

文章编号: 1000-7598 (2014) 02-0584-07

# 一种基于单元局部坐标系求解二维 孔隙渗流问题的数值方法

冯 春, 李世海, 王理想

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

**摘 要:** 将数值计算区域用三角形单元进行离散, 并为每个单元构建局部坐标系。局部坐标系的  $X$  轴为三角形单元某一条边的方向, 局部坐标系的原点为该边的其中一个端点。在局部坐标系下, 基于“格林公式”及达西定律推导了单元压力梯度及单元流速的解析表达式, 给出了流经单元各棱及各节点的流量计算方法。形成了类似固体弹簧系统的渗流管道网络, 建立了管道压差与流量的函数关系。将各单元局部坐标系下求得的流速及流量转换至整体坐标系, 并在节点上进行凝聚。通过引入流体体积模量实现了节点渗透压力的显式求解, 通过引入节点饱和度实现了非饱和问题的求解。基于局部坐标系的方法具有物理意义明确、求解过程简单等特点。通过在局部坐标系下构建管道压差与管道流量的对应关系, 将有限元的渗透刚度矩阵简化为两个管道的渗透刚度值, 从而节省了内存, 提高了计算效率。4 个数值算例的计算结果与理论解基本一致, 表明了该方法在求解稳态、非稳态、饱和、非饱和渗流问题时的精度。

**关 键 词:** 孔隙渗流; 数值方法; 局部坐标系; 体积模量; 饱和度

中图分类号: O 241

文献标识码: A

## A numerical method to solve pore seepage problems based on element local coordinate system

FENG Chun, LI Shi-hai, WANG Li-xiang

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** Numerical domain is discretized by triangle elements; and local coordinate system is set up for each one.  $X$ -axis of local coordinate system is along one edge of the element; and the origin point is at the endpoint of the edge. In local coordinate system, based on Green formula and Darcy law, analytical expression of pressure gradient and flow velocity of element, discharges of each edge and each node are given. The seepage “pipeline” network similar to solid spring system is formed; and the relationship between pressure difference and discharge of pipeline is built. Flow velocity and discharge of each element in element local coordinate system should be transformed to global coordinate system, and should be accumulated in each node. By introducing fluid bulk modulus and node saturation, pore pressure of each node could be calculated explicitly and the unsaturated problems could be simulated well. The method based on local coordinate system is clear in physical meaning and simple in solution process. According to constructing the relationship between pressure difference and discharge of pipeline in local coordinate system, the seepage stiffness matrix of FEM is simplified to two seepage stiffness values; so the memory is saved and the efficiency is improved. The results of 4 numerical cases almost coincide with analytical solutions so as to demonstrate the solution precision when simulating steady-state, non-steady-state, saturated, unsaturated seepage problems.

**Key words:** pore seepage; numerical method; local coordinate system; bulk modulus; saturation

## 1 引 言

岩土介质中的渗流对各类岩土工程均具有重要意义<sup>[1]</sup>, 降雨型滑坡的防治措施<sup>[2-4]</sup>、高水位下的坝

体稳定性分析<sup>[5-6]</sup>、基坑降水位置的合理布设<sup>[7]</sup>、真空预压加固软土地基的效果评价<sup>[8]</sup>等实际工程均与岩土体内的渗流密不可分。

数值分析是进行岩土介质渗流规律研究的有效

收稿日期: 2012-11-25

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (973) 项目资助 (No. 2010CB731506); 国家科技支撑计划资助 (No. 2012BAK10B00); 国家自然科学基金青年基金项目资助 (No. 11002146)。

第一作者简介: 冯春, 男, 1982 年生, 助理研究员, 博士研究生, 主要从事岩土力学领域数值计算方法的研究工作。E-mail: fengchun@imech.ac.cn

手段，有限差分法、有限元法、有限体积法是几类典型的数值分析方法<sup>[9-10]</sup>。有限差分法基于规则网格，通过在离散点上用差商去近似代替微分方程中的导数，实现渗流问题的差分求解；有限元法基于泛函的极值条件构建渗流刚度阵，从而建立节点压力与流量的函数关系<sup>[11-12]</sup>；有限体积法基于高斯散度定理，将场量梯度的求解转化为单元外表面场量的积分求解<sup>[13-15]</sup>。

