

文章编号: 1001-246X(2015)01-0001-12

# 一种基于 AUSM 思想的通量分裂方法

李馨东, 胡宗民, 张德良, 姜宗林

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京 100190)

**摘 要:** 根据对流迎风分裂(AUSM)思想提出一种通量分裂方法,称为K-CUSP格式.它与传统H-CUSP和E-CUSP格式的最大差异在于总能量的分裂:K-CUSP格式将无粘守恒通量中所有的运动学量分裂到对流项,所有热力学量分裂到压力项,即总能量被分裂成动能和静焓.对于压力项的数值通量,采用一种新的界面构造方法.数值测试表明:①K-CUSP格式继承了FVS格式的简单性和稳健性.在激波后不易出现压力过冲,在膨胀区域没有振荡,优于AUSM和WPS格式;②K-CUSP格式继承了FDS格式的分辨率.激波间断的分辨率和H-CUSP、E-CUSP格式基本相同,接触间断的分辨率高于FVS格式,低于Roe、AUSM和WPS格式.AUSM和WPS格式在计算运动接触间断时,速度存在很大振荡,而新格式不存在振荡.

**关键词:** 通量分裂;混合迎风格式;AUSM格式;CUSP格式

中图分类号: O35

文献标志码: A

## 0 引言

随着计算流体力学的广泛研究和应用,理想的数值方法应具有间断分辨率高、计算效率高、稳健性好、适合并行运算和易于推广到其它守恒律方程组的特点.自二十世纪八十年代起,迎风格式因其清晰的物理意义和高分辨能力,至今仍是空间离散的主要方法之一.第一类迎风格式是通量矢量分裂(FVS),如:Steger-Warming分裂<sup>[1]</sup>和Van Leer分裂<sup>[2]</sup>,这类格式简单易用、计算量小,激波前后不易发生非物理振荡,但是数值耗散大,间断分辨率和黏性分辨率低,对边界层内的压力和温度预测不准,求解剪切流动的精度较低.为了降低Van Leer分裂格式的数值耗散,Hanel、Schwane<sup>[3-4]</sup>和Coirier、Van Leer<sup>[5]</sup>先后进行了改进,使得剪切层的分辨率得到了提高.第二类迎风格式是通量差分分裂(FDS),如:Roe分裂<sup>[6]</sup>、Osher分裂<sup>[7]</sup>和HLLC分裂<sup>[8]</sup>,这类格式数值耗散小、间断分辨率和黏性分辨率很高,但是稳健性较差,高速流动下容易出现“Carbuncle”现象<sup>[9-11]</sup>,而且计算效率也较低.近年来出现了一种新的混合迎风格式,该格式综合了两类迎风格式各自的优点,继承了FVS格式的计算效率、稳健性和FDS格式的分辨率,在平衡/非平衡流、湍流、多相流和磁流体力学等领域得到了应用.

目前应用最广的一种混合迎风格式是Liou的AUSM(Advection upstream splitting method)类格式<sup>[11-16]</sup>,其基本思想是:对流和声波是两个不同的物理过程应该分别处理,即将无黏守恒通量分裂成对流项和压力项两个部分.AUSM类格式与FVS/FDS格式的数值通量相比,其数值耗散项的系数不是矩阵而是标量,既保留了FVS格式的简单性又提高了计算效率.虽然AUSM格式<sup>[11]</sup>和AUSM+格式<sup>[13-16]</sup>没有“Carbuncle”现象,但激波后存在过冲和壁面附近存在振荡的缺陷,而AUSMDV<sup>[12]</sup>格式没有压力过冲和振荡却存在“Carbuncle”现象.为了兼具二者的优点,Kim相继提出AUSMPW格式<sup>[17]</sup>和AUSMPW+格式<sup>[18-19]</sup>,其引入基于压力函数的权函数能较好地抑制过冲和振荡.与AUSM格式相似的混合迎风格式还有Jameson的CUSP(Convective upwind and split pressure)格式<sup>[20-21]</sup>和Edwards的LDFSS格式<sup>[22-23]</sup>,它们的主要差异在于界面马赫数的定义不同,相同点是对流项的总能量均为总焓,故统称为H-CUSP格式<sup>[21,30]</sup>.

