

# 大 Marangoni 数下液滴热毛细迁移实验的物理机制

武作兵

(中国科学院力学研究所 LNM, 北京 100190)

**摘要:** 从流动区域的能量守恒条件出发, 研究附加温度梯度的流场中液滴定态热毛细迁移的界面热流。采用渐进展开方法, 发现在大 Marangoni 数下液滴的定态热毛细迁移存在非守恒的积分界面热流。非守恒积分界面热流很可能源于无效的定态迁移假设。表明大 Marangoni 数下, 液滴热毛细迁移不能达到定态而保持非定态过程。这意味着大 Marangoni 数下液滴的非定态迁移源于热能从液滴外向内弱的传递, 因而环绕液滴的热对流是热能在环绕液滴或向内传递过程中更重要的机制。

**关键词:** 液滴; 表面张力; 热毛细迁移; Marangoni 数; 微重力

## 0 引言

液滴(气泡)在流体介质中的输运过程是很多自然现象和工程应用中的关键基础问题。在重力的作用下, 当两相流体介质密度不同时, 液滴基于浮力和重力运动。在微重力环境下, 浸含在流体介质中的液滴(气泡)的浮力效应基本消失, 而其界面的表面张力变为控制液滴(气泡)运动的主要驱动力。由于表面张力反比于界面的温度, 因此外加不均匀温度场将导致液滴(气泡)出现移动, 即热毛细迁移<sup>[1]</sup>。

对于小 Marangoni (Reynolds) 数, Braun et al (1993) 实验测得的液滴迁移速度与 YGB<sup>[2]</sup>线性预测值符合较好<sup>[3]</sup>。但对于大 Marangoni (Reynolds) 数, 由于迁移时间加长和系统参数随温度变化的原

因使得迁移过程变得复杂, 目前仅存在两组实验。美国 NASA 的 Hadland et al (1999) 在 IML-2 航天飞机上采用 10cs 硅油为母液, FC-75 氟液为液滴进行了液滴热毛细迁移实验, 实验最大的 Marangoni (Reynolds) 数达到 3300 (49.1)<sup>[4]</sup>。中国科学院力学研究所微重力国家实验室的 Xie et al (2005) 在神州四号飞船上搭载实验中采用 5cs 硅油为母液, FC-75 氟液为液滴进行了液滴热毛细迁移实验, 实验最大的 Marangoni (Reynolds) 数达到 5525 (302.6)<sup>[5]</sup>。两组空间实验所测得的液滴迁移速度随 Marangoni 数的变化结果与已有的理论分析和数值计算结果定性不符, 即迁移速度随 Marangoni 数增加而减小<sup>[6-7]</sup>。所以大 Marangoni 数下液滴的热毛细迁移实验的物理机制还有待阐明。

现有的理论分析和数值结果都基于准定态迁移

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11172310)

作者简介: 武作兵, 男, 研究员; E-mail: wuzb@lnm.imech.ac.cn

过程假设。本文从流动区域的能量守恒条件出发，研究附加温度梯度的流场中液滴定态热毛细迁移的界面热流，简要报告了近年来我们在液滴热毛细迁移的研究进展，更为详细的内容请参见文献<sup>[8-10]</sup>。

## 1 物理模型和准定态假设

### 1.1 物理模型

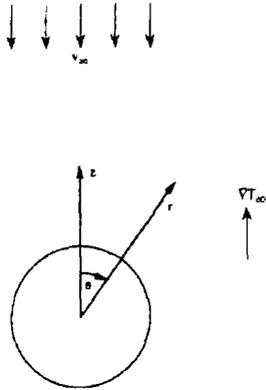


图1. 随体坐标系下的液滴定态迁移

Fig.1 Thermocapillary droplet migration in a coordinate system moving

with the droplet velocity  $V_\infty$ .

