

# 简支圆板在磁场中的非线性随机振动\*

## NONLINEAR RANDOM VIBRATION OF A CURRENT CARRYING CIRCULAR PLATE IN A MAGNETIC FIELD

涂建新\*\*<sup>1</sup> 王知人\*\*\*<sup>1,3</sup> 李玉珍<sup>1</sup> 王平<sup>2,3</sup>

(1. 燕山大学理学院, 秦皇岛 066004)

(2. 燕山大学建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004)

(3. 中国科学院力学研究所 国家非线性力学重点实验室, 北京 100080)

TU JianXin<sup>1</sup> WANG ZhiRen<sup>1,3</sup> LI YuZhen<sup>1</sup> WANG Ping<sup>2,3</sup>

(1. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(2. College of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(3. State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**摘要** 分析周边简支圆板在磁场中的非线性随机振动问题。根据板壳磁弹性基本理论及连续体的随机振动理论, 得到在磁场环境中简支圆板的非线性随机振动方程; 利用 FPK 方程法解出了圆板随机振动位移和速度响应的多个数字特征, 并讨论参数变化对各数字特征的影响。

**关键词** 磁场 非线性 随机振动 圆板

**中图分类号** O324 O441.4

**Abstract** The problem of nonlinear random vibration of a current carrying circular plate in a magnetic field is studied. Based on the magneto-elasticity kinetic equation of thin plates and shells and the random vibration theory of continuum system, the nonlinear random vibration equation of current carrying circular plate in magnetic field is derived. The numerical characters of the random vibration of the circular plate are calculated by FPK method. The influences with the variation of parameters to the numeric characters are discussed.

**Key words** Magnetic field; Nonlinear; Random vibration; Circular plate

*Corresponding author: WANG ZhiRen, E-mail: Wangzhiren528@sina.com, Tel: +86-335-8057027*

The project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (A2012203140), and the Open Foundation of the State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences.

Manuscript received 20130502, in revised form 20130922.

### 引言

薄板作为结构元件在实际工程中有着广泛的应用。由于薄板具有较大的柔性, 在外界激励作用下容易发生振动, 而严格来说一切振动都是随机的, 许多动力学系统从本质上讲也都是非线性系统。所以研究薄板的非线性随机振动问题有着重要的理论意义及实际应用价值。一直以来, 国内外众多的力学学者都在致力于非线性振动问题的研究, 也取得了许多的成果。如: 文献[1]研究了四边简支 FGM 矩形板非线性振动中的内共振问题。文献[2]研究了功能梯度板的非线

性动力分析。文献[3]研究了功能梯度材料剪切板热屈曲后的非线性振动问题。文献[4]研究了随机力作用下功能梯度矩形板的非线性振动问题。对于磁场中的非线性问题也有一些结果, 如: 文献[5]研究了有限导电性板条在磁场中的非线性振动问题, 并给出了理想导体板在倾斜磁场中非线性振动的数学模型。文献[6]研究了磁场中铁磁梁式板的非线性力学行为。文献[7]研究了磁场环境中传导薄板的非线性磁弹性振动问题, 给出了磁场中薄板的磁弹性耦合振动方程。而关于非线性随机振动的研究结果并不多<sup>[8-12]</sup>, 尤其是磁场环境下的非线性随机振动研究尚少见到相关文

\* 20130502 收到初稿, 20130922 收到修改稿。河北省自然科学基金 (A2012203140) 和 2013 年非线性力学国家重点实验室开放基金资助。

\*\*涂建新, 男, 1977 年 1 月生, 山东人, 汉族, 燕山大学理学院信息与计算专业研究生, 研究方向为磁弹性理论及应用。

\*\*\*王知人, 女, 1964 年 5 月生, 湖北人, 汉族。教授, 博士, 研究方向为磁弹性理论及应用。

献。

本文针对周边简支圆板,根据薄板的磁弹性运动方程和连续体的随机振动理论,推出了在电磁场环境中圆板的非线性随机振动方程,对其振动形式进行了数值计算;并用 FPK 方程法<sup>[13]</sup>解出了圆板随机振动位移和速度响应的多个数字特征,研究了外磁场和圆板厚度的变化对各统计量的影响,得到了一些相关规律。