另一种CUSP格式是E-CUSP格式<sup>[24-34]</sup>,它从特征分析出发,将雅可比矩阵的特征值 $u \pm a$ 分裂成对流速度 $u$ 和声速 $\pm a$ ,得到相应的对流项和压力项,此时对流项的总能量是总焓.Zha<sup>[24-31]</sup>的E-CUSP格式在界

收稿日期: 2014-01-06; 修回日期: 2014-04-04

作者简介: 李馨东(1988-),男,博士生,从事计算流体力学研究,E-mail:lixindong@imech.ac.cn

面构造时借鉴了 LDFSS 格式的方法. Halt 和 Agarwal<sup>[32-33]</sup> 通过分析对流项和压力项的特征值, 认为 WPS (Wave/particle splitting) 格式的通量分裂比 AUSM 格式更合理地表征了对流和声波的流动特征, 且该格式能从 Boltzmann 方程推导而来. Deshpande 等<sup>[34]</sup> 从分子动理论出发解释了 WPS 格式所代表的物理意义, 认为流体微团具有粒子行为和波动行为二象性, 对流项表示流体微团的对流输运, 而压力项表示流体微团因膨胀和压缩产生向外传播的压力波. 不过 E-CUSP 格式在高超声速流动领域的应用较少.

在此基础上, 我们认为将对流和声波两个物理过程分开处理的思想是有一定物理意义的, 但是这思想并没有给出唯一的处理原则. 通过分析和比较两类传统 CUSP 格式的异同, 本文提出一种具体的分裂原则, 得到了一种新的通量分裂方法. 第 1 部分提出新格式, 将它与 E-CUSP、H-CUSP 格式的异同进行说明, 并阐释了其物理意义. 在数值界面构造上采用不同的处理方式. 第 2 部分是数值测试, 对三种 CUSP 格式和 FVS/FDS 格式的计算结果进行详细地比较和分析. 第 3 部分是全文的结论.

## 1 一种新的 CUSP 格式

### 1.1 控制方程

为了引出新格式, 考虑量热完全气体的一维无黏 Euler 方程组

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{U} = (\rho \quad \rho u \quad \rho E)^T$ ,  $\mathbf{F} = (\rho u \quad \rho u^2 + p \quad \rho Hu)^T$ ,  $E = e + u^2/2 = H - p/\rho$ , 其中  $e$ ,  $E$ ,  $H$  分别是单位质量的内能、总能和总焓. 下面先给出两种传统 CUSP 格式的分裂形式

H-CUSP 格式

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho Hu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} = F_H^c + F_H^p, \quad (2)$$

E-CUSP 格式

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p) u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{pmatrix} = F_E^c + F_E^p. \quad (3)$$

H-CUSP 格式表示无黏通量  $F$  在物理上由对流项和压力项两个部分组成, 而 E-CUSP 格式将雅可比矩阵的特征值  $u \pm a$  分裂成  $u$  和  $\pm a$  后, 推导出相应的对流项和压力项(具体推导过程见文献[24]). (2) 式的  $F_H^c$ ,  $F_H^p$  和 (3) 式的  $F_E^c$ ,  $F_E^p$  分别表示 H-CUSP 分裂、E-CUSP 分裂下的对流项和压力项.

从对流迎风分裂思想<sup>[11]</sup> 的角度来看, 为了将  $F$  分裂成表征宏观运动的对流项和以声速传播扰动波的压力项, H-CUSP 格式仅把动量守恒量中的静压分裂到压力项, E-CUSP 格式则把能量守恒量中的静压也分裂到压力项, 对流项中的能量不再是总焓  $\rho H$  而是总能  $\rho E$ . 现在将总焓的表达式重新写为

$$\rho H = \rho E + p = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e + p = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + p. \quad (4)$$

上式的内能满足:  $e = c_v T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$ , 这里的  $p$  表示流体微团自身系统的热力学压力. (4) 式最右端的第二个  $p$  是静压, 对于可压缩流体来说它也是热力学压力, 因此一个自然的想法是将总焓中所有的热力学压力一起分裂到压力项中去, 于是有

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \frac{1}{2} \rho u^3 + \frac{p}{\gamma - 1} u + pu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \frac{1}{2} \rho u^2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} pu \end{pmatrix} = F_K^c + F_K^p. \quad (5)$$

由于 (5) 式中对流项的能量变为了动能  $\frac{1}{2} \rho u^2$ , 所以此通量分裂方法称为 K-CUSP 格式, 其中的  $F_K^c$ ,  $F_K^p$

表示 K-CUSP 分裂下的对流项和压力项.

### 1.2 K-CUSP 格式的物理意义

从等式(2)、(3)和(5)可以看出,三种 CUSP 格式的区别在于总能量的分裂不同,为了说明三者的物理意义有

$$\rho Hu = \rho Eu + pu = \frac{1}{2}\rho u^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1}pu, \quad (6)$$

整理为

$$H\dot{m} = E\dot{m} + \frac{p}{\rho}\dot{m} = \frac{u^2}{2}\dot{m} + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right)\dot{m}, \quad (7)$$

等式(7)中的  $\dot{m} = \rho u$  为质量流率,对于量热完全气体有  $\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = c_v T = h$ ,这里的  $H$ 、 $E$ 、 $p/\rho$ 、 $u^2/2$ 、 $h$  为单位的总焓、总能、静压能(即静压)、动能(即动压)和静焓.由上可知,三类 CUSP 格式不同的物理含义为: H-CUSP 格式保留了总焓, E-CUSP 格式将总焓分裂成了总能和静压能,而 K-CUSP 格式将总焓分裂成了动能和静焓.