就计算网格而言，有限差分必须基于规则网格，有限元及有限体积可以基于非规则网格；就求解策略而言，有限差分及有限体积法大都采用显式求解，有限元大都采用隐式求解；就单元精度而言，有限差分及有限元均可构建高阶精度，有限体积一般为一阶精度；就流体特性而言，有限差分及有限元求解时大都忽略流体的可压缩性，有限体积一般采用微可压方法进行渗流问题的求解；就孔隙水压力梯度的求解方法而言，有限差分法基于正交网格直接给出压力梯度，有限元方法通过对形函数的求导获得压力梯度，有限体积法通过高斯散度定理将压力梯度的求解转化为压力值在面积上的面积分。总体而言，有限元法能够较为精确地处理瞬态、非饱和渗流问题，但在进行大规模计算时往往需要占用大量内存，且非线性迭代过程收敛较慢；有限差分法虽能快速求解各节点的流量及压力，但无法计算含有复杂几何边界的渗流问题；有限体积法解决了非规则网格下的渗流计算，但每一时步每个单元（或节点）的压力、流量求解耗时较大。

因此，本文提出了一种基于单元局部坐标系进行渗流问题求解的渗流弹簧元法。该方法采用显式求解及微可压技术，通过在局部坐标系下构建正交的渗流管道网络，给出管道流量与管道两端压差的函数关系；通过管道节点上的流量变化，计算当前时刻节点的饱和度及孔隙水压力。与传统的渗流分析方法相比，渗流弹簧元法将二维孔隙渗流问题的求解等效为一维管道流的计算，从而简化了计算步骤，节省了计算内存，提升了计算速度。

## 2 渗流弹簧元方法的基本原理

### 2.1 主要思路及基本流程

弹簧元方法（Spring element method, SEM）用于固体力学的求解具有物理意义明确，计算步骤简洁及内存占用量小等优势<sup>[16-17]</sup>。本文所示方法受固体弹簧元在局部坐标系下进行单元内力求解的启发，故取名为渗流弹簧元方法（Seepage spring element method, SSEM）。

SSEM 方法将求解域用三角形单元离散，每个单元建立各自的局部坐标系，在局部坐标系下构建一维管道系统（类似于固体中的弹簧系统），建立管道流量与管道两端压力差之间的关系，并将管道流量分配至管道对应的节点，在整体坐标系下将各单元相同节点的速度、流量进行凝聚。

基于上述节点流量计算当前时步节点的流体体积增量，基于体积增量计算节点的饱和度增量，并累加形成当前时步的节点饱和度。如果节点饱和度为 1，则根据当前流体体积增量计算节点孔隙水压力增量，并累加获得当前时步的节点孔隙水压力。

SSEM 方法的求解流程如图 1 所示。

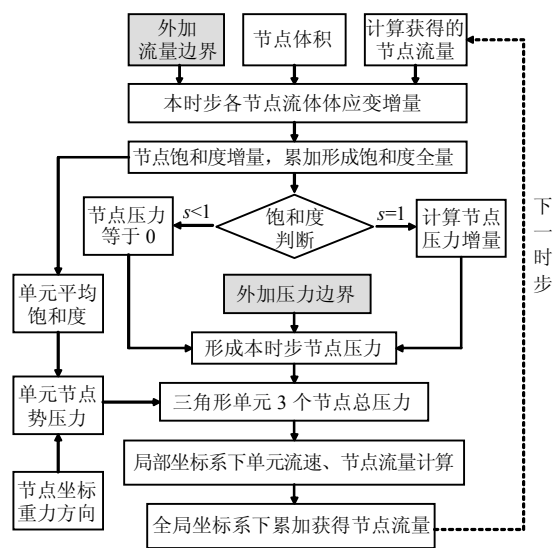


图 1 SSEM 方法的求解流程  
Fig.1 Solution procedure of SSEM

### 2.2 基于局部坐标系的单元流量求解

建立如图 2 所示的三角形单元局部坐标系模型，3 个节点的坐标分别为(0,0)、(a,0)及(b,c)，3 条棱的编号为 n1, n2, n3，由此可得三角形单元的底边长 a，高 c。设 3 个节点对应的总压力分别为  $p_1$ ,  $p_2$  及  $p_3$ 。根据格林公式，该单元的 x 方向压力梯度可表述为