### 1 圆薄板在磁场中的非线性随机振动

如图 1 所示,在柱坐标系  $(r, \theta, z)$  下,一半径为  $R$ ,厚度为  $h$  的简支圆形薄板,处在横向磁场  $B = (0, 0, B_z)$  中, $J'$  为环向电流。根据板的弯曲振动理论和磁弹性运动方程理论<sup>[14]</sup>,可以给出电磁场中圆板的非线性横向振动方程

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\sigma h^3}{12} B_z^2 \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial t} - \frac{h}{r} \left( \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + D \nabla^4 w = P(t) \quad (1)$$

$$\nabla^4 \varphi = - \frac{E}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{E}{1-\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h B_z J') \quad (2)$$

式中, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  为板的弯曲刚度, $\rho$  为圆板的材料密度, $w$  为垂直圆板中面的  $z$  方向挠度响应, $E$  为弹性模量, $\sigma$  为材料的电导率, $\mu$  为材料的泊松比, $P(t)$  是外加横向随机载荷。 $\varphi$  为引进的应力函数,算子  $\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2$ 。

将式(1)、式(2)无量纲化,令  $J' = rJ$ ,定义相关变量为

$$x = \frac{r}{R}, \bar{w} = \frac{w}{h}, F = \frac{\varphi}{E} \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)、式(2)可得

$$\rho h^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} - \frac{\sigma h^4}{12R^2} B_z^2 \frac{\partial(\nabla^2 \bar{w})}{\partial t} - \frac{h^2 E}{R^4} \frac{1}{x} \left( \mu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) +$$

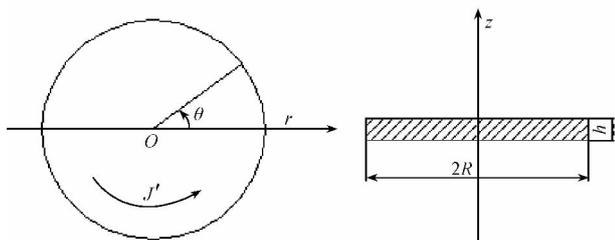


图 1 磁场中简支圆板

Fig. 1 A circular plate simply supported in magnetic field

$$\frac{h}{R^4} D \nabla^4 \bar{w} = P(t) \quad (4)$$

$$\nabla^4 F = - \frac{h^2}{2x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 - \frac{2R^4}{1-\mu} h B_z J \quad (5)$$

简支圆板的边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\mu}{x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0 & x = 1 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\mu}{x} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 & x = 1 \end{cases} \quad (6)$$

设简支圆板横向变形的位移函数为<sup>[15]</sup>

$$\bar{w} = A(t) [C_0 H_0 + C_1 H_2(x) + H_4(x)] \quad (7)$$

其中, $H_0 = 1, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ 。 $A(t)$  是圆形薄板的振幅,是时间的函数。位移函数满足圆板的边界条件。

将式(7)代入式(6)中的第一式可得

$$C_0 = \frac{44 + 12\mu}{1 + \mu}, C_1 = \frac{4\mu - 12}{1 + \mu}$$

将式(7)代入式(5)可得应力函数  $F$  通解,再将通解代入式(6)中第二式,可得  $F$  的特解

$$F = a_3 x^8 + a_2 x^6 + a_1 x^4 \quad (8)$$

其中, $a_1 = - (c_1^2 - 24c_1 + 144) h^2 A(t)^2 - \frac{2R^4 h}{64(1-\mu)} B_z J$

$$a_2 = - \frac{32(-12 + c_1)}{9} h^2 A(t)^2$$

$$a_3 = - \frac{16}{3} h^2 A(t)^2$$

将式(7)代入式(4),利用伽辽金原理积分可得系统的动态方程为

$$\beta_0' \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} + \beta_1' \frac{\partial A(t)}{\partial t} + \beta_2' A(t) + \beta_3' A(t)^3 = \beta_4' P(t) \quad (9)$$

