

# 二维超疏水圆柱在水杯中的浮力

隋相坤, 王士召, 何国威<sup>1)</sup>

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

## 摘要:

本文通过分析表面为超疏水性质的二维圆柱在水杯中漂浮时受到的浮力, 考察当漂浮物体附近有垂直壁面存在时, 对其浮力产生的影响。我们假设水杯的侧壁表面亲水并且垂直于水平方向, 使用 Young 方程分别确定液体与圆柱表面及杯壁表面之间的接触角, 通过数值求解 Young-Laplace 方程, 得到水表面的形状, 从而给出二维圆柱受到的浮力。

我们使用圆柱半径作为特征长度定义本文中的 Bond 数。通过计算发现, 在 Bond 数大于 10 时, 圆柱受到的最大浮力随着壁面与圆柱之间距离的减小而减小; 而在 Bond 数小于 1 时, 圆柱受到的最大浮力在随着该距离改变时存在极小值, 这个极小值所对应的圆柱与水杯壁的最短距离总是约等于毛细长度。

**关键词:** 超疏水; 表面张力

## 引言

阿基米德定律是物理学中计算物体浮力的基本原理, 其本质是认为物体的浮力是作用在物体表面的水压力的垂向合力。严格说来, 这个定律只适用于完全浸没在水中的物体。部分浸没在水中的物体受到的浮力更加复杂, 不仅要计算水对物体表面的压力, 还要考虑物体表面的润湿现象对浮力的影响。

润湿是液体分子与固体分子之间相互接触的宏观效果, 是自然界中的常见现象, 例如植物叶子表面的凝露、水在水杯边缘的弯曲表面。历史上最受重视的润湿现象是毛细现象。早在 18 世纪, 对毛细管内液面上升高度的研究就已经是世界上最热门的课题之一。Segner(1751)通过对气/液表面性质的研究, 提出了表面张力的原始概念; Young(1805)认为液/固界面和气/固表面内也存在界面/表面张力, 并给出了它们在接触线上的矢量关系式, 即 Young 方程。Young 方程反映了润湿在宏观上是气/固表面、气/水表面和水/固界面内的张力之间相互平衡所产生的结果。

由于在微观上, 一般认为气/固表面、气/水表面和水/固界面仅包含一个到数个分子层, 其厚度与质量相对于宏观物体的尺寸可以忽略不计, 因此, 我们可以将部分浸没在水中的物体及包围该物体的气/固表面和水/固界面看作一个物质系统, 并认为该系统受到的浮力就是物体所受的浮力。对于这个系统来说, 在水/固界面外侧受到了水压力, 其合力的垂直分量就是水压力对于浮力的贡献, 可以通过阿基米德原理计算。另外, 系统在物体表面的接触线上还受到了来自气/水表面的表面张力的作用, 该力的垂直分量就是润湿对于浮力的贡献。

对人类来说, 宏观物体指肉眼可见的物体, 它们的特征尺寸一般远大于毛细长度。在这种情况下, 表面张力的大小相对于水压力可以忽略不计。因此, 直接应用阿基米德定律计算浮力是合适的。但对于特征尺寸很小的物体, 表面张力相对于水压力的比重较大, 在计算浮力时不能忽略。最近十几年, 随着人们对昆虫在水表面站立的研究, 这种小于毛细长度的物体的浮力问题被越来越多的考虑。典型的工作就是 Gao 和 Jiang(2004)关于水黾腿部的研究。他们发现, 水黾的腿部表面具有有层次的结构, 这种纳米级尺度的特殊结构使其表面在宏观上具有超疏水的性质, 大大增加了水黾的腿部的浮力, 确保水黾可以在水面自由行走甚至跳跃。此后, 很多研究工作都采用超疏水圆柱作为水黾的腿的简化模型来研究水黾在水中的站立和行走问题。

我们在盛水容器中经常可以观察到水面在容器内壁的边缘附近产生的显著弯曲。这个弯曲效果是由容器壁面的润湿效果带来的, 显著改变了水表面的形状。如果水面上存在漂浮的物体, 那么容器壁面引起的水面变形还会改变物体浸入水中的深度与物体表面的接触线的位置。因此, 水杯壁对物体浮力的影响是存在的。但过去在计算部分浸入水中的物体的浮力时, 通常假设水面没有限制, 在无限远处为水平的自由表

