均匀各向同性湍流中速度和速度梯度的时间尺度

董宇峰，晋国栋，何国威

（非线性力学国家重点实验室，中国科学院力学研究所，北京 100190）

摘要：本文采用准正态分布理论解析计算出了不可压缩均匀各向同性湍流中速度梯度张量的欧拉和拉格郎日时间尺度。从计算结果中可以得到如下结论：（1）对于欧拉时间关联来说，速度和速度梯度具有相同的去关联机制，它们的特征时间尺度由随机扫掠效应确定；（2）对于拉格郎日时间关联来说，速度和速度梯度也具有相同的去关联机制，它们的特征时间尺度由拉伸效应确定。我们计算得到的速度梯度的拉格郎日时间尺度证实了 Meneveau 等人的猜测，并且这一时间尺度也可以作为 Meneveau 等人提出的封闭模型的输入参数。

关键词：速度梯度，时间尺度，均匀各向同性湍流

引　言

自然界以及工业中与生产生活密切相关的大部分流动都是湍流。从天气预报，到预测发动机内部流场，再到设计飞机、汽车的外形等等，都离不开对湍流的研究。湍流中的速度场是流体力学基本方程组——Navier-Stokes (N-S) 方程的混沌解，它是随机的，所以通常都用统计力学方法来研究湍流。在湍流的研究中，最常用同时也最常被研究的二阶统计量是速度场和速度梯度张量等的空间关联、时间关联以及时空关联。从发展雷诺应力模型，到发展大涡模拟的亚格子模型，再到计算气动噪声，都离不开对时间关联、空间关联以及时空关联的研究。

研究时间、空间关联的理论方法主要有两种：一种是从 N-S 方程出发，通过构造关联函数的控制方程来计算出时间或空间关联【1】；另一种方法是通过对关联函数关于时间或空间分离做 Taylor 展开，然后利用 N-S 方程计算 Taylor 展开中各项的系数（即特征尺度）【2】。这两种方法无论是哪一种都会遇到方程不封闭的问题：在第一种方法中必须要引入封闭模型，如“直接相互作用近似（DIA）”、“涡阻尼准正态马尔科夫近似（EDQNM）”、“随机扫掠模型（random sweeping）”等；在第二种方法中，通常只保留 Taylor 展开各项中最低阶的有效项而忽略掉高阶项——这种忽略掉高阶项的行为就相当于引入了一个封闭模型。比较而言：第一种方法需要准确抓住湍流中的各种机制；而第二种方法虽然只适应于时间或空间分离较小的情形，但是它的结论可以适应于较大的范围。在本文中我们采用后一种方法来研究时间关联和时空关联。

Tennekes【3】和 Kaneda【2】等人已经解析地研究过速度场的欧拉和拉格朗日时间尺度了，但是速度梯度张量——其与流场的剪切、应变，以及能量耗散有密切的联系——的时间尺度目前还较少有人解析地研究过；2010 年，Yu 等人通过数值模拟的结果证明速度梯度张量的拉格朗日时间尺度是基于局部平均耗散率的 Kolmogorov 时间尺度，从而验证了拉格朗日情形下的 Kolmogorov 相似性假设【4】，同时这一时间尺度也是封闭模型“最近流体变形近似（RFDA）”的输入参数【5】。这几个方面都促使我们从解析的角度来研究速度梯度张量的时间尺度。

1　时间尺度的定义

对定常均匀各向同性湍流中的物理量 $f(\mathbf{x},t)$，其时间关联 $\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t+\tau)\rangle$ 关于 τ 在 $\tau=0$ 处作 Taylor 展开可得

$$\frac{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t+\tau)\rangle}{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\rangle}=1+\frac{\left\langle f(\mathbf{x},t)\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\rangle}\times\tau+\frac{1}{2}\frac{\left\langle f(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\rangle}\times\tau^2+\cdots, \tag{1}$$

