具有弹性–永久变形地质材料的本构方程

章根德

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文分析了地质材料的弹性—永久变形过程并采用了内变量理论进行描述。在连续介质热力学的基础上，引入了"屈服函数"、"势函数"等概念来描述由不同机理引起的地质材料的永久变形过程并导出了本构方程。最后导出了能用于地质材料复杂变形过程数值计算的增量刚度矩阵。

关键词 弹性；地质材料；本构方程

1 引 言

地质材料（岩石、土等）在外力作用下的变形过程是十分复杂的，材料的变形主要可以分为两部分：能恢复的弹性变形部分与不能恢复的永久变形部分，例如由塑性位错所引起的塑性变形，由微观裂纹的变化所引起的裂缝应变。从微观机理上来说，可以引入一些微观参量，诸如晶粒的大小、形状，微裂纹的尺寸，方位、组构、粘合、位错滑移等等参量来描述。所有这些错综复杂的微观过程在宏观上统一表现为不可恢复的永久变形。如果抛开导致这些微观变形的机理，在形式上总可以选择不同的宏观参量来描述不同机理所导致的宏观变形。这样，就更容易采用连续介质力学的基本理论来描述地质材料对所加外力的响应。

在连续介质力学的基础上，采用不同的内变量来描述不同微观机理所导致的永久变形。根据热力学的基本定律，就能导致出地质材料在弹性–永久变形情况下的一般本构方程。进一步，引入"屈服函数"与"势函数"的概念，就能导致出地质材料在弹性—永久变形情况下增量刚度矩阵用于数值计算之中。

2 变形分析

在分析地质材料复杂的变形过程中，如果我们假设应变增量能分解成弹性部分与永久应变部分之和。弹性部分与应力增量呈线性关系，而永久应变部分与不同的"势函数"与不同的"屈服函数"相关连。这里"屈服函数"定义了永久应变分量产生的应力水平，而势函数定义了变形过程中永久应变分量的分布，永久应变分量的实际数量是由"加工硬化关系"所决定的。

如果势函数与屈服函数相一致，则称相关联流动．如果势函数与屈服函数不一致，则称不相关联流动．这样，我们就能利用连续介质力学数学理论的一些基本概念来描述地质材料的变形过程．

这种描述完全是现象学的描述．在这种描述中，具有多重的屈服面，每一屈服面对应有相关与不相关的势面．它们在应力空间中都是光滑的、连续可微并且是凸的．为了描述地质材料应力-应变关系的各个不同的方面，对应每一种屈服情况，还必须加上不同的应变变化的影响[1, 2]．

假设有 m 种不同的机理产生 m 种不同的永久变形，每一种不同的永久变形相关联不同的屈服面，每一种不同的永久应变的增量就可以表示为 $d\varepsilon_{ij}^{pr}$（$r=1, 2, \cdots, m$）．于是总的应变增量就是弹性应变增量与 m 种永久应变增量之和

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^{e}+d\varepsilon_{ij}^{p1}+\cdots d\varepsilon_{ij}^{pr}+\cdots+d\varepsilon_{ij}^{pm} \tag{1}$$

采用不同的内变量来锚述具有不同机理的永久变形过程，则这些不同的内变量必须是各自独立的．

在上述假设下，采用连续介质力学基本理论就能导出地质材料具有不同机理的永久变形情况下的最一般的本构方程．

3 本构方程的推导

对于热弹性体，材料的本构方程可写成

$$d\varepsilon_{ij}^{e}=C_{ij}^{k}d\sigma_{kl}+\partial(T)_{ij}dT \tag{2}$$

$$(i,\ j=1,2,3,)$$

这里 c_{ij}^{kl} 是弹性系数，并且 $c_{ij}^{kl}=c_{ji}^{kl}=C_{ij}^{lk}$，$\alpha(T)_{i,j}$ 是热膨胀系数并且 $\partial(T)_{ij}=\partial(T)_{ji}$。