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{1}{S} \iint \frac{\partial p}{\partial x} dx dy = \frac{1}{S} \oint p dy = \frac{1}{S} \sum_{n=1}^3 \bar{p}_n \Delta y_n \quad (1)$$

式中：S 为三角形单元的面积，计算公式为

$$S = ac / 2 \quad (2)$$

$\bar{p}_n$  为第 n 条棱上的压力平均值，计算公式为

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 &= (p_1 + p_2) / 2 \\ \bar{p}_2 &= (p_2 + p_3) / 2 \\ \bar{p}_3 &= (p_3 + p_1) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$\Delta y_n$  为第  $n$  条棱上两节点  $y$  坐标的差为

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= 0 \\ \Delta y_2 &= c \\ \Delta y_3 &= -c \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将 (2) ~ (4) 式代入式 (1) 可得

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{a} \quad (5)$$

由式 (5) 可得  $x$  方向的压力梯度仅与底边 (棱  $n_1$ ) 上的 2 个节点有关, 由此简化了计算。

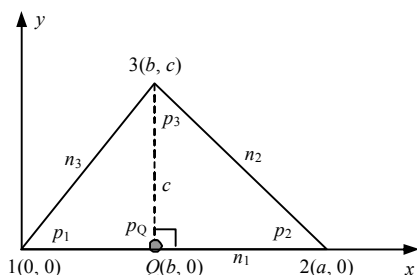


图 2 局部坐标系下的三角形单元  
Fig.2 Triangle element in local coordinate system

同理  $y$  方向的压力梯度可表示为

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{1}{S} \iint \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = -\frac{1}{S} \oint p dx = -\frac{1}{S} \sum_{n=1}^3 \bar{p}_n \Delta x_n \quad (6)$$

3 条棱上  $x$  坐标的差为

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= a \\ \Delta x_2 &= b - a \\ \Delta x_3 &= -b \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将式 (2)、(3)、(7) 代入式 (6) 可得

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_3 - \left[ \left(1 - \frac{b}{a}\right) p_1 + \frac{b}{a} p_2 \right]}{c} \quad (8)$$

令式 (8) 中  $\left[ \left(1 - \frac{b}{a}\right) p_1 + \frac{b}{a} p_2 \right] = p_Q$ ,  $p_Q$  即为

图 2 中  $Q$  点 (垂足点) 插值获得的压力, 则式 (8) 可改写为

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_3 - p_Q}{c} \quad (9)$$

基于以上推导, 将三角形单元中面域内压力梯度的求解转为对应棱上压力梯度的求解, 从而简化了计算。根据达西定律及式 (5)、(9), 局部坐标系下三角形单元两个方向的流速可表示为

$$\left. \begin{aligned} v_x &= k_s k \frac{p_2 - p_1}{a} \\ v_y &= k_s k \frac{p_3 - p_Q}{c} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

该流速即为三角形单元各节点的流速。

式中:  $k$  为孔隙渗流中以压力表示的达西定律对应的渗透系数, 单位  $m^2 / (Pa \cdot s)$ ;  $k_s$  为相对渗透系数,  $k_s = \bar{s}^2 (3 - 2\bar{s})$ ,  $\bar{s}$  为单元平均饱和度,  $\bar{s} = (s_1 + s_2 + s_3) / 3$ 。

局部坐标系下流经各棱的流量为

$$\left. \begin{aligned} q_{n1} &= \bar{v} \cdot \bar{n}_{n1} a = -a v_y \\ q_{n2} &= \bar{v} \cdot \bar{n}_{n2} \sqrt{(a-b)^2 + c^2} = c v_x + (a-b) v_y \\ q_{n3} &= \bar{v} \cdot \bar{n}_{n3} \sqrt{b^2 + c^2} = b v_y - c v_x \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

各节点的流量为

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{q_{n1} + q_{n3}}{2} = \frac{(b-a)v_y - cv_x}{2} \\ q_2 &= \frac{q_{n1} + q_{n2}}{2} = \frac{cv_x - bv_y}{2} \\ q_3 &= \frac{q_{n2} + q_{n3}}{2} = \frac{av_y}{2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中:  $\bar{n}_{n1}$ 、 $\bar{n}_{n2}$  及  $\bar{n}_{n3}$  为 3 条棱的单位外法向量。