面。这样的假设忽略了水杯壁对物体浮力的影响。本文的研究对象是在水杯中漂浮的长圆柱体，为方便讨论水杯壁对圆柱浮力的影响，我们将其简化为漂浮在二维水杯中的超疏水圆柱，并假设水杯的壁面亲水，且垂直于水平面。我们研究了当水杯壁与圆柱中心之间的距离发生改变时，圆柱受到的浮力的变化规律。在此问题中，圆柱的浮力由两个因素决定：首先是水压力对物体浮力的贡献；其次是物体表面的润湿现象对浮力的影响。而水杯壁上的润湿现象对圆柱浮力的影响，隐含在以上两个因素中。

## 1 二维超疏水圆柱在水杯中漂浮的物理模型

### 1.1 Young-Laplace 方程及其无量纲化

我们首先求解圆柱周围的水面形状。在数学上，气/水表面的形状用 Young-Laplace 方程描述。该方程的基本形式为：

$$-\gamma(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \Delta p \quad (1)$$

其中， $\gamma$  为气/水表面的表面张力系数； $\mathbf{n}$  为气/水表面的法矢量，其方向指向气体内部； $\Delta p$  为气/水面两侧的压强差。该方程的描述了气/水表面两侧的正向压力的平衡，具体来说，就是气/水表面上的表面张力的法向分量与该表面两侧的压强差相平衡。

为了方便求解水杯中漂浮的二维圆柱周围的水面形状，我们参考了 Liu, Feng 和 Wang(2007)在研究疏水圆柱的浮力问题时的做法，将重力方向设为  $z$  轴正向，将水平面上指向圆柱外侧的方向设为  $x$  轴正向。在这里，我们将  $x$  轴的位置固定在自由面的高度，即令在  $z=0$  的高度上，水中的压强等于大气压强。如图 1 所示，圆柱部分浸没在水中时，根据其其与壁面的距离，可以分为(a)和(b)两种情况，我们使用虚线代表气/水表面，右侧竖直的实线代表水杯的壁面。A 点代表位于圆柱表面的接触线位置，该点与圆柱轴心的连线与重力方向的夹角为  $\theta$ ，水在圆柱表面的接触角大小为  $\theta_{Y1}$ ；B 点代表位于水杯壁面的接触线位置，水在水杯壁面的接触角大小为  $\theta_{Y2}$ 。圆柱的半径为  $R$ ，其轴心与水杯壁面的水平距离为  $L$ 。图(a)是水杯壁远离圆柱的情况，此时在水杯壁面附近会有部分水面由于润湿的作用而被拉到自由面之上，形成一个内部压强小于大气压强的弯曲表面；图(b)是水杯壁与圆柱距离很近的情况，此时整个水面都处在自由面之下，液体内部的压强始终大于大气压强。

