

可压缩衰减湍流的直接数值模拟

李新亮 傅德薰 马延文¹

(中国科学院力学研究所 LNM 实验室, 北京 100080)

摘要: 构造了八阶精度的群速度控制型差分格式并根据激波捕捉能力及对小尺度分辨能力对格式系数进行了优化。采用该格式对可压缩均匀各向同性湍流进行了直接数值模拟, 所计算的最大湍流马赫数达到 0.95。相同计算条件下的结果与他人结果吻合较好, 说明了格式在捕捉激波的同时对湍流小尺度有较好的分辨能力。对特定流场进行了标度律分析, 发现即使在较高的湍流马赫数下, 扩展自相似性仍然成立, 而且压缩性效应对标度指数影响很小, 说明了标度指数的普适性。

关键词: 群速度控制, 均匀各向同性湍流, 扩展自相似性, 标度律。

1. 前言

对于可压湍流, 当湍流马赫数较高时, 流场中将出现随机的微激波 (Shocklets)。该微激波的出现对可压湍流的直接数值模拟带来了挑战[1]。由于湍流场中微激波的尺度与湍流的 Komogorov 尺度在同一量级, 这就使得通常的激波捕捉格式显得过于耗散。如果采用无耗散格式 (如高精度的中心型差分格式) 进行可压湍流的直接数值模拟, 当微激波较强时非物理振荡将导致数值计算无法进行下去。Samtaney et al (2001)[2] 采用 10 阶精度的对称 Padé 格式对可压缩均匀各向同性湍流进行了直接数值模拟, 由于受起动问题(start-up problem)的限制, 计算只能限制在 $Mt \leq 0.5$ 之内。作者采用了 7 阶精度的迎风偏斜差分格式离散对流项, 将数值计算的最大初始湍流马赫数提高到 0.7 [3]。牛晓玲[4]采用优化的三点五阶广义紧致格式将初始湍流马赫数提高到 0.8(以上计算的初始雷诺数均为 $Re_\lambda = 72$)。但当初始马赫数继续提高时, 这些格式仍受到起动问题的限制。构造一种既能捕捉激波, 又能分辨湍流微尺度的差分格式对于可压湍流的直接数值模拟是非常有意义的。

在差分格式的构造上, 傅德薰和马延文 (1996, 1997) [5, 6]提出了群速度控制思想, 其基本思想是保证间断两侧的数值振荡向间断方向传播 (而不是背离间断)。假设间断向右传播, 则在间断左侧应采用快格式 (数值振荡传播的速度快于间断传播的速度), 在间断右侧应选择慢格式 (数值振荡的传播速度慢于间断)。张涵信和庄逢甘 (1996) [7]也提出了类似的思想 (“抑制波动原则”), 即保证间断两侧的数值振荡向间断集中, 在具体实现上可以采用修正方程奇数项的系数来控制, 在间断左侧该系数为负, 右侧该系数为正。在格式的构造上群速度控制思想与抑制波动原则是等价的。

2. 差分格式的构造

对于模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{假设 } a > 0)$$

构造迎风偏斜差分格式:

$$u'_j = (a_1 u_{j+4} + a_2 u_{j+3} + a_3 u_{j+2} + a_4 u_{j+1} + a_5 u_j + a_6 u_{j-1} + a_7 u_{j-2} + a_8 u_{j-3} + a_9 u_{j-4} + a_{10} u_{j-5}) / \Delta \quad (1)$$

其中 Δ 为网格间距, 在 j 点进行 Taylor 展开得到关于 a_j ($j=1, 2 \dots 10$) 的约束方程:

¹ 力学所 LHD 实验室。

$$\sum_{j=1}^{10} (5-j)^k a_j = S_k \quad (k=0,1 \dots K_{\max}) \quad (2)$$

其中 $S_k = \begin{cases} 1 & \text{when } k=1 \\ 0 & \text{when } k \neq 1 \end{cases}$, 格式 (1) 具有 K_{\max} 阶精度。

令 $K_{\max}=8$, 并令 a_{10} 为自由参数, 求解 (2) 可得到含自由参数的 8 阶精度差分格式。
这时反映色散误差的数值波数为:

$$k_i = -a_1 \sin 4\alpha - a_2 \sin 3\alpha - a_3 \sin 2\alpha - a_4 \sin \alpha + a_5 \sin \alpha + a_7 \sin 2\alpha + a_8 \sin 3\alpha + a_9 \sin 4\alpha + a_{10} \sin 5\alpha$$