### 1.3 K-CUSP 格式的数值通量构造

K-CUSP 格式的数值通量分裂为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_K^c + \mathbf{F}_K^p = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho u^2/2 \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ \rho hu \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_{1/2} = \mathbf{F}_{K,1/2}^c + \mathbf{F}_{K,1/2}^p = M_{1/2} \frac{1}{2}(\Phi_L + \Phi_R) - |M_{1/2}| \frac{1}{2}(\Phi_R - \Phi_L) + \begin{pmatrix} 0 \\ p_{1/2} \\ (\rho hu)_{1/2} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\Phi = \left(\rho a, \rho ua, \frac{1}{2}\rho u^2 a\right)^T, \quad (10)$$

$$M_{1/2} = M_L^+ + M_R^-, \quad p_{1/2} = p_L^+ + p_R^-, \quad (11)$$

$$(\rho hu)_{1/2} = (\rho ha)_L M_L^+ + (\rho ha)_R M_R^-. \quad (12)$$

界面的速度和压力采用文献[11]的构造方法,

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2, & |M| \leq 1; \\ \frac{1}{2}(M \pm |M|), & |M| > 1, \end{cases} \quad (13)$$

$$P_1: \quad p^\pm = \begin{cases} \frac{p}{2}(1 \pm M), & |M| \leq 1; \\ \frac{p}{2}(M \pm |M|)/M, & |M| > 1; \end{cases} \quad P_2: \quad p^\pm = \begin{cases} \frac{p}{2}(M \pm 1)^2(2 \mp M), & |M| \leq 1; \\ \frac{p}{2}(M \pm |M|)/M, & |M| > 1, \end{cases} \quad (14)$$

其中  $a$  为声速,  $M$  为马赫数,等式(14)分别指压力分裂关于  $(M \pm 1)$  的一阶和二阶多项式展开.在网格界面处理  $(\rho hu)_{1/2}$  时,本文发现采用类似 E-CUSP 格式对  $(\rho u)_{1/2}$  的处理方式并不适合,因此重新构造了等式(12)的分裂方法,取得了较好结果.

## 2 结果与分析

为了更好地体现和比较三种 CUSP 格式和 FDS/FVS 格式的基本特性,采用了一维、一阶的显式格式测试了多个激波管问题,其理由是:可以避免隐式格式产生的不确定因素;一维流动简化了多维复杂流动中出现的问题,能够更清楚地了解数值格式失败的原因.计算域为  $x \in [-0.5, 0.5]$ ,网格数为 100,  $W_L = [\rho_L, \mu_L, p_L]$ ,  $W_R = [\rho_R, \mu_R, p_R]$ ,量热完全气体的比热  $\gamma = 1.4$ .其中 FDS 类格式采用无熵修正的 Roe 格式, FVS 类格式采用 Steger-Warming 格式和 Van Leer 格式, H-CUSP 类格式采用 AUSM 格式, E-CUSP 类格式采用两种格

式,包括 Zha 的 E-CUSP 格式(简称 Zha 格式<sup>[26]</sup>)和 Halt-Agarwal 的 WPS 格式. 后文给出了 K-CUSP 格式的几个二维算例.

### 2.1 高超声速碰撞流动问题

初始条件  $W_L = [0.1, 15\sqrt{\gamma}, 0.1]^T$ ,  $W_R = [0.1, -15\sqrt{\gamma}, 0.1]^T$ ,  $CFL = 0.8$ , 计算时间  $T = 0.04$ ,  $M = 15.0$ . 结果见图 1.