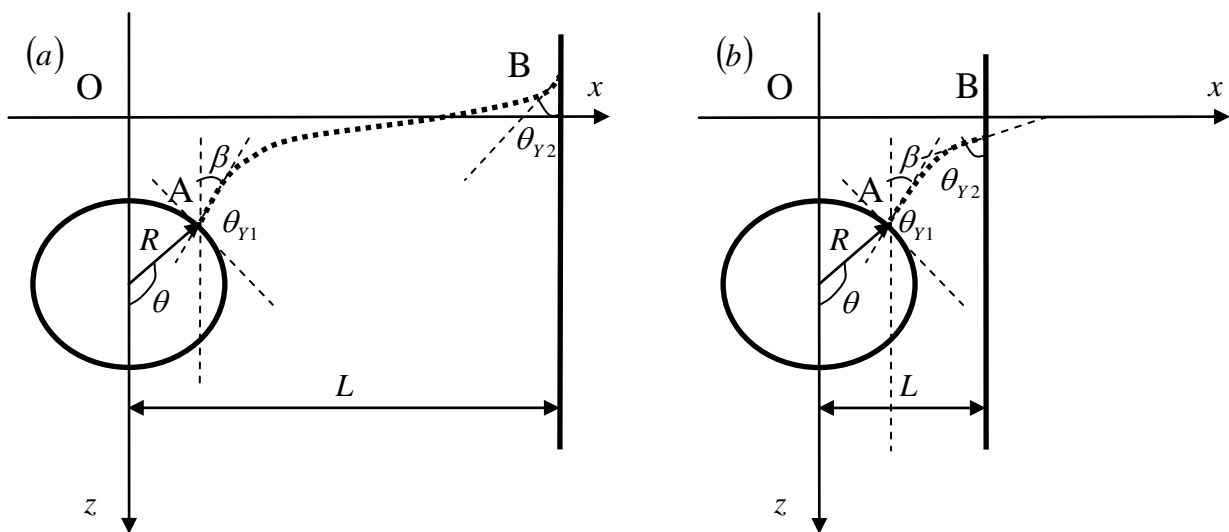


图 1 圆柱漂浮在水面的坐标系示意图。图(a)代表水杯壁远离圆柱的情况，此时在水杯壁面附近会有部分水面由于润湿的作用而被拉到自由面之上，形成一个内部压强小于大气压强的弯曲表面；图(b)代表水杯壁与圆柱距离很近的情况，此时整个水面都处在自由面之下，液体内部的压强始终大于大气压强。

根据上述设定，可以列出此坐标系下的 Young-Laplace 方程的具体形式：

$$\frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}} = \lambda^{-2}z \quad (2)$$

其中， $\lambda$  为毛细长度，其定义式为  $\lambda = \sqrt{\gamma/\rho g}$ ，式中的  $\gamma$  为气/水表面的表面张力系数， $\rho$  为水的密度， $g$  为重力加速度。

为了方便求解，我们将对方程做无量纲化，选取圆柱的半径  $R$  作为特征长度对方程进行无量纲化，则得到如下的方程：

$$\frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}} = (\mathit{Bond})z \quad (3)$$

式(3)中的无量纲参数  $\mathit{Bond} = \lambda^{-2}R^2$ ，表征重力与表面张力之比。当  $\mathit{Bond} \gg 1$  时，圆柱半径远大于毛细长度，同时重力远大于表面张力，此时表面张力的效果可以忽略；当  $\mathit{Bond} \ll 1$  时，圆柱半径远小于毛细长度，同时重力远小于表面张力，此时表面张力起主要作用。这样，我们就将 Young-Laplace 方程化为了含有一个无量纲参数的二阶常微分方程的形式。通过讨论不同的  $\mathit{Bond}$  数，我们就可以知道圆柱的尺寸对其浮力的影响。

为了求解式(3)，我们还需要讨论该式的边界条件。在点 A 处，我们已知该点在  $x$  轴上的坐标  $x_A$  和该点处的斜率  $k_A$ ，即

$$\begin{cases} x_A = R \sin \theta \\ k_A = -\tan \beta \end{cases} \quad (4)$$

这里，隐含了角度关系  $\beta = 1.5\pi - \theta - \theta_{Y1}$ 。而在点 B 处，我们可以指定该点在  $x$  轴上的坐标  $L$ 。由于点 B 在水杯壁面上，则可以根据该点的接触角直接得到该点处的斜率  $k_B$ 。

$$\begin{cases} x_B = L \\ k_B = -\tan \theta_{Y2} \end{cases} \quad (5)$$

通过以上两个边界条件(4)(5)，式(3)成为定解问题，但不能得到解析解。因此我们通过数值方法进行求解。

## 1.2 圆柱浮力的计算

我们在引言中曾经提到，水杯中的圆柱浮力由两个因素决定：首先是水压力对物体浮力的贡献；其次是物体表面的润湿现象对浮力的影响。第一个因素对应的浮力可以直接由阿基米德定律计算得到，即圆柱浸没在水下的体积与接触线投影到自由面上的柱体体积所排开的水的重力。第二个因素对应的浮力为表面张力在垂直方向上的分量。如果该分量方向向上，润湿效果起到的是浮力作用；如果该分量的方向向下，润湿效果反而会抵消部分浮力。

值得提到的是，十五年前，Keller(1998)使用散度理论，在数学上严格证明了在水面无限制的条件下，表面张力的垂直分量与液体在接触线外排开/抬升的水的重力相等。Keller(1998)的证明使我们可以从分析物体排开水的体积的角度计算物体受到的浮力以及表面张力的大小。我们将 Keller(1998)的结论在水杯壁限制的条件进行了推广，得到的结论是，圆柱与水杯壁面分别施加给水表面的表面张力的垂直分量之和等于