其中,

$$\beta_0' = \frac{\rho h^2}{30} [15(c_0 - 2c_1 + 12)^2 + 60(c_0 - 2c_1 + 12)(c_1 - 12) + 80(c_1 - 12)^2 + 160(c_0 + c_1) - 3072]$$

$$\beta_1' = - \frac{\sigma h^4}{R^2} B_z^2 [(3c_1/8 - 8)(c_0 - 2c_1 + 12) + 4/3(c_1 - 12)^2 + 16c_0/3 + 64c_1/9 - 320/3]$$

$$\beta_2' = - \frac{2(3 + \mu) E h^3 B_z J}{31(1 - \mu^2)} [(c_1 - 12)(128\mu + 16 + 8\mu(c_0 - 2c_1 + 12) + 16\mu(c_1 - 12)) + 128(3\mu + 1)] + \frac{2E h^3 B_z J}{1 - \mu} [(c_1 - 12) \cdot$$

$$\begin{aligned} & ((c_1 - 3)\mu + 3\mu(c_0 - 2c_1 + 12)/16 + 1/6) + \\ & 2\mu(c_0 - 2c_1 + 12) + 12(8\mu + 1)/5] + \\ & \frac{h}{R^4} D(512c_0 - 10240/3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta'_3 = & -\frac{Eh^2}{R^4} [(54 + 18\mu)(c_1 - 12)^2 + \\ & (96\mu + 480)(c_1 - 12) + 192\mu + 1344] / \\ & (9(1 + \mu)) [(c_1 - 12)(128\mu + 16 + \\ & 8\mu(c_0 - 2c_1 + 12) + 16\mu(c_1 - 12)) + \\ & 32\mu(c_0 - 2c_1 + 12) + 128 + 256\mu] + \\ & \frac{Eh^2}{R^4} (c_1^2 - 24c_1 + 144) [(c_1 - 12) \cdot \\ & (488\mu + 32/3) + 131\mu(c_0 - 2c_1 + 12) + \\ & 768(1 + \mu)/5] + \frac{Eh^2}{R^4} (c_1 - 12) \cdot \\ & [152\mu(c_0 - 2c_1 + 12) + 18432(c_1 - 12) / \\ & 5 + 12288\mu + 7005] + \frac{Eh^2}{R^4} [1911\mu(c_0 - \\ & 2c_1 + 12) + 21845\mu + 910] \end{aligned}$$

$$\beta'_4 = 10/3 - c_0/2$$

$$\text{令: } \beta_1 = \frac{\beta'_1}{\beta'_0} \beta_2 = \frac{\beta'_2}{\beta'_0} \beta_3 = \frac{\beta'_3}{\beta'_0} \beta_4 = \frac{\beta'_4}{\beta'_0}$$

则式(9)可改写为

$$\frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial A(t)}{\partial t} + \beta_2 A(t) + \beta_3 A(t)^3 = \beta_4 P(t) \tag{10}$$

由式(10)可看出,周边简支圆薄板的大变形运动方程为非线性随机振动方程。

## 2 简支圆板振动响应的数字特征

以白噪声激励为例,在白噪声激励下的非线性随机振动方程(10)可以转化成如下伊藤型状态微分方程<sup>[16]</sup>

$$\dot{Y}(t) = f(Y) + \bar{G}P(t)$$

其中,

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) \\ \dot{A}(t) \end{bmatrix}$$

$$f(Y) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -(\beta_1 y_2 + \beta_2 y_1 + \beta_3 y_1^3) \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ P(t) \end{bmatrix}$$

