

基于曲线梁理论求解活塞环的自由振动特性*

张良† 曾晓辉

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘要: 依据曲线梁弹性理论, 对一端自由和一端固支的曲线梁进行了面内和面外自由振动分析。依据曲线梁两端的边界条件, 对振动方程进行了求解。给出了不同开口条件下, 曲线梁面外振动特征计算结果。进而, 分析了几种不同材料活塞环的自由振动特性。

关键词: 曲线梁, 活塞环, 振动特性, 耦合振动

一、振动方程的建立

本文依据love的弹性曲线梁理论^[1], 从曲梁的平衡微分方程出发分别建立了活塞环的面内和面外振动方程^[2]。

依据曲梁微段的平衡条件, 考虑到线性方程的振动是简谐的, 对于等截面曲线梁, 得到等截面曲线梁平面挠曲的固有振动方程为:

$$\left. \begin{aligned} EI_x v^{IV} + \frac{EA}{R^2} v + \frac{EI_x}{R} w''' - \frac{EA}{R} w' &= m\omega^2 v \\ \left(EA + \frac{EI_x}{R^2} \right) w'' + \frac{EI_x}{R} v''' - \frac{EA}{R} v' &= -m\omega^2 w \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

曲线梁的面外振动方程可以表示为:

$$\left. \begin{aligned} \left(EI_y + \frac{EI_w}{R^2} \right) u^{IV} + \left(N - \frac{GI_d}{R^2} \right) u'' + \frac{EI_w}{R} \theta^{IV} - \frac{EI_y + GI_d}{R} \theta'' &= m\omega^2 u \\ EI_w \theta^{IV} - GI_d \theta'' + \frac{EI_y}{R^2} \theta + \frac{EI_w}{R} u^{IV} - \frac{EI_y + GI_d}{R} u'' &= I_s \omega^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

二、振动方程的求解

2.1 面内振动方程求解

并引入面内振动时曲线梁轴向不伸缩的假定: $\varepsilon = w' - \frac{v}{R} = 0$, 对方程(2)进行化简, 得到等截面曲线梁平面挠曲的固有振动方程为:

*基金项目: 国家自然科学基金(11072246; 10702073)

†作者简介: 张良 1988. 3, 结构动力学, 硕士研究生; lhozhl@163.com
曾晓辉 1972. 4, 工程结构动力响应和流固耦合, 副研究员

$$\frac{d^6 w}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + (1 - \Omega) \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \Omega w = 0 \quad (3)$$

其通解为: $w = A_1 \cos n_1 \varphi + B_1 \sin n_1 \varphi + A_2 \cos n_2 \varphi + B_2 \sin n_2 \varphi + A_3 \cos n_3 \varphi + B_3 \sin n_3 \varphi$

2.2 面外振动方程求解

由于闭口截面的曲线梁, 约束扭转项相对于自由扭转项是微小的, 忽略可以不计。对方程(2)进行解耦:

$$GI_d \theta^{IV} + \frac{2GI_d}{R^2} \theta'' + \frac{GI_d}{R^4} \theta = -q \frac{EI_y + GI_d}{REI_y} + m \frac{GI_d}{R^2 EI_y} - m'' \quad (4)$$

分别求出方程(4)通解和特解

$$\theta = \theta_H + \theta_P = A \cos \frac{s}{R} + B \sin \frac{s}{R} + C_s \cos \frac{s}{R} + D_s \sin \frac{s}{R} + \frac{R^2}{EI_y} m - \left(\frac{R^3}{GI_d} + \frac{R^3}{EI_y} \right) q$$

算例分析

本文分别计算了不同开口的曲线梁, 并与国外学者Ekrem的结果进行了对比^[3], 验证了该方法的准确性。在此基础上计算了不同材料活塞环的振动特性, 随着材料弹性模量的增加, 活塞环的面内振动和面外振动频率均会有所增加, 这对于在工程中选择合适的活塞环材料具有参考价值。

结论

本文应用曲线梁理论计算了不同的开口情况下, 等截面曲线梁结构的振动特征变化: 曲线梁结构开口越大, 自由振动的频率越低。本文还用曲线梁理论计算了几种不同的材料活塞环, 相同尺寸条件下, 材料的弹性模量越大, 活塞环的振动频率越高。

参 考 文 献

- 1 A R H Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity[M]. Dover Publications, 1944
- 2 赵跃宇, 康厚军, 冯锐, 劳文全. 曲线梁研究进展. 力学进展[J].2006,36,2: 170-186
- 3 Ekrem Tufekci, O Yasar Dogruer. Out-of-plane free vibration of a circular arch with uniform cross-section: Exact solution[J]. Journal of Sound and Vibration 2006,291: 525-538