该水表面排开/抬升的水的重力。而从圆柱受力的角度来说，第二个因素贡献的浮力又可以直接由作用在圆柱表面的表面张力的垂直分量给出。这两种方法是从不同的角度出发，但得出的计算结果是相同的。根据表面张力的定义，圆柱受到的表面张力等于表面张力系数与接触线的长度之积。由于此问题已经简化为二维问题，因此我们认为接触线的长度为单位长度 1，圆柱受到的表面张力就只与表面张力系数有关。水杯壁的润湿对圆柱浮力的影响隐含在圆柱受到的表面张力的方向的变化上。

根据以上分析，我们可以使用式(4)计算圆柱的浮力：

$$F = \rho g (\theta R^2 - R^2 \sin \theta \cos \theta + 2z_A R \sin \theta) + 2\gamma \cos \beta \quad (6)$$

其中， $z_A$  为通过数值计算得到的点 A 的  $z$  轴坐标。在数值计算中，我们对公式(6)做无量纲化，得到了无量纲的圆柱浮力的表达式：

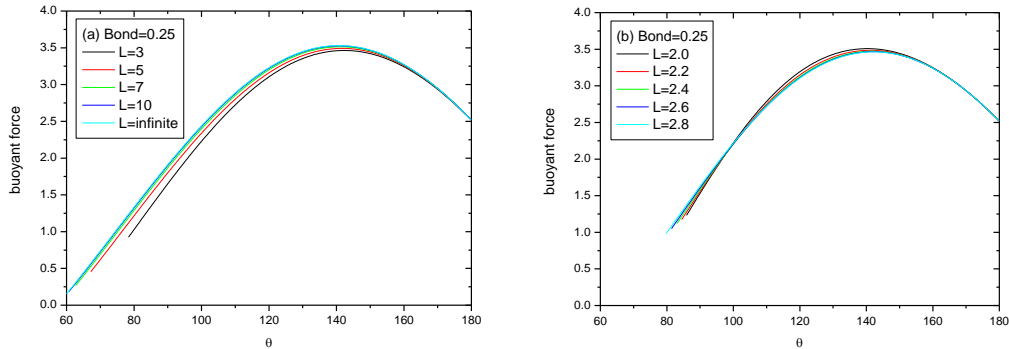
$$\tilde{F} = \frac{F}{\gamma \cdot 1} = Bond (\theta - \sin \theta \cos \theta + 2z_A^* \sin \theta) + 2 \cos \beta \quad (7)$$

这里， $z_A^* = z_A/R$  为点 A 的无量纲的  $z$  轴坐标，而  $\beta = 1.5\pi - \theta - \theta_{Y1}$ 。在式(6)与式(7)中，第一部分为水压力贡献的浮力，对应影响浮力的第一个因素，可以看到，该部分的大小取决于浸没深度和  $Bond$  数，也就是取决于圆柱尺寸的大小；第二部分为表面张力贡献的浮力，对应影响浮力的第二个因素，该部分的大小与  $Bond$  数无关，而只与表面张力的作用角度有关。

## 2 数值计算的结果与分析

### 2.1 圆柱与壁面的距离对浮力的影响

我们将圆柱表面的接触角取为  $\theta_{Y1} = 2\pi/3$ ，将水杯壁面的接触角取为  $\theta_{Y2} = \pi/3$ ，计算了在圆柱与壁面的不同距离下的圆柱浮力是如何随着浸没角度  $\theta$  变化的。如图 2 所示，我们给出了  $Bond$  数为 0.25 与  $Bond$  数为 10 的两种情况，分别作为表面张力对浮力影响较大和较小的两种情况加以讨论。