则相应的稳态 FPK 方程为

$$-y_2 \frac{\partial p_s}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} [(\beta_1 y_2 + \beta_2 y_1 + \beta_3 y_1^3) p_s] +$$

$$\beta_4^2 \pi S_0 \frac{\partial^2 p_s}{\partial y_2^2} = 0 \tag{11}$$

$p_s$  为状态变量  $Y(t)$  的概率密度。

利用分离变量法,设  $p_{s1}(y_1, y_2) = p_{s1}(y_1) \cdot p_{s2}(y_2)$ , 可求得

$$\begin{aligned} p_{s1}(y_1) = & C \left( \frac{\beta_1}{2\beta_4^2 \pi^2 S_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ & \exp \left[ -\frac{\beta_1}{\beta_4^2 \pi S_0} \left( \frac{\beta_2}{2} y_1^2 + \frac{\beta_3}{4} y_1^4 \right) \right] \tag{12} \end{aligned}$$

$$p_{s2}(y_2) = \left( \frac{\beta_1}{2\beta_4^2 \pi^2 S_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\beta_1}{2\beta_4^2 \pi S_0} y_2^2 \right) \tag{13}$$

由式(3)、式(7)、式(13)可知,周边简支圆板的速度响应

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \dot{A}(t) [C_0 H_0 + C_1 H_2(x) + H_4(x)] h$$

是均值为零、方差为  $\sigma_{\frac{\partial w}{\partial t}}^2 = \frac{\beta_4^2 \pi S_0}{\beta_1} \{ [C_0 H_0 + C_1 H_2(x) + H_4(x)] h \}^2$  的平稳正态过程。

由式(3)、式(7)、式(12)可知,周边简支圆板的位移响应

$$w = A(t) [C_0 H_0 + C_1 H_2(x) + H_4(x)] h$$

不是正态的平稳过程。若忽略方程(10)中的非线性项,则其位移响应是平稳正态过程,且均值为零、方差为

$$\sigma_w^2 = \frac{\beta_4^2 \pi S_0}{\beta_1 \beta_2} \{ [C_0 H_0 + C_1 H_2(x) + H_4(x)] h \}^2$$

若不忽略方程(10)中的非线性项,式(12)可改写成如下形式

$$\begin{aligned} p_{s1}(y_1) = & C \left( \frac{\beta_1}{2\beta_4^2 \pi^2 S_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ & \exp \left[ -\frac{1}{\sigma_{y_0}^2} \left( \frac{y_1^2}{2} + \frac{\beta_3}{\beta_2} \frac{y_1^4}{4} \right) \right] \tag{14} \end{aligned}$$

式中,  $\sigma_{y_0}^2 = \frac{\beta_4^2 \pi S_0}{\beta_1 \beta_2}$ 。将式(14)中  $\exp \left( -\frac{\beta_3}{\beta_2} \frac{1}{\sigma_{y_0}^2} \frac{y_1^4}{4} \right)$  项展成  $\frac{\beta_3}{\beta_2} \frac{1}{\sigma_{y_0}^2} \frac{y_1^4}{4}$  的级数,略去二次及更高次项,利用概率密度的归一化条件,得  $A(t)$  的概率密度为

$$\begin{aligned} p_{s1}(y_1) = & \left[ \sqrt{2\pi} \cdot \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{\beta_3}{\beta_2} \sigma_{y_0}^2 \right) \sigma_{y_0} \right]^{-1} \cdot \\ & \left( 1 - \frac{1}{4\sigma_{y_0}^2} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_2} y_1^4 \right) \exp \left( -\frac{y_1^2}{2\sigma_{y_0}^2} \right) \tag{15} \end{aligned}$$

位移响应的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 = & \{ [C_0 H_0 + C_1 H_2(x) + H_4(x)] h \}^2 \cdot \\ & \sigma_{y_0}^2 \left( 1 - \frac{15}{4} \frac{\beta_3}{\beta_2} \sigma_{y_0}^2 \right) / \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{\beta_3}{\beta_2} \sigma_{y_0}^2 \right) \tag{16} \end{aligned}$$