将式 (10) 代入式 (12), 可写出与固体弹簧元一致的表达式, 即管道 (固体弹簧元中的弹簧) 流量与压差之间的关系

$$\left. \begin{aligned} q_{12} &= -\frac{ck_s k}{2a} \Delta p_{12} \\ q_{3Q} &= -\frac{ak_s k}{2c} \Delta p_{3Q} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中:  $q_{12}$ 、 $q_{3Q}$  表示管道 1-2、3- $Q$  的流量;  $\Delta p_{12}$ 、 $\Delta p_{3Q}$  表示管道 1-2、3- $Q$  的压差;  $\frac{ck_s k}{2a}$ 、 $\frac{ak_s k}{2c}$  表示

管道 1-2、3- $Q$  的渗透刚度。实际计算时由于  $Q$  点是插值点, 需要将  $q_{3Q}$  按照权系数分配至节点 1、2。

由式 (13) 可以看出, 表征 1 个三角形单元压力和流量的关系仅需要两个渗透刚度, 与传统有限元方法中的渗透矩阵相比, 节省了内存, 简化了计算。

局部坐标系下渗流弹簧元的直观表达可如图 3 所示。由图可得,  $X$  方向的管道  $G_{12}$  由节点 1 流向节点 2,  $Y$  方向的管道  $G_{3Q}$  由节点 3 流入插值节点  $Q$ , 并将插值节点  $Q$  的流量按比例系数分配至节点 1 及节点 2。

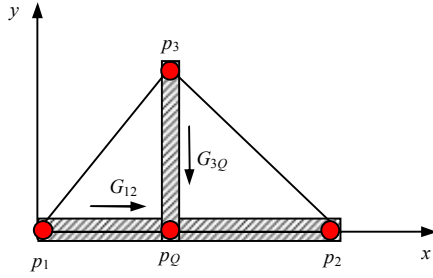


图 3 渗流弹簧元的管道网络  
Fig.3 Pipeline network of SSEM

当有多个单元时，需对公共节点处的流速、流量进行叠加。流速是矢量，需进行坐标转换后叠加（式（14））；流量为标量，可直接叠加（式（15））。

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} l_1^i & l_2^i \\ m_1^i & m_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x^i / N \\ v_y^i / N \end{Bmatrix} \quad (14)$$

式中： $V_x$ 、 $V_y$  为整体坐标系下某节点  $X$  方向及  $Y$  方向的速度； $v_x^i$ 、 $v_y^i$  为局部坐标系下某单元对应节点的  $x$  方向、 $y$  方向流速； $(l_1^i, m_1^i)$  表示局部坐标系下  $x$  轴在整体坐标系下的分量； $(l_2^i, m_2^i)$  表示局部坐标系下  $y$  轴在整体坐标系下的分量。

$$Q = \sum_{i=1}^N q^i \quad (15)$$

式中： $Q$ 、 $q^i$  分别为整体坐标系下某节点的流量及局部坐标系下某单元对应节点的流量； $N$  为与某节点相关的三角形单元个数。

### 2.3 节点总压力的显式求解

如果某节点为压力边界条件施加节点，则节点孔隙水压力即为外界给定的压力。如果该节点不是压力边界条件节点，基于式（15）计算获得的节点流量计算当前时步的节点饱和度即

$$s = - \sum_{t=0}^t \frac{(Q + Q_{app}) \Delta t}{nV} \quad (16)$$

式中： $s$  为饱和度； $n$  为孔隙率； $V$  为节点总体积； $Q_{app}$  为流量边界； $\Delta t$  为计算时步。

如果饱和度小于 1，则令该节点的孔隙水压力为 0，如果饱和度等于 1，则根据式（17）计算节点孔隙水压力  $p_p$  为

$$p_p = - \sum_{t=0}^t K_f \frac{(Q + Q_{app}) \Delta t}{nV} \quad (17)$$

式中： $K_f$  为流体体积模量。

基于三角形单元的平均饱和度  $\bar{s}$ ，三角形单元任意节点的总压力可表述为

$$p = p_p - \bar{s} \rho_f (xg_x + yg_y + zg_z) \quad (18)$$

式中： $x$ 、 $y$ 、 $z$  为单元某节点全局坐标的 3 个分量； $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$  为全局重力加速度的 3 个分量； $\rho_f$  为流体密度。