其中根据定常性可得$\left\langle f(\mathbf{x},t)\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{x},t)\right\rangle\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\rangle\equiv 0$，所以

$$\frac{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t+\tau)\rangle}{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\rangle}=1+\frac{1}{2}\frac{\left\langle f(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\rangle}\times\tau^2+\cdots. \tag{2}$$

据此，可以定义物理空间的 Taylor 时间微尺度为：

$$\frac{1}{\tau_f^2}\triangleq-\frac{\left\langle f(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\rangle}. \tag{3}$$

这时，时间关联可以写成

$$\frac{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t+\tau)\rangle}{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\rangle}=1-\frac{\tau^2}{2\tau_f^2}+\cdots. \tag{4}$$

由此可以看出，如果能够给出 Taylor 时间微尺度，就相当于给出了一个时间关联模型，我们计算 Taylor 时间微尺度的意义之一就在于此。计算 Taylor 时间微尺度的另外一个意义在于，拉格朗日 Taylor 时间微尺度是许多湍流封闭模型——如“涡阻尼准正态马尔科夫近似（EDQNM）”【1】、“最近流体变形近似（RFDA）”【5】等——所必需的输入参数。

在本文中，我们要计算的是速度梯度张量的欧拉时间尺度和拉格朗日时间尺度，以及可压缩湍流中速度的拉格朗日时间尺度。所谓的“欧拉时间尺度”，指的是“欧拉时间关联$\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t+\tau)\rangle$”的 Taylor 时间微尺度。所谓的“拉格朗日时间尺度”，指的是“拉格朗日时间关联$\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x}',t+\tau)\rangle$（其中$\mathbf{x}$和$\mathbf{x}'$表示同一条轨迹上的两点）”的 Taylor 时间微尺度。需要注意的是，如果点$\mathbf{x}$和$\mathbf{x}'$在同一条轨迹上，则有

$$\left.\frac{\partial f(\mathbf{x}',t+\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}+u_j(\mathbf{x},t)\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_j}=\frac{df(\mathbf{x},t)}{dt}. \tag{5}$$

所以，物理量$f(\mathbf{x},t)$在物理空间的拉格朗日 Taylor 时间微时间尺度τ_{fLP}的定义为

$$\frac{1}{\tau_{fLP}^2}\triangleq-\frac{\left\langle f(\mathbf{x},t)\frac{d^2}{dt^2}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\rangle}. \tag{6}$$

物理量$f(\mathbf{x},t)$在物理空间的欧拉 Taylor 时间微时间尺度τ_{fEP}的定义为

$$\frac{1}{\tau_{fEP}^{2}} \triangleq -\frac{\left\langle f(\mathbf{x},t)\dfrac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\left\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\right\rangle}, \tag{7}$$

其中，时间尺度τ_{fEP}和τ_{fLP}下标中的f表示这是物理量$f(\mathbf{x},t)$的时间尺度，E表示是欧拉时间尺度，L表示是拉格朗日时间尺度，P表示是物理空间的时间尺度。

利用统计定常性，时间尺度的定义也可以写成

$$\frac{1}{\tau_{fLP}^{2}} \triangleq \frac{\left\langle \dfrac{d}{dt}f(\mathbf{x},t)\dfrac{d}{dt}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\left\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\right\rangle}, \qquad \frac{1}{\tau_{fEP}^{2}} \triangleq \frac{\left\langle \dfrac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{x},t)\dfrac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\left\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\right\rangle}. \tag{8}$$

类似的，在 Fourier 空间，欧拉 Taylor 时间微尺度τ_{fEF}和拉格朗日 Taylor 时间微尺度τ_{fLF}的定义分别为

$$\frac{1}{\tau_{fLF}^{2}} \triangleq -\frac{\mathcal{F}\left\langle f(\mathbf{x},t)\dfrac{d^{2}}{dt^{2}}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\mathcal{F}\left\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\right\rangle} \equiv \frac{\mathcal{F}\left\langle \dfrac{d}{dt}f(\mathbf{x},t)\dfrac{d}{dt}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\mathcal{F}\left\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\right\rangle}, \tag{9}$$