### 3 数值模拟

本文以中碳钢圆板为例,圆板半径  $R = 0.25 \text{ m}$ ,厚度  $h = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$   $h = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,泊松比  $\mu = 0.25$ ,质量密度  $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,弹性模量  $E = 210 \text{ GPa}$ ,圆频率  $\bar{\omega} = 314.16 \text{ s}^{-1}$ 。电磁场的特征参数:电导率  $\sigma = 6.3 \times 10^6 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ,  $J = 100 (\text{A/m}^2)$ 。 $P(t)$  为服从正态分布的平稳白噪声激励,其功率谱密度为  $S_0$  ( $S_0$  为一常数,取  $10 \text{ dBm/Hz}$ )。

#### 3.1 位移响应和速度响应的概率密度

将以上各参数分别代入式(3)、式(7)、式(15)、式(13)取  $x = 0.5$ ,得  $w = 47.4hA(t)$ ,可以得到圆板半径中点的位移响应、速度响应在不同情况下的概率密度如图2、图3所示。

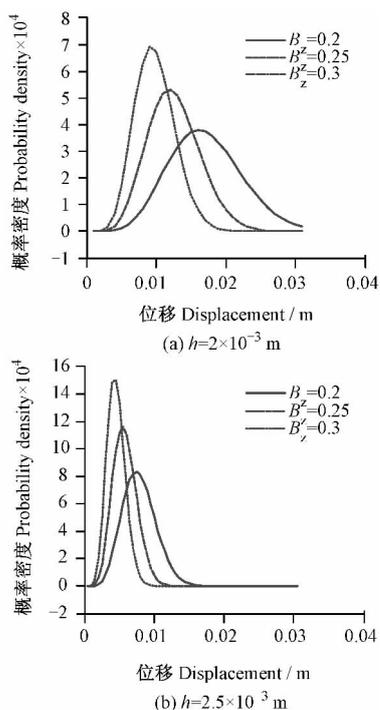


图2 位移响应在不同情况下的概率密度图  
Fig. 2 The probability density of displacement response in different magnetic field

由图2可看出位移响应的概率密度具有对称性;在同一板厚下,随着磁场的增大位移概率密度越来越集中,且在相同位移下的概率分布值也随之增大,这说明磁场对圆板随机振动的位移起到阻碍作用;板厚对圆板的随机振动位移影响较大,在磁场不变的情况下,随着板厚的增加,发生较大位移的概率减小。通过磁场和板厚的变化,可以较好地控制随机振动产生振动位移的概率。

由图3可知速度的概率密度服从正态分布,随着磁场的增大,图形的峰值越大,且概率密度越来越集中。这说明随着磁场的增大,速度的最大响应发生的

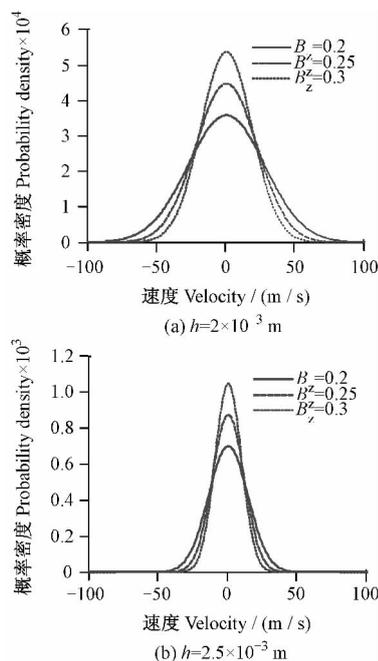


图3 速度响应在不同情况下的概率密度图  
Fig. 3 The probability density of velocity response in different magnetic field

概率越来越小;当磁场不变时,随着板厚的增加,速度的最大响应发生的概率也越来越小。

#### 3.2 位移响应和速度响应的方差

将以上各参数分别代入式(16)和  $\sigma_{\frac{\partial w}{\partial t}}^2$  的等式中,取  $x = 0.5$ ,可以得到圆板半径中点的位移响应、速度响应在不同情况下的方差,如图4、图5。