## 3 算例验证

### 3.1 圆环饱和和稳态渗流

建立内径为 4 m，外径为 10 m 的圆环，采用 2 388 个三角形单元进行离散（见图 4）。圆环内、外两侧均为压力边界条件，外侧压力为 10 kPa，内侧压力为 1 kPa，无重力。流体密度为 1.0 g/cm<sup>3</sup>，体积模量为 1 GPa，孔隙率为 0.3，初始饱和度为 1.0，工程渗透系数为 1×10<sup>-6</sup> m/s。数值计算稳定后孔隙水压力沿圆环径向的分布如图 5 所示。由图可知，渗流弹簧元的计算结果与商用软件 FLAC<sup>3D</sup> 的计算结果基本一致（FLAC<sup>3D</sup> 采用的数值模型由本算例模型沿纵深方向拉伸 0.1 m 获得），表明了渗流弹簧元在模拟稳态饱和和渗流问题方面的精度。

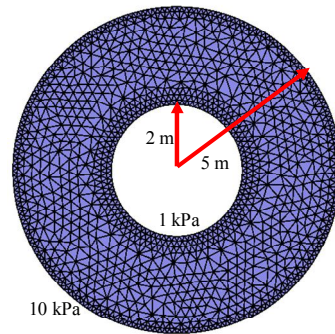


图 4 圆环渗流数值模型  
Fig.4 Numerical model of annular seepage

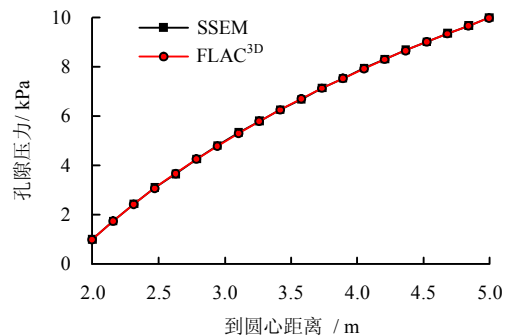


图 5 渗流压力沿圆环径向的分布  
Fig.5 Seepage pressure distribution along radial direction

### 3.2 一维饱和和非稳态渗流

建立如图 6 所示数值模型，模型长为 100 m，宽为 1 m，采用 798 个三角形单元进行离散。模型左、右侧均为压力边界条件，左侧压力  $p_1 = 20$  kPa，右侧压力  $p_2 = 0$  kPa，无重力。流体密度为 1.0 g/cm<sup>3</sup>，体

积模量为 1 GPa, 孔隙率为 0.1, 初始饱和度为 1.0, 工程渗透系数为  $1 \times 10^{-8}$  m/s。长度方向上某一位置、某一时刻的孔隙水压力存在级数解为

$$\bar{p}(\bar{z}, t) = 1 - \bar{z} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \bar{t}} \left[ \frac{\sin(n\pi \bar{z})}{n} \right] \quad (19)$$

式中:  $\bar{p} = p/p_1$ ;  $\bar{z} = z/L$ ;  $\bar{t} = ct/L^2$ ;  $c = Mk$ ;  $M$  为孔隙介质的比奥模量, 本算例中  $M = K_f/n$ 。

观测  $z = 20、80$  m 处孔隙水压力随着时间的变化, 渗流弹簧元与理论解(通过编程将式(19)的级数解取前 100 项获得)的对比如图 7 所示。由图可知, 20、80 m 处渗流弹簧元的计算值与理论值基本一致, 表明了渗流弹簧元在模拟饱和非稳态渗流方面的精度。