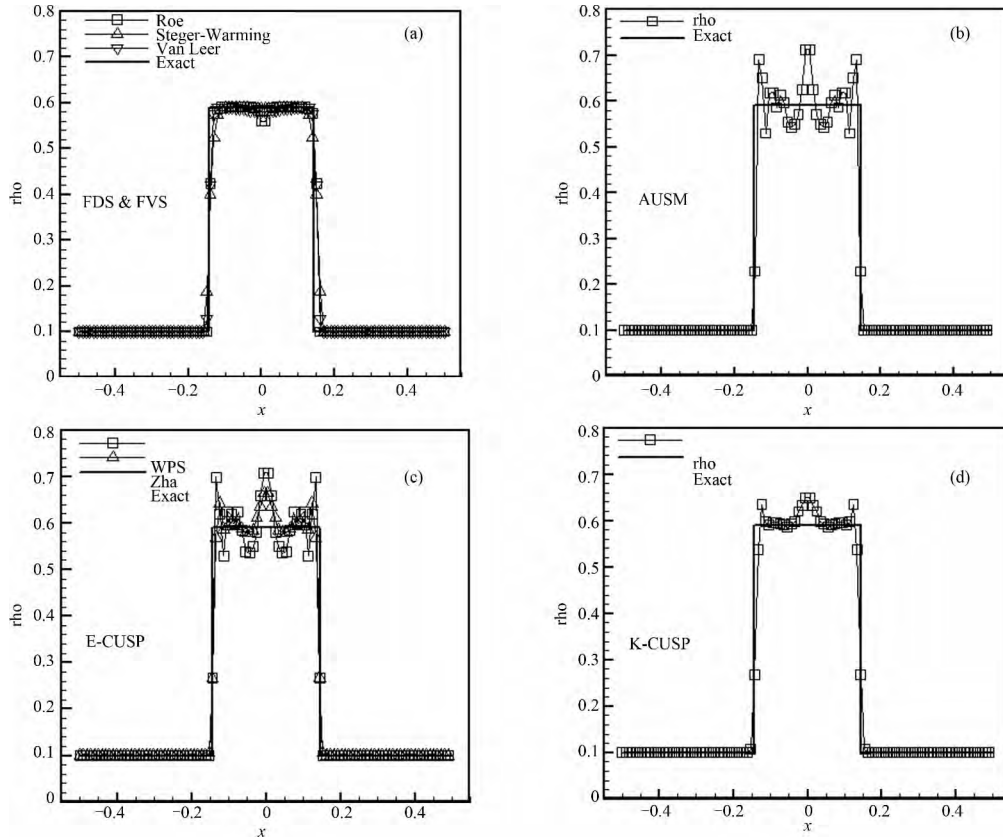


图 1 高超声速碰撞流动的密度分布

Fig. 1 Density distribution of hypersonic colliding flow

(a) FDS/FVS schemes (b) H-CUSP scheme (c) E-CUSP schemes (d) K-CUSP scheme

算例中两道强激波以马赫数为 15 的速度对向传播,目的是考察格式捕捉激波的单调性<sup>[16]</sup>. FDS 格式对激波间断的分辨率比 FVS 格式更好, Roe 格式只需两到三个网格点就能捕捉到激波. 三种 CUSP 格式的分辨率与 FDS 格式相当,但是 AUSM 和 WPS 格式在激波后存在强烈的振荡,实际上 AUSM + 格式也存在压力过冲的问题<sup>[13-14, 35]</sup>. Zha 格式振荡稍小,而 K-CUSP 格式振荡最小,有了较大改善.

### 2.2 后退流动问题

初始条件  $W_L = [1.0, -2\sqrt{\gamma}, 1.0]^T$ ,  $W_R = [1.0, -2\sqrt{\gamma}, 1.0]^T$ ,  $CFL = 0.8$ ,  $T = 0.1$ ,  $M = 2.0$ . 结果见图 2.

这个算例是为了考察格式的正则性<sup>[16]</sup>, 两道对称的稀疏波背向传播,中间区域接近于真空. Roe 格式不满足熵条件没有得到计算结果,三种 CUSP 格式对低压区密度的计算结果与 FVS 格式相当,但在中间点存在一个很小的跳跃,其中 AUSM 格式最为明显. 对于速度的计算结果, AUSM 和 WPS 格式在中间区域都存在波动, Zha 格式和 K-CUSP 格式没有出现,且比 FVS 格式的分辨率高些.

### 2.3 静止的接触间断

初始条件  $W_L = [10.0, 0.0, 1.0]^T$ ,  $W_R = [1.0, 0.0, 1.0]^T$ ,  $CFL = 0.8$ , 计算时间  $T = 0.1$ ,  $M = 2.0$ . 结果见图 3.

