \neq j$ 。由于上列关系，如以渦球的速度 (2.7) 代入 (3.2) 式，乃得

$$\overline{u'_i^{(0)} u''_j^{(0)}} = \frac{1}{3} n \iiint \alpha'_{ik} \alpha''_{jk} d\tau, \quad (3.5)$$

其中  $n = N/V$  是每單位体积中的渦球数。

顯然，三元速度关联函数  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$  也可用类似 (3.2) 与 (3.3) 的平均方法寫出。如

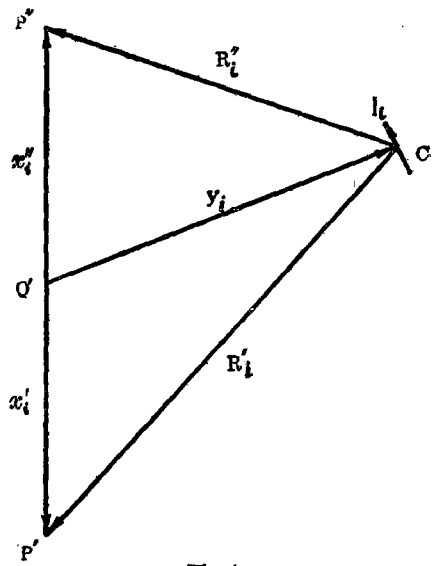


圖 4.

用渦球的速度分布 (2.7) 代入, 則因任何方向余弦  $l_i$  滿足下列关系,

$$\iiint l_i l_j l_k d\Omega = 0, \quad (3.6)$$

故根据渦球作湍流元得出的三元速度关联必要地恆等于零, 这是和事实不符的.

从計算的角度看来, 如先計算渦旋两点之間的渦量关联, 再解渦量关联与速度关联之間的微分关系以求出速度关联函数反而方便些. 令  $\eta'_{ij}$  与  $\eta''_{ki}$  分别代表在  $P'$  与  $P''$  两点的渦量張量, 則

$$\eta'_{ij} = \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i}, \quad \eta''_{ki} = \frac{\partial u''_k}{\partial x''_i} - \frac{\partial u''_i}{\partial x''_k}. \quad (3.7)$$

今可按照 (3.2) 或 (3.3) 的形式寫出渦量关联函数  $\overline{\eta'_{ij} \eta''_{ki}}$ , 并在这渦量关联函数定义中运用坐标变换的关系 (3.1), 把对坐标  $x'_i$  与  $x''_i$  偏微分都换成对于相对坐标  $x_i$  的偏微分. 于是

$$\overline{\eta'_{ij} \eta''_{ki}} = -\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \overline{u'_i u''_k} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \overline{u'_j u''_k} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \overline{u'_i u''_l} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \overline{u'_j u''_l}. \quad (3.8)$$

因此獲得下列不变量的微分关系:

$$\overline{\eta'_{ij} \eta''_{ij}} = -2 \nabla^2 \overline{u'_i u''_i}, \quad (3.9)$$

其中  $\nabla^2$  是拉普拉斯算子  $\partial^2 / \partial x_i \partial x_i$ .

我們知道, 均匀各向同性湍流的速度关联  $\overline{u'_i u''_j}$  可用一个函数  $f$  表出<sup>[6]</sup>:

$$\overline{u'_i u''_j} = \overline{u^2} \left[ -\frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} x_i x_j + \left( f + \frac{1}{2} r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \delta_{ij} \right], \quad (3.10)$$

故

$$\overline{u'_i u''_i} = \overline{u^2} \left( 3f + r \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (3.11)$$

我們只要把 (3.9) 式左边的渦量关联的标量算出, 再依据 (3.9) 与 (3.11) 的微分关系, 即可求得函数  $f$ .