和

$$\frac{1}{\tau_{fEF}^{2}} \triangleq -\frac{\mathcal{F}\left\langle f(\mathbf{x},t)\dfrac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\mathcal{F}\left\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\right\rangle} \equiv \frac{\mathcal{F}\left\langle \dfrac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{x},t)\dfrac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{x},t)\right\rangle}{\mathcal{F}\left\langle f(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)\right\rangle}, \tag{10}$$

其中$\mathcal{F}$表示 Fourier 变换。

2 拉格朗日时间尺度的计算

对于速度梯度张量$A_{ij} \triangleq \partial u_i / \partial x_j$，它在物理空间的拉格朗日时间尺度$\tau_{ALP}$的定义为

$$\frac{1}{\tau_{ALP}^{2}} \triangleq -\left\langle A_{ij}(t)\frac{d^{2}}{dt^{2}}A_{ij}(t)\right\rangle \Big/ \left\langle A_{ij}(t)A_{ij}(t)\right\rangle, \tag{11}$$

A_{ij}在 Fourier 空间的拉格朗日时间尺度τ_{ALF}的定义为

$$\frac{1}{\tau_{ALF}^{2}} \triangleq -\mathcal{F}\left\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)\frac{d^{2}}{dt^{2}}A_{ij}(\mathbf{x}',t)\right\rangle \Big/ \mathcal{F}\left\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)A_{ij}(\mathbf{x}',t)\right\rangle, \tag{12}$$

根据τ_{ALP}和τ_{ALF}的定义可以得到，τ_{ALP}和τ_{ALF}的关系为

$$\frac{1}{\tau_{ALP}^{2}} = \left\{\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\tau_{ALF}^{2}}\mathcal{F}\left\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)A_{ij}(\mathbf{x}',t)\right\rangle\right]\right\}_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \Big/ \left\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)A_{ij}(\mathbf{x},t)\right\rangle. \tag{13}$$

我们先计算出两点两时刻的时空关联在 Fourier 空间的时间尺度τ_{ALF}，然后利用方程(13)得到τ_{ALP}。

方程(12)的分母为

$$\mathcal{F}\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)A_{ij}(\mathbf{x}',t)\rangle = k^2\mathcal{F}\langle u_i(\mathbf{x},t)u_i(\mathbf{x}',t)\rangle \equiv \frac{E(k)}{2\pi}, \tag{14}$$

其中 $E(k)=C_K\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$ 是能量谱，C_K 是 Kolmogorov 常数。

方程(12)的分子为 $\mathcal{F}\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)\frac{d^2}{dt^2}A_{ij}(\mathbf{x}',t)\rangle$，为了计算这一项，我们需要先将 N-S 方程代入其中，然后再作 Fourier 变换，并且需要采用以下假设：

(1). 忽略 N-S 方程中的粘性项【2】;

(2). 对于四阶矩 $\langle X_1X_2X_3X_4\rangle$ 采用准正态假设【1】，即：

$$\langle X_1X_2X_3X_4\rangle = \langle X_1X_2\rangle\langle X_3X_4\rangle + \langle X_1X_3\rangle\langle X_2X_4\rangle + \langle X_1X_4\rangle\langle X_2X_3\rangle$$ 。

采用以上的步骤和假设之后可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)\frac{d^2}{dt^2}A_{ij}(\mathbf{x}',t)\rangle &= k^2\langle u_i(-\mathbf{k},t)\frac{d^2}{dt^2}u_i(\mathbf{k},t)\rangle \\ &\quad + \frac{E(k)}{2\pi}k^2\int_0^{+\infty}E(p)g(\frac{p}{k})dp,\end{aligned} \tag{15}$$

其中，等号右端的第一项在 Kaneda 等人计算速度的拉格朗日 Taylor 时间微尺度时已经被计算过了【2】，其结果是

$$\langle u_i(-\mathbf{k},t)\frac{d^2}{dt^2}u_i(\mathbf{k},t)\rangle = -\left(1.81\varepsilon^{2/3}k^{4/3}\right)\frac{E(k)}{2\pi k^2}, \tag{16}$$