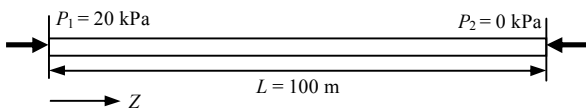


图 6 一维饱和非稳态渗流模型

Fig.6 One-dimensional saturated unsteady seepage model

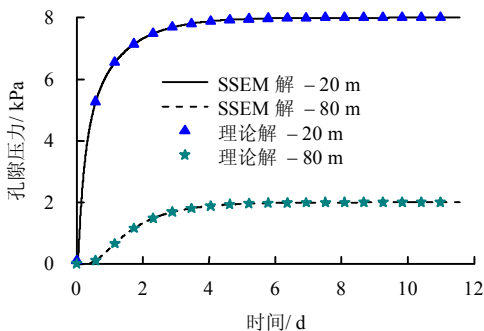


图 7 孔隙水压力随着时间的变化

Fig.7 Pore pressure vs. seepage time

### 3.3 一维非饱和非稳态渗流

采用 3.2 节中的计算模型, 在模型左侧施加 0.1 MPa 的孔隙水压力  $p_1$ , 右侧不施加任何边界条件。初始状态下饱和度为 0 (干燥孔隙介质), 观察单独在孔隙水压力作用、孔隙水压力及重力联合作用下前峰线(干湿分界线)位置随着时间的变化(重力方向与  $Z$  轴相反, 见图 6)。流体密度为  $1.0 \text{ g/cm}^3$ , 体积模量为 1 GPa, 孔隙率为 0.1, 工程渗透系数为  $1 \times 10^{-6}$  m/s。本算例存在理论解(Voller 等)<sup>[15, 18]</sup>, 无重力及有重力下前峰线位置与渗流时间的关系分别为

$$t = \frac{n}{2p_1 k} z^2 \quad (20)$$

$$t = - \left[ \frac{nz}{k\rho_f g} + \frac{np_1 \ln(1 - \rho_f g z / p_1)}{k(\rho_f g)^2} \right] \quad (21)$$

渗流弹簧元的解与理论解的对比曲线如图 8、9 所示。由图可得, 数值解与理论解基本一致, 表明了渗流弹簧元在求解非稳态前峰线方面的准确性。

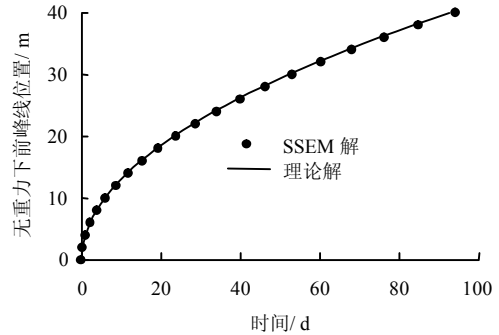


图 8 无重力情况下前峰线随着时间的变化

Fig.8 Sharp front position vs. seepage time without gravity

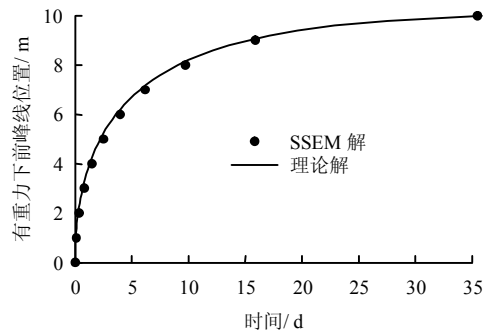


图 9 有重力情况下前峰线随着时间的变化

Fig.9 Sharp front position vs. seepage time with gravity

### 3.4 含自由面的稳态渗流

建立如图 10 所示的矩形坝, 坝体宽  $L = 9$  m, 高  $H = 12$  m, 采用 3 884 个三角形单元进行离散。流体密度为  $1.0 \text{ g/cm}^3$ , 体积模量为 1 GPa, 孔隙率为 0.3, 初始饱和度为 0, 工程渗透系数为  $1 \times 10^{-6}$  m/s, 重力加速度为  $10 \text{ m/s}^2$ 。坝体底部为无渗透边界, 坝体右侧水位  $h_1$  固定为 10 m, 改变坝体左侧的水位  $h_2$ , 改变值为 1、3、5、7、9 m, 观察坝体左侧单位厚度上总流量  $Q$  的变化, 该流量存在理论解(Harr)<sup>[15, 19]</sup>为

$$Q = k\rho_f g \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L} \quad (22)$$

渗流弹簧元计算的坝体左侧流量与理论解的对比如图 11 所示, 左侧水位高度为 3、5、7 m 时的流速合量云图如图 12 所示。由图 11 可知, 计算所得左侧溢出总流量与理论解基本一致, 表明了渗流弹簧元在求解稳态含自由表面问题时的精度。由图 12 可知, 随着左侧水位的抬升, 浸润线逐渐上移, 流速逐渐减小, 这与实际是相符的。