具有軸对称渦旋的渦量張量的分量  $\eta'_{ij}$  与  $\eta''_{ij}$  和函数  $F(\xi', \theta')$  与  $F(\xi'', \theta'')$  的关系, 可用下列二式表出:

$$\eta'_{ij} = \frac{15U}{2a} (\xi'_i l_j - \xi'_j l_i) F(\xi', \theta'), \quad \eta''_{ij} = \frac{15U}{2a} (\xi''_i l_j - \xi''_j l_i) F(\xi'', \theta''), \quad (3.12)$$

此处  $F$  是 (2.4) 式中的函数  $F$ , 而且引用了下列符号:

$$\begin{aligned} \xi'_i &= R'_i / a, \quad \xi' = R' / a, \quad \cos \theta' = l_m \xi'_m / \xi'; \\ \xi''_i &= R''_i / a, \quad \xi'' = R'' / a, \quad \cos \theta'' = l_m \xi''_m / \xi''. \end{aligned} \quad (3.13)$$

这些公式可以协助我們計算出 (3.9) 式左边的軸对称渦旋的渦量关联标量. 不对称渦旋的渦量張量可从速度分布 (2.12) 導出, 并進行类似的計算.



#### 4. 均匀各向同性湍流在后期衰变时的运动

从各种不同类型的渦旋运动，如渦球、軸对称或不对称渦旋运动，我們要知道在什么物理条件下才能够确定均匀各向同性湍流在后期衰变运动时的湍性結構。这样的物理条件有二：首先，組成湍流的渦旋必須有比較集中的渦量分布。在 §2 中我們指出，渦球  $k=5/4$  和从它的速度分布用对笛卡兒坐标偏微分得出的軸对称或不对称的渦旋，都具有比較集中的渦量分布。据此，只有  $k=5/4$  的渦球和从它用偏微分一次或多次導出的渦旋运动解，才有代表湍流之速度分布的可能性。

其次，正如郎道与栗輔西茨所指出的那样<sup>[7]</sup>，沒有微体力作用在流体上，渦旋在流体中的总角动量在時間的过程中必須是一常数。把渦球的总角动量積分，我們得出这总角动量是和  $Ua^4$  成正比。如果  $Ua^4$  是和時間  $t$  无关，則由于特征長度  $a$  是与  $t^{1/2}$  成正比 (2.6)，所以渦旋的特征速度  $U$  必須是和  $t^2$  成反比。这正是从渦球  $k=5/4$  用偏微分方法所導得的軸对称渦旋 (2.4) 与不对称渦旋的特征速度 (2.5) 与 (2.13) 相符合。

根据以上两个条件，(2.4) 和 (2.12) 所規定的渦旋运动必要地代表組成均匀各向同性湍流在后期衰变时的运动元。我們先用軸对称渦旋的渦量求流体中两不同点  $P'$ ， $P''$  之間的渦量关联。令

$$\zeta = r/b, \quad b^2 = 4vt, \quad (4.1)$$

其中  $r$  代表  $P'$  与  $P''$  之間的距离 [見 (3.1)]。把在  $P'$  与  $P''$  两点的渦量 (2.4) 与 (3.12) 代入 (3.9) 式的左边并積分，乃得

$$\overline{\eta_{i_1} \eta_{i_2}} = \frac{15}{16} n \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{16\lambda U}{45\beta} \right)^2 \cdot b e^{-\frac{\zeta^2}{2}} (15 - 10\zeta^2 + \zeta^4). \quad (4.2)$$

此式須等于

$$-2\overline{u^2} \nabla^2 \left( 3f + f \frac{df}{d\zeta} \right) = -\frac{2\overline{u^2}}{b^2} \frac{1}{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \right) \left( 3f + \zeta \frac{df}{d\zeta} \right). \quad (4.3)$$

把上列微分关系  $f$  積分，并采用边界条件： $f=1$ ，当  $\zeta$  趋近于 0； $f=0$ ，当  $\zeta$  趋近于无穷大，乃得：

$$f = e^{-\frac{\zeta^2}{2}} = e^{-\frac{r^2}{8vt}}; \quad \overline{u^2} = \frac{15}{32} n \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{16\lambda U}{45\beta} \right)^2 b^3 \sim 1/t^{\frac{5}{2}}. \quad (4.4)$$