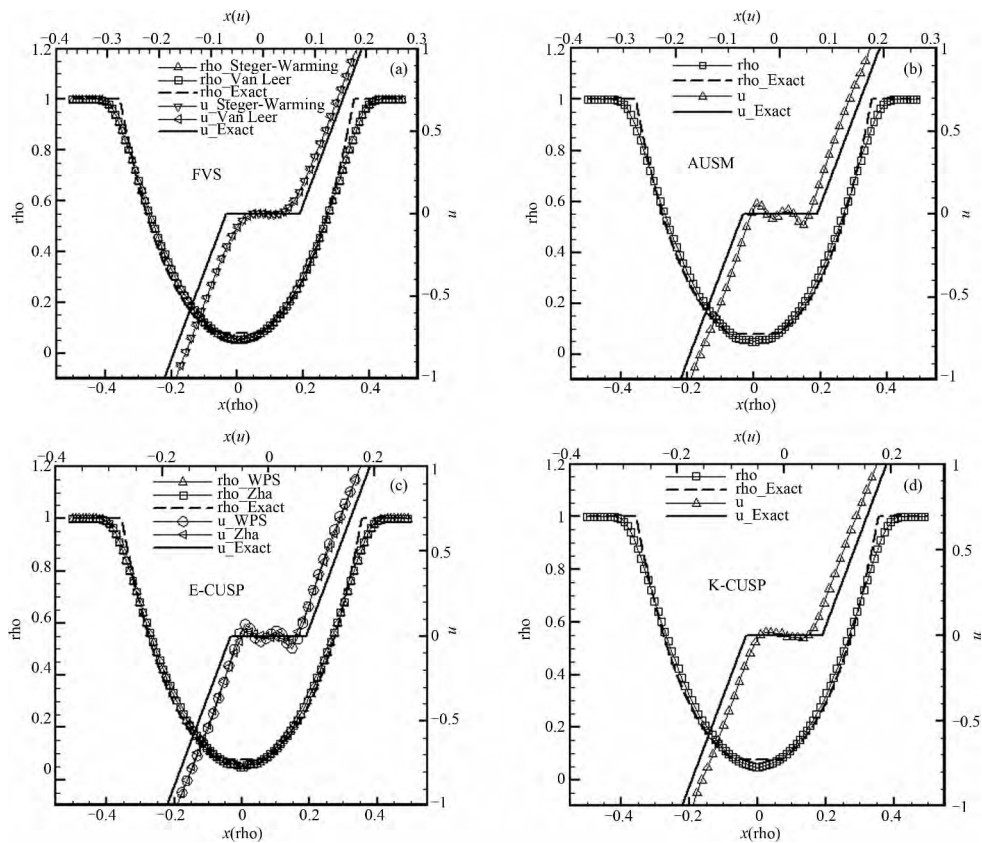


图 2 后退流动的密度和速度分布

Fig. 2 Density and velocity distribution of receding flow

(a) FDS/FVS schemes (b) H-CUSP scheme (c) E-CUSP schemes (d) K-CUSP scheme

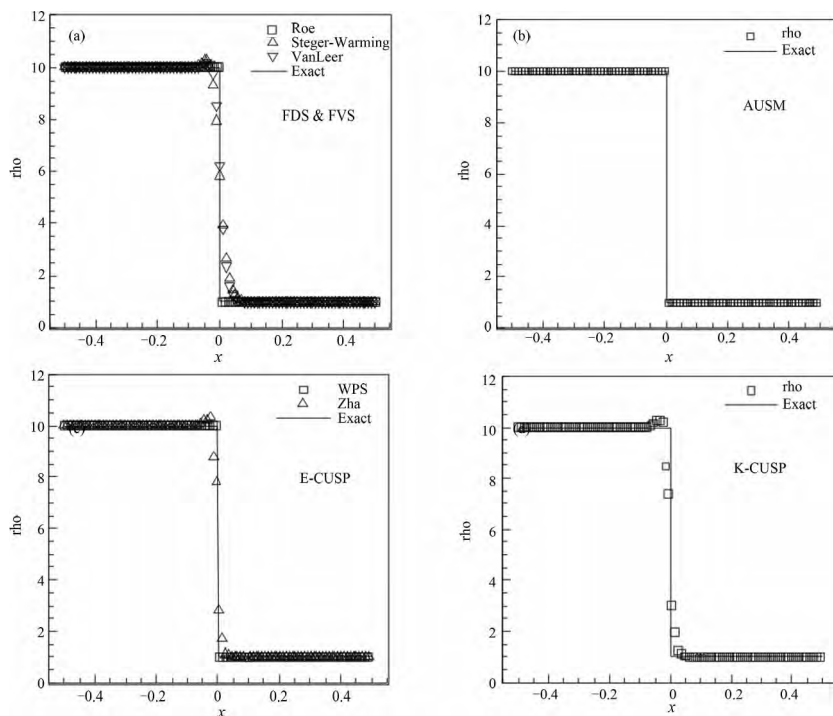


图 3 静止接触间断的密度分布

Fig. 3 Density distribution of stationary contact discontinuity

(a) FDS/FVS schemes (b) H-CUSP scheme (c) E-CUSP schemes (d) K-CUSP scheme

容易看出 AUSM 和 WPS 格式可以非常精确地捕捉到静止的接触间断,与 Roe 格式的结果完全相同. Zha 格式和 K-CUSP 格式数值耗散大些,对间断的捕捉需要 5~6 个点,但明显好于 FVS 格式,其数值耗散最大.

#### 2.4 运动的接触间断

初始条件  $W_L = [0.125 \ 0.3a_R \ 1.0]^T$ ,  $W_R = [10.0 \ 0.3a_R \ 1.0]^T$ ,  $CFL = 0.8$ , 计算步数  $nstep \approx 2000$ ,  $M = 0.3$ . 结果见图 4.