等号右端的第二项中

$$\begin{aligned} g(\frac{p}{k}) &\triangleq \frac{1}{k^2}\int_{|k-p|}^{k+p}\left[z(1-y^2)(1-x^2)+\frac{1}{2}xy(x^2+y^2+xyz-1)\right]\frac{q^3}{k^2}dq \\ &\quad -\frac{2}{15}(\frac{p}{k})^2,\end{aligned} \tag{17}$$

这里的 x、y、z 分别表示向量 **k** 和 **p** 夹角的余弦、**k** 和 **q** 夹角的余弦、**p** 和 **q** 夹角的余弦。

经过计算可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}E(p)g(\frac{p}{k})dp &= C_K\varepsilon^{2/3}k^{-2/3}\int_0^{+\infty}(\frac{p}{k})^{-5/3}g(\frac{p}{k})d(\frac{p}{k}) \\ &\approx 0.22C_K\varepsilon^{2/3}k^{-2/3}.\end{aligned} \tag{18}$$

将方程(18)和方程(16)代入方程(15)可得

$$\mathcal{F}\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)\frac{d^2}{dt^2}A_{ij}(\mathbf{x}',t)\rangle = -\frac{E(k)}{2\pi}\left(1.81-0.22C_K\right)\varepsilon^{2/3}k^{4/3}. \tag{19}$$

再把方程(19)和方程(14)代入方程(12)就可以得到速度梯度张量在 Fourier 空间的拉格朗日时间尺度 τ_{ALF}：

$$\frac{1}{\tau_{ALF}^2} = \left(1.81-0.22C_K\right)\varepsilon^{2/3}k^{4/3}. \tag{20}$$

最后把方程(20)代入方程(13)就可以得到速度梯度张量在物理空间的拉格朗日时间尺度τ_{ALP}：

$$\frac{1}{\tau_{ALP}^2}=\frac{\int_0^{+\infty}\left(1.81-0.22C_K\right)\cdot\varepsilon^{2/3}k^{4/3}\frac{E(k)}{2\pi}4\pi k^2dk}{\int_0^{+\infty}\frac{E(k)}{2\pi}4\pi k^2dk}\sim\frac{\varepsilon}{\nu}. \tag{21}$$

这一结果既证实了 Meneveau 等人 2006 年的猜测“速度梯度张量的拉格朗日时间尺度是 Kolmogorov 时间尺度”【5】，同时也可以作为封闭模型“最近流体变形近似（RFDA）”的输入参数【5】。

3　欧拉时间尺度的计算

速度梯度张量A_{ij}在物理空间的欧拉时间尺度τ_{AEF}的定义为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_{AEF}^2}&\triangleq\mathcal{F}\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_{ij}(\mathbf{x}',t)\rangle\Big/\mathcal{F}\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)A_{ij}(\mathbf{x}',t)\rangle\\&\equiv\mathcal{F}\langle u_i(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i(\mathbf{x}',t)\rangle\Big/\mathcal{F}\langle u_i(\mathbf{x},t)u_i(\mathbf{x}',t)\rangle.\end{aligned} \tag{22}$$

注意到速度的欧拉时间尺度τ_{VEF}为

$$\frac{1}{\tau_{VEF}^2}=\mathcal{F}\langle u_i(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i(\mathbf{x}',t)\rangle\Big/\mathcal{F}\langle u_i(\mathbf{x},t)u_i(\mathbf{x}',t)\rangle\approx k^2V^2, \tag{23}$$

其中$V\triangleq\sqrt{\langle u_1^2\rangle}\equiv\sqrt{\langle u_2^2\rangle}\equiv\sqrt{\langle u_3^2\rangle}$是脉动速度的均方根，也被称为“扫掠（sweeping）速度”。