如果地质材料中同时发生数种具有不同机理的永久变形，用不同的内变量来描述永久变形的不同部分．整个材料体系可以分成数个彼此不相干的孤立体系，每个体系内部是均匀的，用相应的内变量 λ_n^r 来描述每个孤立体系的永久应变部分．于是，内变量 λ_n^r 就成了与不同理机的永久应变部分相联系的待定函数．如果忽略二阶小量以上高阶小量，则 λ_n^r 可以写成永久应变部分的线性函数．于是，我们有

$$d\lambda_n^r=g_{ij}^{nr}d\varepsilon_{ij}^{pr} \tag{3}$$

$$(i,j=1,2,3\quad n=1,2,\cdots,\ n\quad r=1,2,\cdots,\ \mathrm{m})$$

这里，g_{ij}^{nr} 是应力张量 σ_{ij}，永久应变部分 ε_{ij}^{pr} 和变形历史的函数．

于是，内能 U 就可以写成应力张量 σ_{ij}，温度 T 和相应的内部状态变量 λ_n^r 的函数

$$U=U(\sigma_{ij},\ T,\ \lambda_m^r) \tag{4}$$

能量平衡关系可以写成

$$dU=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}+dQ \tag{5}$$

系统的熵增可以表示为

$$S=S(\sigma_{ij},\ T,\ \lambda_n^r) \tag{6}$$

熵增可以分解为与不同机理的永久应变相关联的各部分熵增之和，即

$$Tds-dQ=Tds^{p1}+Tds^{p2}+\cdots+Tds^{pm} \tag{7}$$

其中的每一部分熵都可 m 写成

$$Tds^{pr}=\psi^{r}_{ij}d\varepsilon^{pr}_{ij} \tag{8}$$

这里，熵增表示为广义力与广义流的乘积．根据热力学的 Qsgener 原理[3]，矩阵 ψ^{r}_{ij} 必须是对称的，即

$$\psi^{r}_{ij}=\psi^{r}_{ji} \tag{9}$$

于是，方程（7）能写成

$$Tds-dQ=\psi^{1}_{ij}d\varepsilon^{p1}_{ij}+\psi^{2}_{ij}d\varepsilon^{p2}_{ij}+\cdots+\psi^{m}_{ij}d\varepsilon^{pm}_{ij} \tag{10}$$

导入能量耗损函数 $\psi(\varepsilon^{pr}_{ij},\ T)$，则 ψ^{r}_{ij} 可写成

$$\psi^{r}_{ij}=\frac{\partial x}{\partial\varepsilon^{pr}_{ij}}$$

$$(i,j=1,2,3,\quad r=1,2,\cdots,\ m)$$

于是，方程（5）可写成

$$dU=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}+Tds-\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^{p1}_{ij}}d\varepsilon^{p1}_{ij}-\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^{p2}_{ij}}d\varepsilon^{p2}_{ij}\cdots-\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^{pm}_{ij}}d\varepsilon^{pm}_{ij} \tag{12}$$

同样地，公式（10）能写成

$$Tds-dQ=\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^{p1}_{ij}}d\varepsilon^{p1}_{ij}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^{pm}_{ij}}d\varepsilon^{pm}_{ij} \tag{13}$$

引入自由能函数，$\tilde{F}=U-TS$，于是有

$$\tilde{F}=\tilde{f}(\sigma_{ij},\ T,\ \lambda^{r}_{n}) \tag{14}$$

$$d\tilde{F}=\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\sigma_{ij}}d\partial_{ij}+\frac{\partial\tilde{F}}{\partial T}dT+\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\lambda^{1}_{n}}g^{1}_{ij}d\varepsilon^{p1}_{ij}+\cdots+\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\tilde{F}g^{m}_{n}}g^{m}_{ij}d\varepsilon^{pm}_{ij} \tag{15}$$

另一面，自由能变化可写成

$$\begin{aligned}d\tilde{F}=&\sigma_{ke}C^{e}_{ijkl}d\sigma_{ij}+(\sigma_{ij}\partial(T)_{ij}-S)dT\\&+(\sigma_{ij}-\frac{\partial x}{\partial\varepsilon^{p1}_{ij}})d\varepsilon^{p1}_{ij}+(\sigma_{ij}-\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^{p2}_{ij}})d\varepsilon^{p2}_{ij}\\&+\cdots+(\sigma_{ij}-\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^{pm}_{ij}})d\varepsilon^{pm}_{ij}\end{aligned} \tag{16}$$