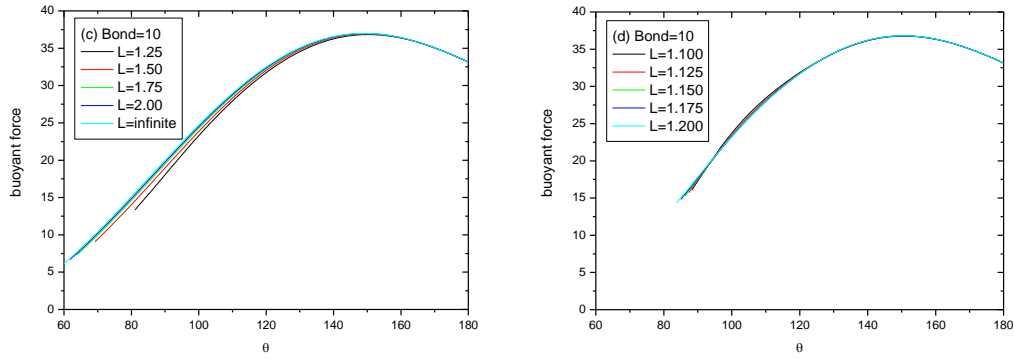


图2 圆柱与壁面间不同距离时的浮力。(a)当  $Bond = 0.25$  时, 圆柱距离壁面较远, 以图 1 (a) 的方式漂浮; (b) 当  $Bond = 0.25$  时, 圆柱距离壁面较近, 以图 1 (b) 的方式漂浮; (c) 当  $Bond = 10$  时, 圆柱距离壁面较远, 以图 1 (a) 的方式漂浮; (d) 当  $Bond = 10$  时, 圆柱距离壁面较近, 以图 1 (b) 的方式漂浮。

从图 2 的(a)和(c)中, 我们可以看出, 在这两种情况下, 圆柱距离壁面较远, 在水杯中的漂浮方式正如图 1 中的方式(a), 在这种漂浮方式下, 圆柱浸没水中越浅, 所受浮力与无限制水面的结果差距越大; 反过来, 当圆柱浸没水中越深, 直到达到最大浮力, 其结果与无限制水面的结果差距反而逐渐减小。另一方面, 圆柱与壁面之间的距离越近, 在同一浸没角度下所受的浮力越小。

在图 2 的(b)和(d)的两种情况下, 圆柱距离壁面较近, 在水杯中的漂浮方式正如图 1 中的方式(b), 由于在这种漂浮方式下, 圆柱距离壁面的距离取值范围相对较小, 因此, 圆柱在这种情况下的浮力大小差距不大, 但是浮力曲线的变化比较复杂。

## 2.2 Bond 数与圆柱最大浮力的关系

圆柱的最大浮力就是水杯所能承载的圆柱的最大重力, 考察这个值在不同大小的水杯下的变化规律对于设计水面上的漂浮装置是有意义的。如图 3 所示, 我们分别计算了在  $Bond = 0.25$  和  $Bond = 10$  的条件下, 当圆柱距离水杯壁面的距离变化时, 水杯能提供给圆柱的最大浮力是如何变化的。

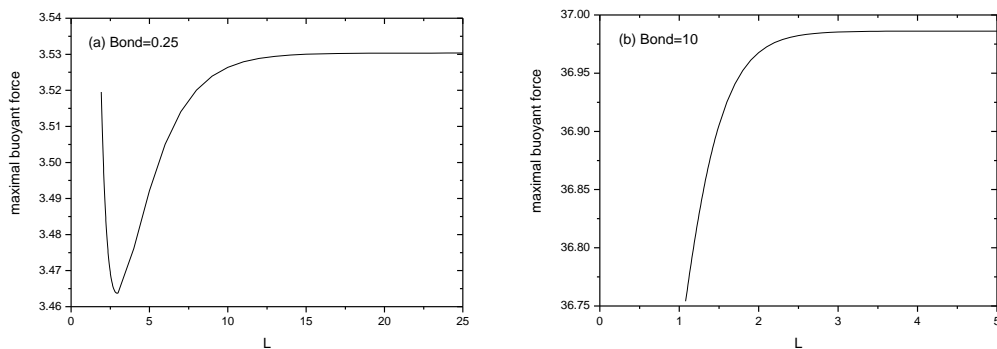


图3  $Bond$  数与圆柱最大浮力的关系。(a)当  $Bond = 0.25$  时, 圆柱的最大浮力随着距离  $L$  的变化规律; (b) 当  $Bond = 10$  时, 圆柱的最大浮力随着距离  $L$  的变化规律。