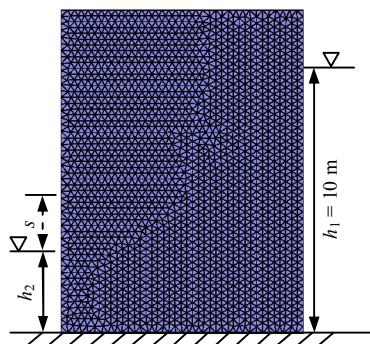


图 10 矩形坝自由面数值模型

Fig.10 Free surface numerical model of rectangular dam

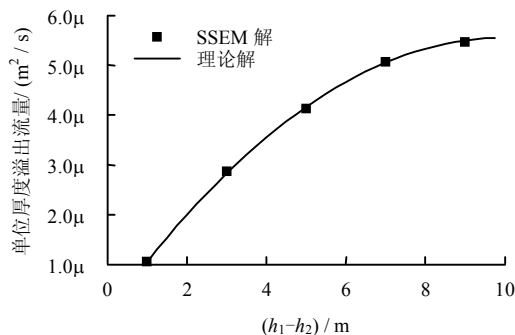


图 11 左侧坝体渗出流量随高差的变化

Fig.11 Discharge of left boundary vs. height difference

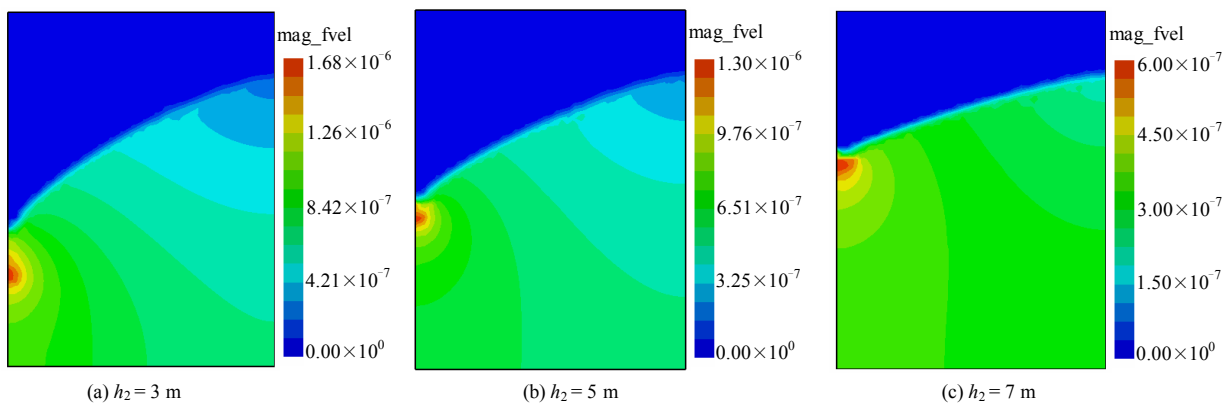


图 12 左侧水位高度为 3、5、7 m 时的流速合量云图

Fig.12 Contours of flow velocity magnitude with water level of 3, 5 and 7 m on left boundary

## 4 结 论

本文所述方法基于单元局部坐标系直接给出了节点流量的解析表达式，并通过正交的管道网络形象地解释了上述解析表达式的物理含义。该方法通过在局部坐标系下构建管道压差与管道流量的对应关系，将有限元的渗透刚度矩阵简化为两个管道的渗透刚度值，从而节省了内存，提高了计算效率。该方法具有物理意义明确、求解过程简单等特点。4 个数值算例的计算结果与理论解基本一致，表明了该方法在求解稳态、非稳态、饱和、非饱和渗流问题时的精度。

在计算非饱和渗流问题时，本文所述方法未考虑毛细现象产生的基质吸力对自由面的影响，这一点将在后续研究中予以考虑。此外，本文所述方法在三维渗流问题中的应用(三维 SSEM 单元的构建)也是后续研究的重点。

## 参 考 文 献

[1] 龚晓南. 21 世纪岩土工程发展展望[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(2): 238—242.

GONG Xiao-nan. Prospects for the development of geotechnical engineering in the 21st century[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2000, 22(2): 238—242.

[2] 张延军, 王恩志, 王思敬. 降雨渗流作用下滑坡变形数值分析[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2006, 25(6): 858—860.

ZHANG Yan-jun, WANG En-zhi, WANG Si-jing. Numerical analysis of deformation of slope under seepage action of rain[J]. **Journal of Liaoning Technical University**, 2006, 25(6): 858—860.