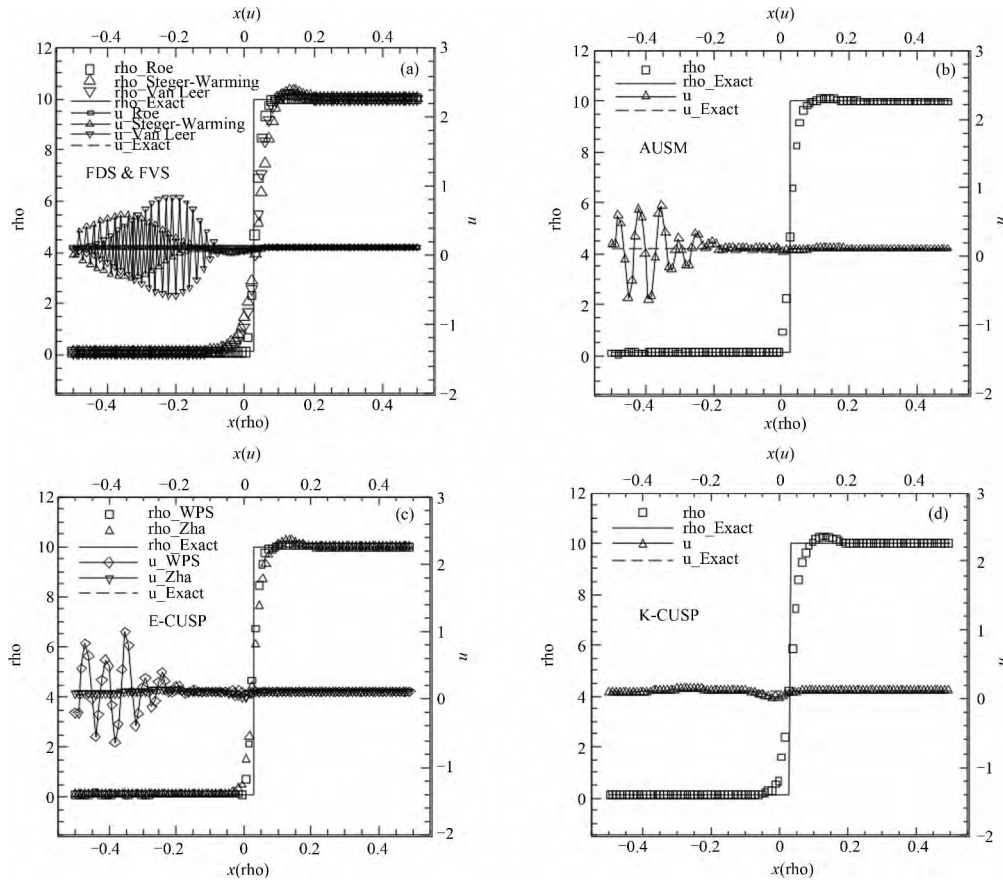


图 4 运动接触间断的密度和速度分布

Fig. 4 Density and velocity distribution of slowly moving contact discontinuity

(a) FDS/FVS schemes (b) H-CUSP scheme (c) E-CUSP schemes (d) K-CUSP scheme

从密度的计算结果来看, AUSM 和 WPS 格式精度最高,与 Roe 格式相当,而 Zha 格式和 K-CUSP 格式精度稍低一些,两种 FVS 格式的精度最差. 从速度的计算结果来看, Roe 格式与精确解完全重合,但 Steger-Warming 格式和 Van Leer 格式出现剧烈振荡, AUSM 和 WPS 格式也出现了很大振荡,而 Zha 格式和 K-CUSP 格式都没有出现振荡,结果相当.

#### 2.5 静止的激波间断

初始条件  $W_L = [1.0 \ 29.58 \ 1.0]^T$ ,  $W_R = [5.95 \ 4.97 \ 729.0]^T$ ,  $CFL = 0.8$ ,  $T = 0.1$ . 结果见图 5.

从图 5 可以看出 Roe 格式的精度最高,仅需要两个相邻点就能捕捉到激波间断,三种 CUSP 格式和 Van Leer 格式的分辨率相当,比 Roe 格式的结果稍差但好于 Steger-Warming 格式,说明 CUSP 类格式对静止激波具有较高的分辨率.

#### 2.6 运动的激波间断

初始条件  $W_L = [5.714 \ -1.952 \ 116.5]^T$ ,  $W_R = [1.0 \ -11.71 \ 1.0]^T$ ,  $CFL = 0.8$ , 计算时间  $T = 1.2$ ,  $M = 3.0$ . 结果见图 6.