比较公式（15）与（16），由于所有的变量 $d\sigma_{ij}$，dT，$d\varepsilon^{pr}_{ij}$ 都是独立的变量，所以，我们有

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\sigma_{ij}}=\sigma_{ke}C^{e}_{ijke}$$

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial T}=\partial(T)_{ij}\sigma_{ij}-S(17)$$

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\lambda^{r}_{n}}g^{pr}_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^{pr}_{ij}}$$

$$(i,\ j=1,2,3;\quad n=1,2,\cdots,\ n;\quad r=1,2,\cdots,\ m)$$

方程式（17）给出了具有不同永久变形机理的地质材料最一般的弹性—永久变形的本构方程．在推导此本构方程时，除了运用热力学的基本原理外，我们并没有作任何多余的假设．所以此本构方程是地质材料本构方程的最一般的形式，能适用于具有弹性—永久变形的各种情况．对于任何特殊的情况，我们可以选择不同的内变量和不同的屈服函数、不同的势

函数而得到特殊的本构方程。

例如，对于各向同性加工硬化塑性体，我们可以这样地选择内部状态变量而得到特殊的本构方程：至少有一个内部状态变量不为零，于是，有 $g_{ij}^{1r}=\sigma_{ij}$，$g_{ij}^{nr}=0$，$i,j=1,2,3$，$n>2$。这样

$$d\lambda_J^r=\int\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{pr} \tag{18}$$

而

$$\lambda_I^r=\int\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{pr} \tag{19}$$

将（18）式与（19）式代入本构方程（17）式中，我们有

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\lambda_I^r}\sigma_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}^{pr}} \tag{20}$$

经过张量运算，我们可以得到

$$\sigma_{ij}=[1-\frac{\partial +}{\partial\lambda_I^r}]^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}^{pr}} \tag{21}$$

最后，可以得到

$$\varepsilon_{ij}^{pr}=\frac{\partial}{\partial\sigma_{ij}}[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{pr}-(1-\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\lambda_I^r})^{-1}\psi] \tag{22}$$

令$\pi^r=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{pr}-(1-\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\lambda_I^r})^{-1}\psi$，方程（22）就能写成

$$\varepsilon_{ij}^{pr}=\frac{\partial\pi^r}{\partial\sigma_{ij}} \tag{23}$$

公式（23）给出了具有加工硬化影响的地质材料的本构方程。它与经典塑性理论所给出本构方程具有类似的形式。即 $d\varepsilon_{ij}^{pr}$ 与势函数对应力分量的偏微分成比例。详见文献[4]—[6]。

我们可以这样说：对于任何类型的永久变形，我们总可以找到相应的内变量来表示，而最终导出相应的本构方程。

4 增量刚度矩阵

前面已述在应力增量过程中总的应变增量能分解成弹性部分与永久变形部分，如公式（1）所示。在没有热交换的情况下，由公式（2）可知弹性应变增量能写成

$$d\varepsilon_{ij}^e=C_{ij}^{kl}d\sigma_{kl} \tag{24}$$

对于具有加工硬化效应的地质材料，对应不同的微观机理，屈服函数能写成

$$f_r(\sigma_{ij},\ \varepsilon_{ij}^{pr})=0 \tag{25}$$

相应于第 r 个屈服面所产生的永久变形应变增量 $d\varepsilon_{ij}^{pr}$，与第 r 个势函数对应的偏导数有着一定的比例关系，即

$$d\varepsilon_{ij}^{pr}=d\lambda_r\cdot\frac{\partial\pi^r}{\partial\sigma_{ij}} \tag{26}$$

微分（25）式，可得

$$\frac{\partial f_r}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}+\frac{\partial f_r}{\partial\varepsilon_{ij}^{pr}}d\varepsilon_{ij}^{pr}=0 \tag{27}$$

将（24）式代入（27）式，可得

$$\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}} D_{ij}^{kl} d\varepsilon_{ij}^{e} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{pr}} d\varepsilon_{ij}^{pr} = 0 \tag{28}$$

这里，D_{ij}^{kl} 是弹性张量，并且有 $\{D\} = \{C\}^{-1}$.