[3] 张桂荣, 程伟. 降雨及库水联合作用下秭归八字门滑坡稳定性预测[J]. 岩土力学, 2011, 32(增刊 1): 476—482.

ZHANG Gui-rong, CHENG Wei. Stability prediction for Bazimen landslide of Zigui County under the associative action of reservoir water lever fluctuations and rainfall infiltration[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(Supp.1): 476—482.

- [4] HUANG An-bin, LEE Jui-ting, HO Yen-te, et al. Stability monitoring of rainfall-induced deep landslides through pore pressure profile measurements[J]. **Soils and Foundations**, 2012, 52(4): 737—747.
- [5] 刘杰, 谢定松. 我国土石坝渗流控制理论发展现状[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(5): 714—718.  
LIU Jie, XIE Ding-song. Advances of earth-rock dam seepage control theory in China[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2011, 33(5): 714—718.
- [6] CHEN Yi-feng, HU Ran, LU Wen-bo, et al. Modeling coupled processes of non-steady seepage flow and nonlinear deformation for a concrete-faced rockfill dam[J]. **Computers & Structures**, 2011, 89(13-14): 1333—1351.
- [7] 王连俊, 朱孝笑, 张光宗. 济南西客站站房基坑降水对京沪高铁路基沉降影响分析[J]. 工程地质学报, 2012, 20(3): 459—465.  
WANG Lian-jun, ZHU Xiao-xiao, ZHANG Guang-zong. Analysis of subgrade settlement of Beijing-Shanghai high speed railway due to dewatering for foundation pit at Jinan railway station[J]. **Journal of Engineering Geology**, 2012, 20(3): 459—465.
- [8] 张仪萍, 严露, 俞亚南, 等. 真空预压加固软土地基变形与固结计算研究[J]. 岩土力学, 2011, 32(增刊 1): 149—154.  
ZHANG Yi-ping, YAN Lu, YU Ya-nan, et al. Solutions for settlement and consolidation of soft ground with vacuum preloading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(Supp.1): 149—154.
- [9] 李东艳, 闫滨, 马闯. 土石坝渗流数值分析方法综述[J]. 水利水电科技进展, 2008, 28(增刊 1): 168—171.  
LI Dong-yan, YAN Bin, MA Chuang. Summary on seepage numerical analysis method of earth dam[J]. **Advances in Science and Technology of Water Resources**, 2008, 28(Supp.1): 168—171.
- [10] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [11] BATHE K J, KHOSHGOFTAAR M R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1979, 3(1): 13—22.
- [12] ZHENG H, LIU D F, LEE C F, et al. A new formulation of Signorini's type for seepage problems with free surfaces[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2005, 64: 1—16.
- [13] 李毅, 伍嘉, 李坤. 基于FLAC<sup>3D</sup>的饱和-非饱和渗流分析[J]. 岩土力学, 2012, 33(2): 617—622.  
LI Yi, WU Jia, LI Kun. Saturated-unsaturated seepage analysis based on FLAC<sup>3D</sup>[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(2): 617—622.
- [14] JING L R, STEPHANSSON O. Fundamentals of discrete element methods for rock engineering theory and applications[M]. [S. l.]: Elsevier, 2007.
- [15] Itasca Consulting Group Inc. FLAC-3D (fast Lagrangian analysis of continua in 3 dimensions), Version 3.0, users manual[M]. USA: Itasca Consulting Group Inc, 2005.
- [16] LI Shi-hai, ZHANG Ya-nan, FENG Chun. A spring system equivalent to continuum model[C]//Proceedings of Discrete Element Methods, Simulation of Discontinues: Theory and Applications. London: Queen Mary, University of London, 2010: 75—85.
- [17] 张青波, 李世海, 冯春. 四节点矩形弹簧元及其特性研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(11): 3497—3502.  
ZHANG Qing-bo, LI Shi-hai, FENG Chun. Study of four-node rectangular spring element and its properties[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(11): 3497—3502.
- [18] VOLLER V R, PENG S, CHEN Y F. Numerical solution of transient, free surface problems in porous media[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1996, 39(17): 2889—2906.
- [19] HARR M E. Groundwater and seepage[M]. [S. l.]: Dover Press, 1991.