这就是米里洪西科夫关于均匀各向同性湍流在后期衰变时的关联函数与湍能耗損定律解<sup>[4]</sup>。我們知道，它們是和白却勒尔与湯生得的实验結果相符合的<sup>[6]</sup>。

我們也可用不对称渦旋的速度 (2.12) 求出渦量張量 (3.7)，然后再計算渦量关联

(3.9)。在 (3.9) 的平均值中, 我們也必須如在 (3.3) 速度关联中一样, 增加在偏微分的各个方向上的求平均值。这个計算也給出 (4.4) 的結果, 唯一的分別只是在湍能的耗損定律中有不同的常数系数。

根据本節的物理条件, 我們已經指出了渦球不能代表湍流运动的微結構。但是用它的渦量分布來計算出代表湍流湍性結構的速度分布, 可以看出, 这湍性結構是和組成湍流的渦旋的渦性結構有着密切的联系。把渦球  $k=5/4$  与  $k=9/4$  两个不同的函数  $\eta$  与  $F$  从 (2.1), (2.2) 与 (2.3) 代入 (3.9), 并進行类似 (4.2) 与 (4.3) 的計算, 乃得

$$k = \frac{5}{4}: f(\zeta) = \frac{3}{\zeta^3} \int_0^{\zeta} \zeta'^2 e^{-\frac{\zeta'^2}{2}} d\zeta', \quad \overline{u^2} \sim \frac{1}{\zeta^{3/2}}; \quad (4.5)$$

$$k = \frac{9}{4}: f(\zeta) = e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{5} \zeta^2\right), \quad \overline{u^2} \sim \frac{1}{\zeta^{1/2}}. \quad (4.6)$$

我們知道: 这两种速度关联函数  $f$  和湍能耗損定律的理論結果都和实验不相符合。

## 5. 結 束 語

必須指出, 在运用上節中关于渦旋的总角动量必須是一常数的物理条件來确定渦旋的性質时, 軸对称渦旋的角动量由于它的对称性是等于零, 因而这个条件不能应用。但是在自然界中組成湍流的渦旋具有軸对称性是例外; 一般的湍流元是不对称的, 故这条件一般不会導致不确定的結論。

根据以上的分析, 組成均匀各向同性湍流在后期衰变时的渦旋运动速度分布既已确定, 則不僅二元速度关联, 即使是三元速度关联和其他关联速度都可以計算出來了。这些理論計算的結果, 都可用实验方法来验证它們的真实性。顯然, 在我們現在的理論里, 不論軸对称或不对称的渦旋运动的三元速度关联都不等于零。

本論文的分析也指出了: 代表湍流湍性結構的速度关联函数是和組成湍流渦旋的渦性結構有着密切的联系。两种渦球  $k=5/4$  与  $k=9/4$  的流綫形狀(圖 1) 与 ([3], 圖) 甚为相似, 但是它們的渦性結構則甚为不同, 因此它的速度关联 (4.6) 也甚为不同。相反地定立的与移动的軸对称渦旋 (2.4) 則有相同的渦性結構, 因此有相同的速度关联函数, 但是它們有甚为不同的流綫圖形(圖 2 与 圖 3)。

如同文献 [3] 所指出的一样, 我們可用現有軸对称与不对称渦旋的速度分布作基礎, 做攝动計算來獲得奈菲尔-斯托克斯方程渦旋运动的進一步近似解。这些解可用來求出比后期为早的均匀各向同性湍流速度关联函数与湍能耗損定律的理論根据。

## 参 考 文 献

- [1] Taylor, G. I., *Proc. Roy. Soc. of Lond.*, A, **151** (1935), 421—478.  
 [2] Synge, J. L. and Lin, C. C., *Trans. of Roy. Soc. of Canad.*, 3rd Ser. Sec. III, **37** (1943), 1—35.  
 [3] 周培源、蔡樹棠，“渦球在粘性流体中的运动”，北京大学学报(自然科学)，1 (1956)，39—51。  
 [4] Миллионщиков, М. Д., *Док. Акад. наук СССР*, **22** (1939), 236—239.  
 [5] Batchelor, G. K. and Townsend, A. A., *Proc. Roy. Soc. of Lond.*, A, **194** (1948), 527—543.  
 [6] Th. von Kármán and Howarth, L. *Proc. Roy. Soc. of Lond.*, A, **164** (1938), 192—215.  
 [7] Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М.; *Механика сплошных сред*, 1954, 174—179.