由图4中可看出:位移方差随激励强度的增大而迅速增加;位移方差在相同的激励强度下随磁场的增加而迅速减小,当磁场强度达到一定数值时,位移方差近似趋于零;位移方差随板厚的增大而迅速减小。

由图5中可看出:速度方差虽然也是随激励强度的增大而增大,但增大的速度没有位移方差增大的快;速度方差随磁场的增大而迅速减小,且当磁场强度达到一定数值时,速度方差也是以横轴为渐近线;速度方差随板厚的增加而减小。

### 4 结论

本文针对周边简支圆薄板,利用 FPK 方程法研究了电磁场环境中圆板的非线性随机振动问题,解出了圆板随机振动位移和速度响应的多个数字特征,研究了外磁场和圆板厚度的变化对各统计量的影响,主要结论如下:

- 1) 根据磁弹性基本理论和连续体的随机振动理论,导出了在电磁场环境中简支圆板的非线性随机振动方程;利用伽辽金法对板的非线性随机振动方程化简进行求解,得到振动的概率密度、方差的解析表达

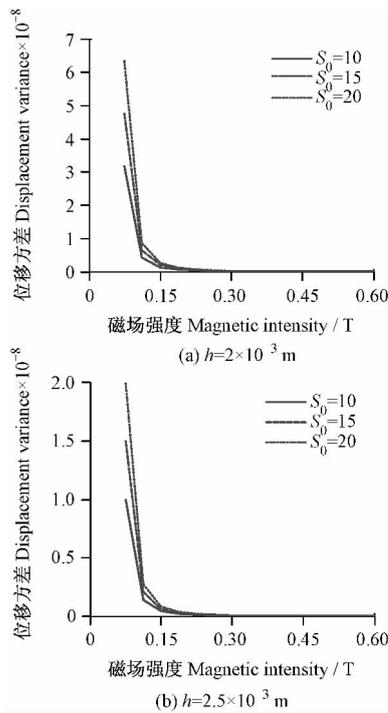


图 4 位移响应在不同情况下的方差图

Fig. 4 The variance diagram of displacement response in different magnetic field

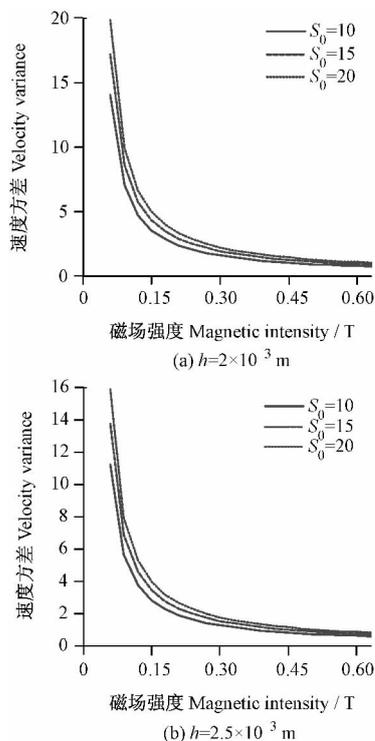


图 5 速度响应在不同情况下的方差

Fig. 5 The variance diagram of velocity response in different magnetic field

式;