比较方程(22)和方程(23)可以得到

$$\frac{1}{\tau_{AEF}^2}\equiv\frac{1}{\tau_{VEF}^2}\approx k^2V^2. \tag{24}$$

速度梯度张量A_{ij}在物理空间的欧拉时间尺度τ_{AEP}的定义为

$$\frac{1}{\tau_{AEP}^2}\triangleq\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_{ij}(\mathbf{x},t)\rangle\Big/\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)A_{ij}(\mathbf{x},t)\rangle. \tag{25}$$

物理空间的时间尺度τ_{AEP}和 Fourier 空间的时间尺度τ_{AEF}的关系为

$$\frac{1}{\tau_{AEP}^2}=\frac{\left\{\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\tau_{AEF}^2}\mathcal{F}\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)A_{ij}(\mathbf{x}',t)\rangle\right]\right\}_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}}{\left\{\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\langle A_{ij}(\mathbf{x},t)A_{ij}(\mathbf{x}',t)\rangle\right]\right\}_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}}. \tag{26}$$

将方程(24)代入方程(26)可以得到物理空间的时间尺度：

$$\frac{1}{\tau_{AEP}^2}\sim V^2\left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/2}. \tag{27}$$

4 结 论

本文采用准正态分布理论解析计算出了不可压缩均匀各向同性湍流中速度梯度张量的欧拉和拉格郎日 Taylor 时间微尺度。从计算结果中可以得到如下结论：（1）对于欧拉时间关联来说，速度和速度梯度具有相同的去关联机制，它们的特征时间尺度由“随机扫掠（random sweeping）效应”确定；（2）对于拉格郎日时间关联来说，速度和速度梯度也具有相同的去关联机制，它们的特征时间尺度由“拉伸（straining）效应”确定。

我们计算得到的速度梯度的拉格郎日时间尺度证实了 Meneveau 等人的猜测：速度梯度张量的拉格朗日时间尺度是 Kolmogorov 时间尺度。同时，速度梯度的拉格郎日时间尺度也可以作为 Meneveau 等人提出的封闭模型——“最近流体变形近似（RFDA）”——的输入参数。

参考文献

1 S. A. Orszag, J. Fluid Mech. 41, 363 (1970).

2 Y. Kaneda, Phys. Fluids A 5, 2835 (1993).

3 H. Tennekes, J. Fluid Mech. 67, 561 (1975).

4 H. Yu, and C. Meneveau, Phys. Rev. Lett. 104, 084502 (2010).

5 L. Chevillard, and C. Meneveau, Phys. Rev. Lett. 97, 174501 (2006).

6 J.-P. Bertoglio, F. Bataille, and J.-D. Marion, Phys. Fluids 13, 290 (2001).

Eulerian and Lagrangian Time Microscale of Velocity and Velocity Gradient in Isotropic Turbulence

Yu-Feng Dong[1]，Guodong Jin[1), 2)]，Guo-Wei He[1), 3)]

(*LNM*，*Institute of Mechanics*，*Chinese Academy of Sciences*，*Beijing* 100190，*China*)

Abstract：The Eulerian and Lagrangian time microscale of velocity gradient tensor in isotropic turbulence is calculated analytically. From the results obtained, we find that: (1) For Eulerian time correlations, velocity gradient tensor shares the same decorrelation mechanism with velocity: the random sweeping effect is dominant in the decorrelation processes; (2) For Lagrangian time correlations, velocity gradient tensor also shares the same decorrelation mechanism with velocity: the straining effect is dominant in the decorrelation processes. The analytical results confirm Meneveau *et al*.'s assumption that the Lagrangian time scale of velocity gradient tensor is the same as Kolmogorov time scale. Furthermore, the Lagrangian time scale of velocity gradient tensor can also be used as an input parameter for the closure model of velocity gradient tensor proposed by Meneveau *et al*.

Key words：velocity gradient，time scale，isotropic turbulence

1） The work was supported by the NSFC under Grant Nos. 11072247 and 11232011 and NSAF under Grant No. U1230126.

2） E-mail: gdjin@lnm.imech.ac.cn
3） E-mail: hgw@lnm.imech.ac.cn