### 1.2 控制方程

液滴在准定态迁移下质量、动量和能量的守恒方程为：

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0.$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i = -\nabla p_i - \frac{\nu_i \nu_j}{Re} \Delta \mathbf{u}_i.$$

$$\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i \cdot \nabla T_i = \frac{\kappa_i \kappa_j}{\lambda T_0} \Delta T_i.$$

无量纲化得

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \lambda \epsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right).$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \lambda \epsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right).$$

这里  $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda \Delta T_\infty}}$ 。

### 1.3 边界条件

界面边界条件：

$$v_{r1}(1, \theta) = v_{r2}(1, \theta) = 0,$$

$$v_{\theta 1}(1, \theta) = v_{\theta 2}(1, \theta),$$

$$\frac{\partial (v_{\theta 1})}{\partial r} \Big|_{r=1} = \left( \frac{\partial (v_{\theta 2})}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{r=1},$$

$$\left( p_1 - \frac{2}{Re} \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = \left( p_2 - \frac{2\alpha}{Re} \frac{\partial v_{r2}}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = -\frac{2\sigma}{R_0} \Big|_{r=1},$$

$$T_1(1, \theta) = T_2(1, \theta),$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=1} = \beta \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=1},$$

无穷远边界条件：

$$\mathbf{u}_i(r \rightarrow \infty, \theta) = (-V_\infty \cos \theta, V_\infty \sin \theta),$$

$$T_i(r \rightarrow \infty, \theta) = r_\infty \cos \theta.$$

## 2 准定态条件下液滴表面的积分热流

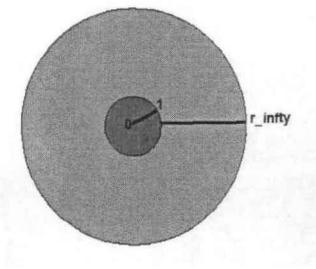


图2. 液滴定态迁移下的两个流体区域

Fig.2 Two flow domains under thermocapillary steady migration of droplet

准定态条件下一个控制体的能量平衡表现为控制区域能量的改变等于进入和离开该区域的能量差。我们将液滴内部和外部作为两个控制体，上述能量守恒可以由积分形式的能量方程来表达。为了完成液滴外部的能量方程的积分，需要无穷远处的温度边界条件，下面我们采用渐进展开方法获得。

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^0 + o(1), \quad v_1 = v_1^0 + o(1), \quad T_1 = T_1^0 + o(1)$$

带入能量方程可以得到

$$1 + u_1^0 \frac{\partial T_1^0}{\partial r} + v_1^0 \frac{\partial T_1^0}{\partial \theta} = 0$$

采用特征线方法解得

$$T_1^0 = r \cos \theta + \int_r^\infty (v_1^0 \sin \theta - u_1^0 \cos \theta - 1) / u_1^0 \psi dr$$

在无穷远处速度场采用无粘势流

$$u_1^0 = -\cos \theta (1 - 1/r^2),$$

$$v_1^0 = \sin \theta (1+1/r^2)$$

积分上式可得无穷远温度

$$T_1 = r \cos \theta - 1/r \cos \theta + o(1).$$

我们分别对液滴内部和外部进行能量方程的积分得到

$$2/3(r_\infty^3 - 1) + \oint u_{1n} T_{1|_{r=\infty}} ds - \oint u_{1n} T_{1|_1} ds = \varepsilon^2 (\oint \partial T_1 / \partial n |_{r=\infty} ds - \oint \partial T_1 / \partial n |_1 ds),$$

$$2/3 + \oint u_{2n} T_{2|_1} ds = \lambda \varepsilon^2 \oint \partial T_2 / \partial n |_1 ds.$$

将界面速度和无穷远温度条件带入上式可得

$$\oint \partial T_1 / \partial n |_1 ds = -1 / (3 \varepsilon^2),$$

$$\oint \partial T_2 / \partial n |_1 ds = 2 / (3 \lambda \varepsilon^2).$$

即

$$\beta \oint \partial T_2 / \partial n |_1 ds - \oint \partial T_1 / \partial n |_1 ds = (1 + 2 \beta / \lambda) / (3 \varepsilon^2) \\ = (1 + 2 \beta / \lambda) / 3 V_\infty Ma.$$

由于  $\beta$  和  $\lambda$  均为正值, 在大 Marangoni 数下有

$$\beta \oint \partial T_2 / \partial n |_1 ds \gg \oint \partial T_1 / \partial n |_1 ds.$$