将公式（1）代入上式，可得

$$\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}} D_{ij}^{kl}(d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^{p1} - \cdots - d\varepsilon_{ij}^{pm}) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{pr}} d\varepsilon_{ij}^{pr} = 0 \tag{29}$$

$$(r = 1, 2, \cdots m)$$

将式（26）代入（29），可得

$$\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}} D_{ij}^{kl}(d\varepsilon_{ij} - d\lambda_1 \frac{\partial \pi^1}{\partial \sigma_{ij}} - \cdots - d\lambda_m \frac{\partial \pi^m}{\partial \sigma_{ij}}) + d\lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \varepsilon_{ij}^{pr}} \cdot \frac{\partial \pi^r}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \tag{30}$$

$$(r = 1, 2, \cdots m)$$

解上述 m 个方程，可得到 m 个未知数，$d\lambda_r$，$r=1$，…，m. 方程式（30）写成矩阵形式

$$\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}^T[D^e]\ (\{d\varepsilon\} - \{d\lambda\}[\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}]) + [\delta]\{d\lambda\} = \{O\} \tag{31}$$

或写成另一形式

$$(\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}^T[D^e][\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}] - [L])\ \{d\lambda\} = \{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}^T[D^e]\{d\varepsilon\} \tag{32}$$

引人记号$[A]$

$$[A] = \{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}^T[D^e][\frac{\partial \pi}{\pi \sigma}] - [L] \tag{33}$$

我们就可以得到

$$\{d\lambda\} = [A]^{-1}\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}^T[D^e]\{d\varepsilon\} \tag{34}$$

从公式（1）和（26），我们有

$$\{d\sigma\} = [D^e]\ (\{d\varepsilon\} - [\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}]\{d\lambda\}) \tag{35}$$

由公式（34），公式（35）可写成

$$\{d\sigma\} = [D^e]\ (1 - [\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}][A]^{-1}[\frac{\partial f}{\partial \sigma}][D^e])\ \{d\varepsilon\} \tag{36}$$

最后，我们可以得到增量刚度矩阵

$$[D^{ep}] = [D^e] - [D^e][\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}][A]^{-1}[\frac{\partial f}{\partial \sigma}][D^e] \tag{37}$$

矩阵$[D^{ep}]$一般是非对称的，只有当所有的流动都是相关联时，此时，$[\frac{\partial f}{\partial \sigma}] = [\frac{\partial \pi}{\partial \pi}]$，矩阵是对称的．于是，$[A]$也是对称的，它的逆矩阵也是对称的．这样$[D^{ep}]$才是对称的．

上述所导出的增量矩阵是地质材料在弹性−永久变形情况下增量矩阵的最一般形式．它适用于地质材料弹性−塑性变形，弹性−裂纹应变，弹性−裂纹应变等等多种情况，能广泛地应用于有限差分与有限元数值计算之中．

5 结 论

具有多种微观变形机理的地质材料，在产生弹性-永久变形的过程中，不论其变形过程是多么复杂，它必须遵循热力学过程的能量守恒定律．当我们从宏观现象学的观点来分析此变形过程，采用内部状态变量来描述不同机理的变形过程的宏观现象，就可以导出最一般形式的本构方程．进而得到增量刚度矩阵，应用于有限差分或有限元的数值计算之中．这样，即使在未弄清复杂的微观变形机理之前，我们仍能正确地，定量地从现象学观点来把握地质材料的复杂的变形过程．

参 考 文 献

[1]P.V.Lude, 'Elastwph plastic stres strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces, Int. solids structures, 13, 1019—1035, 1977.

[2]P.A.Vermeer, 'A Double Hardening Model for Sand', Geotechnique, 28, 413—433, 1978.

[3]S.R.Degroot, Thermodynamics of Irrversible Processes, New York, 1985.

[4]D.C.Druck, Some Applications of Work Hardening and Ideal Plasticity, Quart, J.Appl.Math.7, 1950.

[5]R.Hill,The Mathematical Thecry of Plasticity, Oxford, 1950.

[6]ZhangGende,The Constitutive Eguwtion with Intermal Variable for Rook Media Proceeding of the International Conference On Constitutive Laws for engineering Materials (ASIA), 1989.