根据群速度控制思想有:

$$\frac{dk_i}{d\alpha} > 1 \quad (\text{在间断左方}), \quad \frac{dk_i}{d\alpha} < 1 \quad (\text{在间断右方}) \quad (3)$$

图 1 为 $a_{10} = -0.008, -0.006, -0.004, -0.002, 0, 0.002$ 时对应的 k_i 随 α 的变化情况从中可

以看出当 α 较小时 $a_{10} = -0.008, -0.006, -0.004$ 对应的格式为快格式 ($\frac{dk_i}{d\alpha} > 1$),

$a_{10} = -0.002, 0, 0.002$ 对应的格式为慢格式。在间断左右两侧分别采用适当的快格式及慢格式就可构造出具有间断捕捉能力的群速度控制型差分格式。

具体步骤如下:

$$\text{令 } u'_j = (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) / \Delta \quad (4)$$

其中

$$F_{j+1/2} = b_1 u_{j+4} + b_2 u_{j+3} + b_3 u_{j+2} + b_4 u_{j+1} + b_5 u_j + b_6 u_{j-1} + b_7 u_{j-2} + b_8 u_{j-3} + b_9 u_{j+4} \quad (5)$$

其中: $b_1 = a_1$, $b_k = b_{k-1} + a_k$ ($k=2,3,\dots,9$) (6) a_k 为 (1) 式的系数。

当 $|\Delta u_{j-1/2}| < |\Delta u_{j+1/2}|$ (在间断左侧), 取 $a_{10} = a_{10}^{(1)}$

当 $|\Delta u_{j-1/2}| > |\Delta u_{j+1/2}|$ (在间断右侧), 取 $a_{10} = a_{10}^{(2)}$

由 (2), (6) 定出系数 b_k 并由 (4), (5) 求出一阶导数的逼近, 其中 $\Delta u_j = u_{j+1/2} - u_{j-1/2}$ 。

以上是模型方程 $a>0$ 的情况。当 $a<0$ 时可同样构造。可以证明, 本格式在光滑区域具有八阶精度, 在个别点退化为七阶精度。本文将之称为八阶精度的群速度控制格式 (GVC8)。该格式的计算量与 9 阶普通迎风差分相当, 远低于目前流行的 5 阶 WENO 格式[8]。

3. 系数的选取与优化

格式 (4) 中包含了两个自由参数 $a_{10}^{(1)}$ 与 $a_{10}^{(2)}$, 可以选择一定的优化原则来选取这两个系数。由于本文的目的在于捕捉湍流场中的微激波, 因此格式对激波的捕捉能力及对高波数物理量的分辨能力将成为选择这两个系数的判据。

考虑一维 SOD 激波管问题[8], 设初值条件为:

当 $x < 1/2$ 时: $u = 0, \rho = \rho_s, p = p_s$ 当 $x \geq 1/2$ 时: $u = 0, \rho = 0.125, p = 0.1$

设 $p_s = \rho_s$ 。 p_s 值越大说明间断（激波）的强度越强。采用本文构造的格式（GVC8）求解该 SOD 问题，当 p_s 超过一定值时，计算将不稳定，通常表现为数值计算发散。可以根据不同系数的 GVC8 格式能够模拟的最高 p_s 值衡量格式对强间断的捕捉能力。计算网格点取为 128，时间推进采用 3 阶 TVD 型的 Runge-Kutta 方法。表 1 为采用不同系数 GVC8 格式能够模拟到的最高 p_s 值（定义为 p_{smax} ）。

$(a_{10}^{(1)}, a_{10}^{(2)})$	p_{smax}	$(a_{10}^{(1)}, a_{10}^{(2)})$	p_{smax}
(-0.00128, 0.0042)	8.5	(-0.006, -0.004)	3.5
(-0.006, 0.001)	17.0	(-0.008, -0.003)	5.0
(-0.008, 0.001)	12.0	(-0.005, -0.005)	3.0
(-0.006, 0.0015)	18.5	(-0.0015873, -0.0015873)	1.5

表 1 不同系数的 GVC8 格式可以模拟的最大 p_s 值

在上表中还列出了 $a_{10}^{(1)} = a_{10}^{(2)}$ 的几种情况，当 $a_{10}^{(1)} = a_{10}^{(2)}$ 时，格式为普通的 8 阶迎风偏斜格式。其中 $a_{10}^{(1)} = a_{10}^{(2)} = -0.0015873$ 时，格式为 9 阶迎风偏斜格式。这时格式的精度较高，但对于强间断的捕捉能力较差。从上表可以看出 $(a_{10}^{(1)}, a_{10}^{(2)})$ 取 $(-0.006, 0.001)$ 及 $(-0.006, 0.0015)$ 时格式对强间断的捕捉能力较强。