从图 3 中可以看出, 当  $Bond = 0.25$  时, 圆柱的最大浮力随着距离  $L$  的增加, 首先减小, 到达一个最小值点之后, 再逐渐增加, 趋近于无限制水面的圆柱浮力。从结果来看, 该最小值点出现在  $L = 2.94$  的位置, 其无量纲的最大浮力约为 3.4638, 与无限制水面的最大浮力 3.5303 仅相差 1.88%, 差距很小。这个最小值点对应着  $L = 2.94R \approx 1.47\lambda$ , 在  $Bond = 0.25$  时, 此时圆柱表面距离水杯壁的最近位置为  $L - R = 1.94R \approx 0.97\lambda$ 。经过我们的验证, 当  $Bond < 1$  时, 这个值都出现在毛细长度附近。但在  $Bond > 1$  时, 这个最小值点不存在, 如图 3 中的(b), 当  $Bond = 10$  时, 圆柱的最大浮力随着距离  $L$  的增加而增加,

圆柱最大浮力随着壁面距离的增加而增大，直到接近无壁面限制的情况。

### 3 结论

经过以上计算，我们可以得到如下的结论：

1、圆柱在水杯中漂浮，根据圆柱与水杯壁面的距离不同，存在如图 1 所示的两种漂浮方式。第 1 种方式(如图 1(a)所示)对应着圆柱距离水杯壁面较远的情况，此时会在壁面附近形成抬升到自由面之上的弯曲表面，弯曲表面中的水压小于大气压强；第 2 种方式(如图 1(b)所示)对应着圆柱距离水杯壁面较近的情况，此时在壁面附近不存在弯曲表面，水面的整体都在自由面之下，水面下的压强始终大于大气压强。

2、当圆柱在按照第 1 种方式漂浮时，随着圆柱与水杯壁之间距离的减小，圆柱的浮力会逐渐减小；但圆柱在按照第 2 种方式漂浮时，随着圆柱与水杯壁之间距离的减小，圆柱的浮力曲线交错。

3、当  $Bond \leq 1$  时，圆柱的最大浮力在随着  $L$  (圆柱与水杯壁的距离) 的变化时，存在最小值点。该点对应的圆柱与水杯壁之间的最近距离约为毛细长度。但在  $Bond > 1$  时，圆柱的最大浮力不存在最小值点，而是随着  $L$  的增加而增大，直到达到无壁面限制的情况。

### 参考文献

- 1 Segner JA. De figures superficierum fluidarum. Commentarii Societ. Regiae Scientiarum Gottingensis, 1751, 1: 301-372.
- 2 Young T. An essay on the cohesion of fluids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1805, 95: 65-87.
- 3 Gao X, Jiang L. Biophysics: water-repellent legs of water striders. Nature, 2004, 432(7013): 36-36.
- 4 Liu JL, Feng XQ, Wang GF. Buoyant force and sinking conditions of a hydrophobic thin rod floating on water. Physical Review E, 2007, 76(6): 066103.
- 5 Keller JB. Surface tension force on a partly submerged body. Physics of Fluids, 1998, 10: 3009.

# BUOYANT FORCE OF A SUPER-HYDROPHOBIC TWO-DIMENSIONAL CYLINDER IN A CUP

Sui Xiang-Kun, Wang Shi-Zhao, He Guo-Wei<sup>1)</sup>

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

**Abstract:** The buoyant force of a super-hydrophobic two-dimensional cylinder which partly immersed in a cup has been numerically studied. The wall of the cup is hydrophilic and perpendicular to the free surface. The contact angle of the wall surface and the cylinder are defined by Young's equation respectively and the shape of the water surface is calculated by solving the Young-Laplace equation. The buoyant force of the cylinder is then obtained. The Bond number is defined as the ratio of the characteristic length to the radius of the cylinder. We find that when the Bond number is larger than 10, the maximum of the buoyant force of the cylinder is larger with the larger distance between the cylinder and the wall of the cup while the when the Bond number is less than 1 there exist a minimum on the curve. The minimal distance between the cylinder and the wall corresponding to the minimal maximum buoyant force is approach to a capillary length.

**Key words:** super-hydrophobic; surface tension

---

1) E-mail: hgw@lnm.imech.ac.cn