## THE VORTICITY STRUCTURE OF HOMOGENEOUS ISOTROPIC TURBULENCE IN ITS FINAL PERIOD OF DECAY

CHOU, PEI-YUAN

(Peking University)

· TSAI, SHU-TANG

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

It has been known for sometime that turbulence is due to the chaotic motion of a large number of small eddies. By neglecting the non-linear terms in the Navier-Stokes equations, the authors obtained recently a class of solutions which represent the velocity distributions of spherical vortices moving in an incompressible viscous fluid. It is obvious that, after the linearization of the Navier-Stokes equations of motion, velocity distributions obtained by differentiating the spherical vortex solution partially with respect to the coordinates along any direction in space for any number of times also satisfy the equations of motion.

We investigate the homogeneous isotropic turbulent motion of a liquid in its final period of decay, when the non-linear terms in the Navier-Stokes equations can be neglected. The type of vortices which are assumed to give rise to turbulence, is determined by the following two conditions: In the first place, the vorticity distribution of the eddy should be concentrated in the vicinity of the geometrical center of the vortex instead of being spread over a large volume; secondly, the total angular momentum of the vortex should be constant instead of decreasing or increasing with time.

The first condition requires that only the spherical vortex solution with the parameter  $k=5/4$  and its partial derivatives should be chosen. Only in this special case, among all the spherical vortices, has its vorticity concentrated in the region around its center. Solutions derived by partially differentiating its velocity distribution with respect to the coordinates also have this property when compared with the solutions obtained from those of the spherical vortices with other values of the parameter  $k$  by similar process.

The second condition determines that partial differentiation of the solution of the spherical vortex  $k=5/4$  with respect to the coordinates only once is sufficient. Partial differentiation with respect to the coordinate along the axis of symmetry of the velocity distribution yields the vorticity  $\eta$ , the stream function  $\Psi$  and the characteristic velocity  $U$  given in the paper [(2.4) and (2.5)]. In the stream function  $\Psi$ , we have introduced after the partial differentiation the part due to a uniform flow along the axis of symmetry. Without this part, the solution represents the motion of a standing axially symmetrical vortex. Partial differentiation with respect to the coordinates along any other direction in space, leads to the solution of asymmetrical vortices in general [(2.12) and (2.13)].

According to Synge and Lin, the double velocity correlation between two points in the fluid is the product of the velocity components  $u'_i u''_j$  averaged over all the directions of orientation of the axis of symmetry of the axially symmetrical eddy, and over all the positions of the vortex in the whole fluid (3.2). If the vortex were asymmetrical, another average over all the independent directions of differentiations should be added (3.3). In the actual computation, for the sake of convenience however, the double scalar vorticity correlation is obtained first, and the double velocity correlation is found by solving the differential relations between them. Based upon either the axially symmetrical or asymmetrical vortex as the element of turbulence, the calculation leads to the same Millionshikov solution (4.4) of the Kármán-Howarth equation, in which the terms involving the triple velocity correlations are neglected. It is well-known that both the velocity correlation and the law of turbulent energy decay of this solution agree with Batchelor and Townsend's experiments.

The present paper points out finally that the structure of turbulence, as revealed by the double velocity correlation function, depends upon the vorticity structure of its component eddies. Furthermore, since their velocity distribution of a turbulent fluid in its final period of decay is now known, triple and higher order velocity correlations or correlation functions of other kinds can be calculated. These theoretical predictions can be subjected to the direct experimental verification.