湍流直接数值模拟的关键在于高波数物理量的模拟，对高波数成分的捕捉能力差会使数值计算过于耗散。设 $u = \sin 16x \quad x \in [0, 2\pi]$ ，采用上述格差分式计算导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的差分逼近。

定义误差: $err = \max |u'_j - 16 \cos 16x_j|$ 其中 u'_j 为导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的差分逼近。取计算网格点为 128，图 4 为采用不同 $a_{10}^{(1)}$ 与 $a_{10}^{(2)}$ 对应的差分格式逼近导数的误差。从图中可以看出

在图中的范围内，误差随着 $a_{10}^{(1)}$ 的增大而减小，随着 $a_{10}^{(2)}$ 的增大而增大。

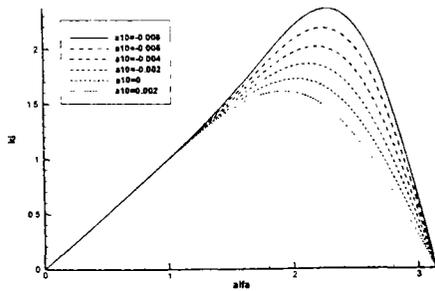


图 1 不同 a_{10} 对应的 k_i 随 α 的变化曲线

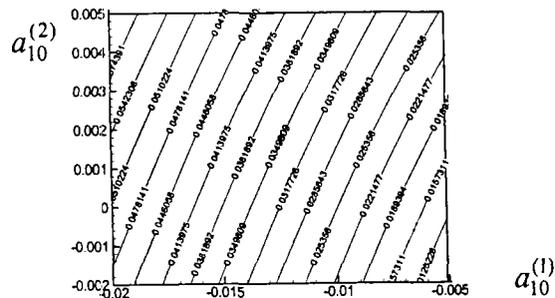


图 2 用不同 $a_{10}^{(1)}$ 与 $a_{10}^{(2)}$ 的差分格式的误差

同时考虑到激波捕捉能力及小尺度分辨能力，本文取 $a_{10}^{(1)} = -0.006, a_{10}^{(2)} = 0.001$ 。

4. 较高湍流马赫数的均匀各向同性湍流的直接数值模拟

考虑均匀各向同性衰减湍流的直接数值模拟[2]。对控制流动的 N-S 方程进行流通矢量分裂, 分裂后的对流项采用本章构造的差分格式求解, 取 $a_{10}^{(1)} = -0.006, a_{10}^{(2)} = 0.001$ 。粘性项采用 10 阶中心差分格式逼近。时间推进采用三阶精度的 TVD 型 Rungue-Kutta 方法。

表 2 为本文计算的几种工况。为了进行比较, 本文还采用 5 阶精度的 WENO 格式 (逼近无粘项) 与 6 阶精度的中心 (逼近粘性项) 计算了 $M_t = 0.5$ 的工况。所有计算的 Re_λ 均为 72。可以看出采用 GVC8 格式可以使能够计算的最大初始湍流马赫数提高到了 0.95。为了验证结果, 本文还在 256^3 的网格点下重复了 D3 的数值计算。

CASE	Re_λ	Mt	数值方法	网格数
D1	72	0.5	GVC8	128^3
D2	72	0.8	GVC8	128^3
D3	72	0.9	GVC8	128^3
D4	72	0.95	GVC8	128^3
D5	72	0.5	WENO5	128^3
D6	72	0.9	GVC8	256^3

表 2 本文计算的工况

图 3 为 D1 的归一化湍动能及速度导数偏斜因子[2]随时间的变化。图中的符号为 Samentary 等人[2]的计算结果。可以看出本文结果与 Samentary 的结果吻合较好, 说明本方法在捕捉湍流微激波的同时对湍流微尺度也有较好的分辨能力。图中的虚线为 WENO5 的对应结果, 可以看出, WENO5 计算的湍动能的衰减明显快于 GVC8 的计算结果, 这说明 WENO5 的数值耗散明显偏大。图 4 为 D1 的用初始湍流马赫数归一化湍流马赫数及归一化的脉动密度均方根随无量纲时间变化情况。其中符号为 Samtanery 等人[2]的计算结果。可以看出本文的计算结果与 Samtanery 吻合较好, 说明本方法对于热力学量的计算结果也是可靠的。图中还绘出了采用 WENO5 格式计算的结果, 可以看出其耗散偏大。