这是考察格式对运动激波间断的分辨率<sup>[14 22-23 36]</sup>. 虽然 Roe 格式的分辨率很高,但是激波后的压力和密度都存在较大的振荡, FVS 格式虽然没有振荡但耗散很大. 三种 CUSP 格式对运动激波间断的分辨率都较

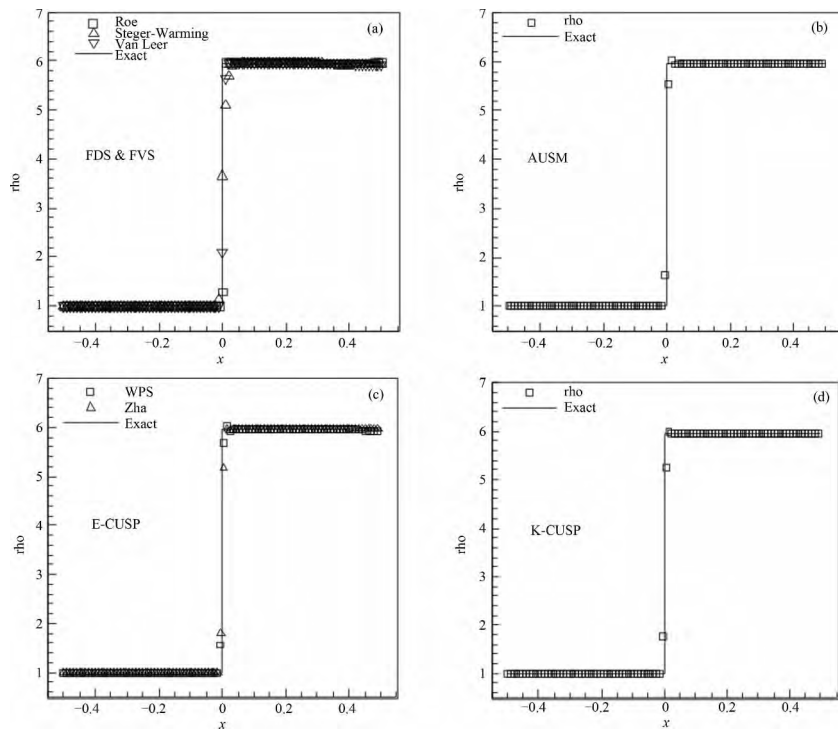


图 5 静止激波间断的密度分布

Fig. 5 Density distribution of stationary shock discontinuity

( a ) FDS/FVS schemes ( b ) H-CUSP scheme ( c ) E-CUSP schemes ( d ) K-CUSP scheme

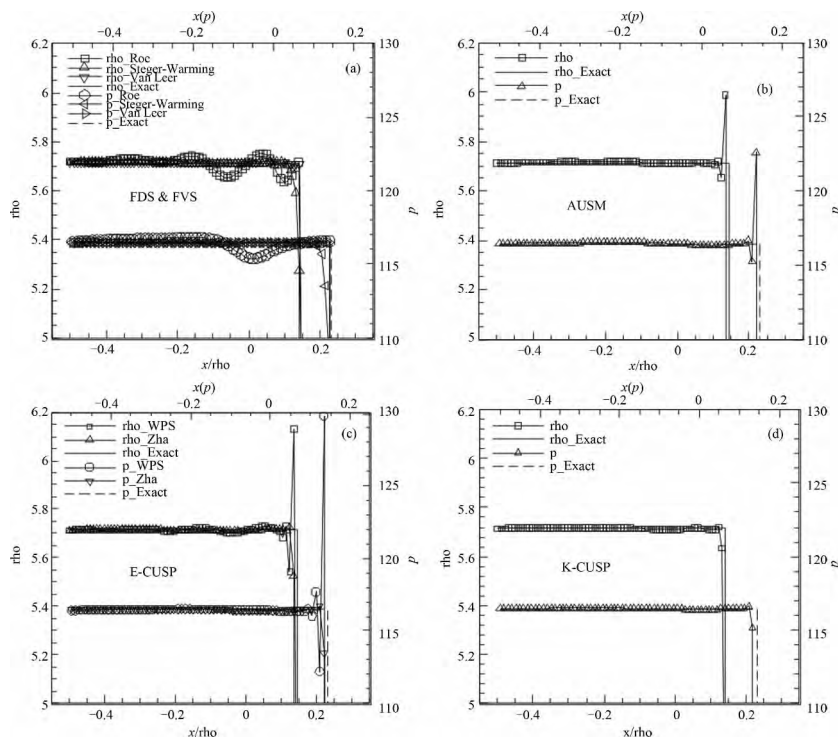


图 6 运动激波间断的密度和压力分布

Fig. 6 Density and pressure distribution of slowly moving shock discontinuity

( a ) FDS/FVS schemes ( b ) H-CUSP scheme ( c ) E-CUSP schemes ( d ) K-CUSP scheme

高,但是 ASUM 格式在激波后仍存在过冲, WPS 格式显得更为严重,且激波后的密度还存在一定的振荡; Zha 格式和 K-CUSP 格式在激波后都不存在压力和密度过冲.

## 2.7 声速点的分辨率

初始条件  $W_L = [0.1587, -5.6809, 0.5853]^T$ ,  $W_R = [1.205, 0.0, 10.0]^T$ ,  $CFL = 0.8$ ,  $T = 0.05$ . 结果见图 7.