而对应的积分边界条件应为

$$\oint \partial T_1 / \partial n |_1 ds = \beta \oint \partial T_2 / \partial n |_1 ds.$$

这样, 在准定态条件下, 我们获得了非守恒的积分热流边界条件。因此, 首先非守恒积分界面热流源于无效的定态迁移假设。表明大 Marangoni 数下, 液滴热毛细迁移不能达到定态而保持非定态过程。其次, 液滴内部热流远远大于外部热流, 这意味着大 Marangoni 数下液滴的非定态迁移源于热能从液滴外向内弱的传递, 因而环绕液滴的热对流是热能在环绕液滴或向内传递过程中更重要的机制。

### 3 结论

从流动区域的能量守恒条件出发, 研究附加温度梯度的流场中液滴定态热毛细迁移的界面热流。采用渐近展开方法, 发现在大 Marangoni 数下液滴

的定态热毛细迁移存在非守恒的积分界面热流。非守恒积分界面热流源于无效的定态迁移假设。表明大 Marangoni 数下, 液滴热毛细迁移不能达到定态而保持非定态过程。这意味着大 Marangoni 数下液滴的非定态迁移源于热能从液滴外向内弱的传递, 因而环绕液滴的热对流是热能在环绕液滴或向内传递过程中更重要的机制。

感谢国家自然科学基金委通过项目 No. 1172310 的支持, 感谢中国科学院超算中心和中国科学院力学研究所计算平台的协助。

### 参考文献:

- [1] 胡文瑞, 徐硕昌, 微重力流体力学, 科学出版社, 1999.
- [2] N. O. Young, J. S. Goldstein and M. J. Block (1959), The motion of bubbles in a vertical temperature gradient, *J. Fluid Mech.* 6, 350.
- [3] B. Braun, C. Ikier and H. Klein, Thermocapillary migration of droplets in a binary mixture with miscibility gap during liquid, liquid phase separation under reduced gravity, *J. Colloid Interface Sci.* 159, 515 (1993).
- [4] P. H. Hadland, R. Balasubramaniam, and G. Wozniak (1999), Thermocapillary migration of bubbles and drops at moderate to large Marangoni number and moderate Reynolds number in reduced gravity, *Experiments in Fluids*, 26, p. 240.
- [5] J. C. Xie, H. Lin, P. Zhang, F. Liu, W. R. Hu (2005), Experimental investigation on thermocapillary drop migration at large Marangoni number in reduced gravity, *J. Colloid Interface Sci.* 285, 737.
- [6] R. Balasubramaniam and R. S. Subramanian (2000), The migration of a drop in a uniform temperature gradient at large Marangoni numbers, *Phys. Fluids* 12, 733.
- [7] X. Ma, R. Balasubramian and R. S. Subramanian (1999), Numerical simulation of thermocapillary drop motion with internal circulation, *Numer. Heat Transfer, A* 35, 291.
- [8] Z. Yin, Zuo-Bing Wu and Wen-Rui Hu, Thermocapillary migration of drops and bubbles, *Advances in Microgravity Sciences*, ed. W. R. Hu, Transworld Research Network, India (2009) pp. 35-52
- [9] Zuo-Bing Wu and Wen-Rui Hu, Thermocapillary migration of a planar droplet at moderate and large Marangoni numbers, *Acta Mechanica*, Vol. 223, pp. 609-626, (2012).
- [10] Zuo-Bing Wu and Wen-Rui Hu, Effects of Marangoni numbers on thermocapillary drop migration: Constant for quasi-steady state? *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 54, pp. 023102(1-10), (2013).

# Physical mechanism of thermocapillary migration experiment of droplet at large Marangoni numbers

Zuo-Bing Wu

*(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)*

**Abstract:** From the overall steady-state energy balance in the flow domain, a non-conservative integral thermal flux across the surface for a steady thermocapillary droplet migration at large Marangoni numbers is found by using the asymptotic analysis. It presents that the thermocapillary droplet migration at large Marangoni numbers cannot reach any steady states and is thus a unsteady process.

**Key words:** Droplet; Surface tension; Thermocapillary migration; Marangoni numbers; Microgravity