图 5 为 D2 的归一化湍动能及速度导数偏斜因子随无量纲时间变化情况, 其中符号为与之相同计算条件下文[4]采用 5 阶广义紧致格式的计算结果。可以看出, 本文的归一化湍动能与文[4]吻合十分理想。速度导数偏斜因子也与文[4]吻合。图 6 为工况 D2 用初始湍流马赫数归一化湍流马赫数及归一化的脉动密度均方根随无量纲时间变化情况。其中符号为与之相同计算条件的文[4]的计算结果。可以看出本文的计算结果与该文吻合较好。图 3—图 6 验证了本文计算结果的正确性。

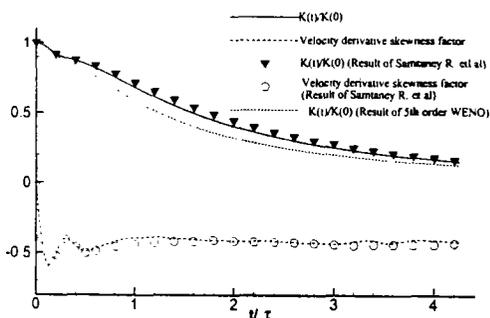


图 3 归一化的湍动能及速度导数偏斜因子随无量纲时间变化 ($Mt=0.5$)

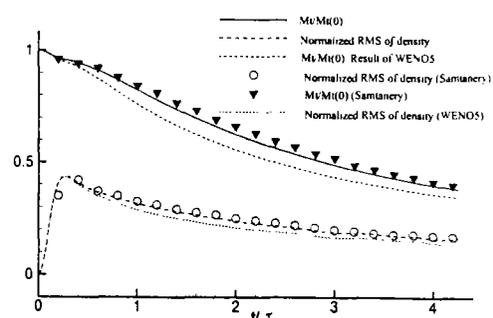


图 4 归一化的湍流马赫数及归一化的脉动密度均方根随无量纲时间的变化 ($Mt=0.5$)

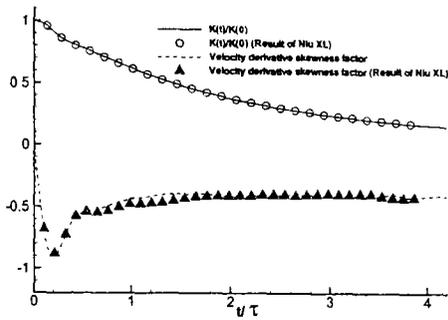


图 5 归一化湍动能及速度导数偏斜因子随无量纲时间的变化 (Mt=0.8)

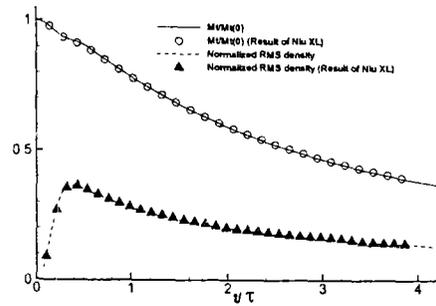


图 6 归一化的湍流马赫数及归一化的脉动密度均方根随无量纲时间的变化(Mt=0.8)

图 7 为不同初始马赫数流场的归一化湍动能随无量纲时间的变化图。可以看出随着湍流马赫数的增加湍动能的衰减加快,这与流场中随机微激波增加了湍动能的耗散有关。图 8 为工况 D3 与 D6 归一化湍动能的衰减情况,可以看出二者吻合较好,这说明本文的计算结果与网格无关,同时说明在 128^3 的网格下 GVC8 格式的数值耗散与物理耗散相比是可以忽略的。

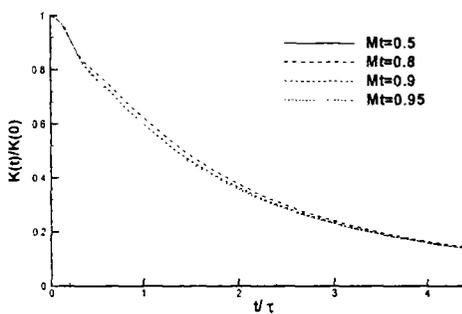


图 7 不同初始湍流马赫数流场归一化湍动能随无量纲时间的变化

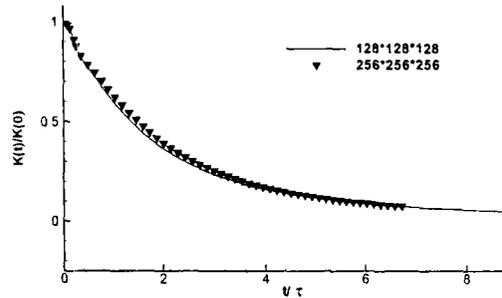


图 8 工况 D3 及 D6 的归一化湍动能随无量纲时间的变化

通过对流场的分析,作者发现该在流动中流场的最高局部 Mach 数远大于整个流场的平均 Mach 数。例如在算例 D6 中,当 $t/\tau = 1$ 时整个流场的平均 Mach 数是 0.653,而流场中的最大局部 Mach 数达到了 3.276,远高于平均 Mach 数。作者认为这是由于湍流间歇性造成的,因此作者推测可压湍流的间歇性是流场中出现微激波的重要原因。

