扩散通量和源项摄动重构的对流扩散 FV 格式

高　智*，申义庆

中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室，北京，100190

E-mail: gaozhi@imech.ac.cn

关键词：计算流体力学，有限体积法，摄动有限体积格式，对流扩散方程

对工业应用计算，在精度、简单性、易维护、鲁棒性和效率诸因素综合考虑下，二阶中心格式是最好的折衷和选择。不过二阶中心格式当网格不够细密的时将导致振荡解甚至发散。本文利用作者提出的数值摄动算法，从对流扩散方程的二阶中心有限体积（FV）格式出发，对扩散通量和源项同时进行数值摄动重构，构建出二个新的有实用价值的摄动中心 FV 格式。新格式具有如下的特点。格式的结点、结构（或称基元）与原二阶中心 FV 格式一致，但新格式插值近似精度高（为四阶和六阶精度）、稳定范围大且四阶摄动格式为绝对稳定；源项的摄动重构步长多项式恒为 1，特别是新摄动格式不包含二阶中心 FV 格式固有的结点到界面的距离参数，因此，重构扩散通量—源项之摄动格式，它的综合性能显著优于常用的二阶中心 FV 格式。此外，摄动格式的精度本质上是离散方程的精度，与导数离散的精度不同，摄动格式因此也提高了函数源项的计算精度，减轻了函数源项引起的假扩散现象，该现象使许多熟知的高精度格式的实际计算精度大为降低。解析分析和模型方程的数值实验证实了新摄动格式的优良性能，新格式同样用于不可压 Navier-Stokes 方程组计算。

算例 1. 线性对流扩散方程

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\qquad 0\le x\le 1,\quad \varphi(0)=0,\quad \varphi(1)=1 \tag{1}$$

算例 2. 带源项的线性对流扩散方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\upsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\upsilon\frac{9\pi^2}{4}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi x}{2},\ \varphi(0)=0,\quad \varphi(1)=1 \tag{2}$$

算例 3. 非线性 Burgers 方程

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad 0<x<1, \tag{3}$$

边界条件满足 Burgers 方程的如下精确解 ：$u(x)=\tanh[\frac{1}{4}\mathrm{Re}(1-2x)]$

表 1 给出指数 FV 格式（EVS）、一阶迎风 FV 格式（1UVS）、二阶中心 FV 格式（2CVS）、四阶和六阶扩散通量-源项重构格式 4PCVS 和 6PCVS 求解方程（1）和（2）的均方根（mean square root）误差。可见 4PCVS 和 6PCVS 求解无源项方程（1）的精度大大高于 1UVS 和 2CVS 的精度，且粗网格时不振荡，而 2CVS 在粗网格时产生振荡解。4PCVS 和 6PCVS 求解有函数源项方程（2）的精度与 EVS 的精度相当，但 EVS 的精度大大低于它求解无源项方程（1）的精度，前者的误差约是后者的 10^7 倍，而 4PCVS 求解有源项方程（2）的误差仅是它求解无源方程（1）的误差的 $10\sim10^2$ 倍；1UVS 求解方程（2）的误差比它求解方程（1）的误差约大 1.3~7.5 倍；2CVS 求解有源项方程（2）的均方根误差仅是它求解无源方程（1）的误差相当，但产生振荡解的范围有所扩大。综合其来看，PCVS 在减轻函数源项引起的假扩散现象“提高”函数源项的计算精度有一定的优势和作用。

表 1. 各种格式的均方根误差对比

schem / Eq. / N L2	EVS		1UVS		2CVS		6PCS		4PCS	
	Eq.(1)	Eq.(2)	Eq.(1)	Eq.(2)	Eq.(1)	Eq.(2)	Eq.(1)	Eq.(2)	Eq.(1)	Eq.(2)
20	0.652E-10	0.127E-00	0.199E-01	0.155E-00	0.953E-00	0.982E-00	0.953E-00	0.982E-00	0.692E-01	0.251E-00
40	0.332E-10	0.494E-01	0.254E-01	0.809E-01	0.105E-01	0.418E-01	0.105E-01	0.418E-01	0.154E-01	0.667E-01
80	0.606E-10	0.153E-01	0.243E-01	0.451E-01	0.266E-03	0.151E-01	0.266E-03	0.151E-01	0.177E-02	0.168E-01
160	0.595E-10	0.214E-02	0.165E-01	0.250E-01	0.461E-05	0.412E-02	0.461E-05	0.412E-02	0.124E-03	0.427E-02
320	0.656E-10	0.105E-02	0.950E-02	0.133E-01	0.708E-07	0.105E-02	0.708E-07	0.105E-02	0.762E-05	0.106E-02
640	0.808E-10	0.264E-03	0.511E-02	0.690E-02	0.100E-08	0.264E-03	0.100E-08	0.264E-03	0.471E-06	0.265E-03

表 2 给出 1UVS、2CVS、4PCVS 和 6PCVS 求解非线性 Burgers 方程（3）的均方根误差，计算中取 Re=200，由表 2 数据可知，对于非线性 Burgers 方程的数值求解，不论在精度还是不振荡性质方面，4PCVS 和 6PCVS 均比 1UVS 和 2CVS 具有显著的优势。

表 2. 精度测试，线性对流方程，$T = 1$

N	1UVS	2CVS	5DPCVS	6PCVS
20	0.5125E-00	/	0.6821E-01	0.2014E-01
40	0.3211E-00	/	0.1721E-01	0.5231E-02
80	0.4151E-01	/	0.4355E-02	0.9834E-03
160	0.2034E-01	/	0.2249E-02	0.4646E-03
320	0.1007E-01	0.1851E-01	0.1065E-02	0.1578E-03

参考文献：

[1] Ferziger JH, Peric M, Computational Methods for Fluid Dynamics. 3rd ed. Berlin.2002

[2] 高智. 对流扩散方程的数值摄动有限体积方法. 第十一届全国计算流体力学会论文集（38-45 页）,2002，洛阳，河南

[3] Gao Z. Numerical perturbation algorithm and absolute positive high order accurate central finite volume schemes for convective diffusion equation. In Proc .of 8th Asian Computational Fluid Dynamics. Jan. 2010 Hong Kong.

[4] 高智. 对流扩散方程的两个绝对稳定、高阶精度中心有限差分格式. 力学学报. 2010,42 (5): 811-817.

[5] Jameson A. Positive schemes and shock modeling for compressible flows. Inter. Jour. Nume.Methods in Fluids. 1995, 20:743-776

[6] 李荫藩,宋松和,周铁. 双曲型守恒律的高阶、高分辨有限体积法. 力学进展,2001,(02):245-263.