2) 通过数值模拟,得到了圆板的随机振动位移和速度的概率密度、方差分布,并对振动位移和速度的概

率密度、方差随不同参数的变化进行了分析讨论,得到了相应规律。

#### 参考文献(References)

- [1] 郝育新,张 伟. 四边简支 FGM 矩形板非线性振动中的内共振[J]. 振动与冲击, 2009, 28(6): 153-155.  
HAO YuXin, ZHANG Wei. Nonlinear vibration of functionally graded material plate under different internal resonances [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(6): 153-155 (In Chinese).
- [2] 曹志远. 功能梯度板的非线性动力分析[J]. 固体力学学报, 2006, 27(1): 21-25.  
CAO ZhiYuan. Nonlinear dynamic analysis of functionally graded material plates [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2006, 27(1): 21-25 (In Chinese).
- [3] 夏贤坤,沈惠申. 功能梯度材料剪切板热屈曲后的非线性振动[J]. 振动工程学报, 2008, 21(2): 120-125.  
XIA XianKun, SHEN HuiShen. Nonlinear vibration of thermally postbuckled FGM plates [J]. Journal of Vibration Engineering, 2008, 21(2): 120-125 (In Chinese).
- [4] 赵凤群,王忠民. 随从力作用下功能梯度矩形板的非线性振动[J]. 振动与冲击, 2011, 30(3): 53-59.  
ZHAO FenQun, WANG ZhongMin. Nonlinear vibration of functionally graded thick rectangular plates subjected to follower forces [J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(3): 53-59 (In Chinese).
- [5] Hasanyan, D. J. Khachatryan, G. M. Piliposyan, G. T. Mathematical modeling and investigation of nonlinear vibration of perfectly conductive plates in an inclined magnetic field [J]. Thin-Walled Structures, 2001, 39(1): 111-123.
- [6] Youhe Zhou, Yuanwen Gao, Xiaojing Zheng. Buckling and post-buckling analysis for magneto-elastic-plastic ferromagnetic beam-plates with unmovable simple supports [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40: 2875-2887.
- [7] 胡宇达. 传导薄板的非线性磁弹性振动问题[J]. 工程力学, 2001, 18(4): 89-94.  
HU YuDa. Magneto-elastic nonlinear vibration of a thin conductive plate [J]. Engineering Mechanics, 2001, 18(4): 89-94 (In Chinese).
- [8] 朱位秋. 非线性随机振动理论的近期进展[J]. 力学进展, 1994, 24(2): 163-171.  
ZHU WeiQiu. Recent developments in theory of nonlinear random vibration [J]. Advances in Mechanics, 1994, 24(2): 163-171 (In Chinese).
- [9] 张义民,闻邦椿. 非线性随机振动机的动力学研究[J]. 工程力学, 1999, 16(3): 100-104.  
ZHANG YiMin, WEN BangChun. Dynamic behavior of nonlinear stochastic vibration machine [J]. Engineering Mechanics, 1999, 16(3): 100-104 (In Chinese).
- [10] Vedat Dogan, Rimas Vaicaitis. Nonlinear response of double-wall cylindrical shell vibrations under random excitation [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2006, 19(1): 46-54.
- [11] T. P. Chang, H. C. Chang, M. F. Liu. A Finite Element Analysis on Random Vibration of Nonlinear Shell Structures. Journal of Sound and Vibration, 2006, (291): 240-257.

- [12] 张雷, 吴勇军. 五自由度强非线性随机振动系统的首次穿越研究[J]. 振动与冲击, 2012, 31(12): 1-4.  
ZHANG Lei, WU YongJun. First-passage of a 5-DOF strongly nonlinear random vibration system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(12): 1-4( In Chinese ).
- [13] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 122-126.  
ZHU WeiQiu. Nonlinear stochastic dynamics and control [M]. Beijing: Sciences Press, 2003: 122-126 ( In Chinese ).
- [14] 白象忠, 田振国. 板壳磁弹性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 181-182.  
BAI XiangZhong, TIAN ZhengGuo. Fundamental magneto-elasticity theory of plate and shells [M]. Beijing: Sciences Press, 2006: 181-182( In Chinese ).
- [15] 叶彦良. 大变形平板系统之非线性运动与混沌行为分析[D]. 台湾: 台湾成功大学, 2001: 79-81  
Ye Yanliang. Nonlinear dynamic behaviors and chaos analysis of large deformation of plate system [D]. Taiwan: Taiwan Chengkung University, 2001: 79-81( In Chinese ).
- [16] 欧进萍, 王光远. 结构随机振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 167-168.  
OU JinPing, WANG GuangYuan. Structural random vibration [M]. Beijing: Press of Higher Education, 1998: 167-168 ( In Chinese ).