标度律的研究是近期湍流机理研究的热点,近期湍流场中扩展自相似性(ESS)的发现使得流场标度指数的计算及测量的可靠性有了很大提高[9]。可压湍流(特别是含有微激波的可压湍流)流场中是否存在扩展自相似性尚未有文献报道。图 9 反映了算例 D6 在 $t/\tau = 1$ 时刻流场(这时 $Re_\lambda = 33.05$, $M_t = 0.715$)中 p 阶速度结构函数与 3 阶速度结构函数[9]之间的关系,可以看出二者的对数值之间呈现非常明显的线性关系,说明二者之间存在幂次关系。这说明在这种湍流马赫数较高的流场中仍存在扩展自相似性。图 9 中各直线的斜率就是相对标度指数,本文采用最小二乘法来计算这些标度指数。图 10 为该流场的扩展标度指数,为了进行对比本文还绘出了文[3]中流场 F7 ($Re_\lambda = 73.87$, $M_t = 0.54$)的相对标度指数,可以看出二者之间的差距非常小,这说明了标度指数的普适性。从该图还可以看出,本文计算的标度指数与 SL 理论[9]吻合较好。

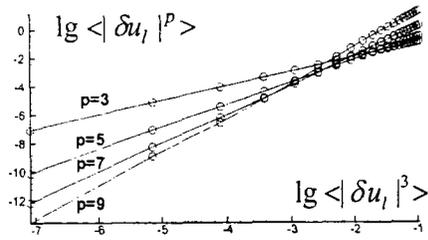


图9. 工况 D6 $t/\tau = 1$ 时刻流场中的扩展自相似性

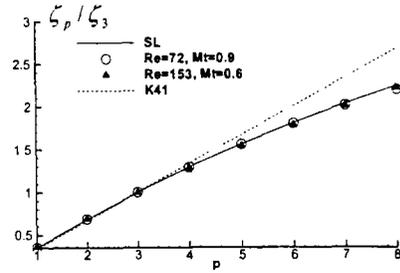


图 10. 流场的相对标度指数

结论

计算结果表明本文构造的 GVC8 格式具有较强的激波捕捉能力及很好的小尺度分辨能力，是数值模拟含有微激波的可压缩湍流的有效方法。同时，结果表明即使在较高的湍流马赫数下，扩展自相似性仍然成立，且压缩性效应对标度指数影响很小，说明了标度指数的普适性。

致谢：感谢国家攀登 A、自然科学基金及国家重点基础研究专项经费(G1999032805)为本文的研究提供经费支持。感谢工程与科学计算国家重点实验室（LSEC）为本文的计算提供机时，感谢 LSEC 的张林波研究员对本程序改进提供的帮助。感谢陈十一教授和何国威研究员为本文计算初值的选取进行的指导。

参考文献：

1. Moin P, Mahesh K. 1998. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. Annu. Fluid Mech. 1998,30:539-78.
2. Samtaney R, Pullin DI, Kosovic B. Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics. Phys. Fluids. 2001,13(5),1415-1430.
3. Li XL, Fu DX, Ma YW. Direct Numerical Simulation of Compressible Isotropic Turbulence. Science in China, serial A (to appear).
4. 牛晓玲, 激波捕捉广义紧致格式及其在湍流 DNS 中的应用。[博士论文], 清华大学博士研究生学位论文, 2002。
5. Fu DX, Ma YW, Kobayashi T, et al. Nonphysical oscillations in numerical solutions — a reason and improvement. Computational Fluid Dynamics JOURNAL. Vol 4, no. 4, 1996,427-450.
6. Fu DX, Ma YW. A high order accurate difference scheme for complex flow. Journal of Computational Physics, 134, 1997, 1-15.
7. 张涵信, 庄逢甘. 关于建立高阶精度差分格式的问题. 旋涡运动的分析研究与数值模拟 (第一集), 中国空气动力研究与发展中心计算空气动力学研究所, 1996. 75-81
8. Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. J. Comp. Phys., 1994, 115: 200-212
9. 余振苏, 苏卫东, 湍流的层次结构和标度律. 力学进展 vol. 29, 3, 1999。