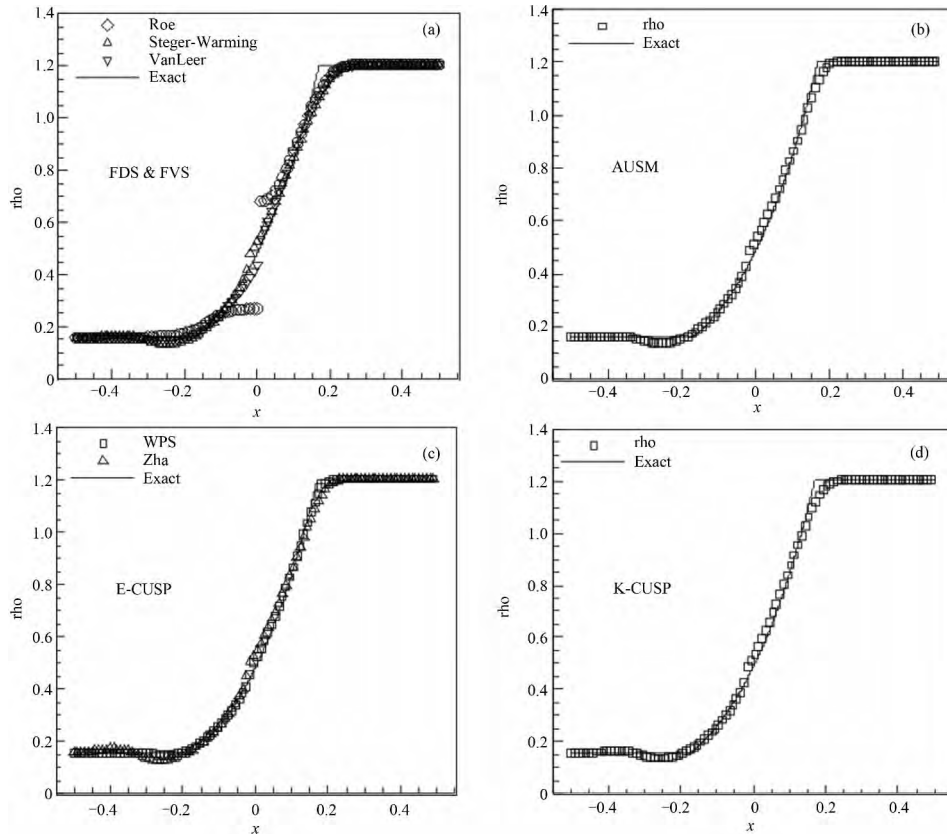


图 7 带声速点的稀疏波的密度分布

Fig. 7 Density distribution of rarefaction wave with a sonic point

(a) FDS/FVS schemes (b) H-CUSP scheme (c) E-CUSP schemes (d) K-CUSP scheme

计算结果表明无熵修正 Roe 格式在声速点附近出现很大的跳跃, Van Leer 格式在声速点比 Steger-Warming 格式稍差些, 三种 CUSP 格式在声速点附近的结果基本相同. 在顶部膨胀区, FVS 格式存在最大的圆抹角, Zha 格式和 K-CUSP 格式稍有所改善, AUSM 和 WPS 格式最接近精确解; 在底部膨胀区, Steger-Warming、AUSM、Zha 和 K-CUSP 格式的结果都出现了一点凹陷, Zha 格式在左端还略带凸起, Van Leer 和 WPS 格式没有出现这些情况.

## 2.8 激波管的 Sod 问题

初始条件  $W_L = [1.0, 0.0, 1.0]^T$ ,  $W_R = [0.125, 0.0, 0.1]^T$ ,  $CFL = 0.65$ , 计算时间  $T = 0.2$ . 结果见图 8.

从图 8 可看出 Roe 格式精度最高, Van Leer 格式次之, Steger-Warming 格式最差. 采用等式(14)压力分裂的一阶格式, 三种 CUSP 格式的计算结果没有太大的差异, 本文计算 AUSM 和 WPS 格式的最大 CFL 为 0.65, 而文献[24]用 AUSM 格式计算时发现最大 CFL 为 0.4. Zha 格式和 K-CUSP 格式的 CFL 可取到 0.8, 为了便于比较上述的所有结果均取  $CFL = 0.65$ . 然而, 当采用压力的二阶格式时, AUSM 和 WPS 格式在膨胀波段出现一个较大的下降, 而 Zha 格式和 K-CUSP 格式不存在这样的问题, 所以 AUSM 格式对 CFL 数的要求很高. 稳定性比 E-CUSP 和 K-CUSP 较差, 这也是 AUSM 格式激波后存在压力过冲的原因. 另外, 在膨胀区 K-CUSP 格式的精度略高于 Zha 格式.



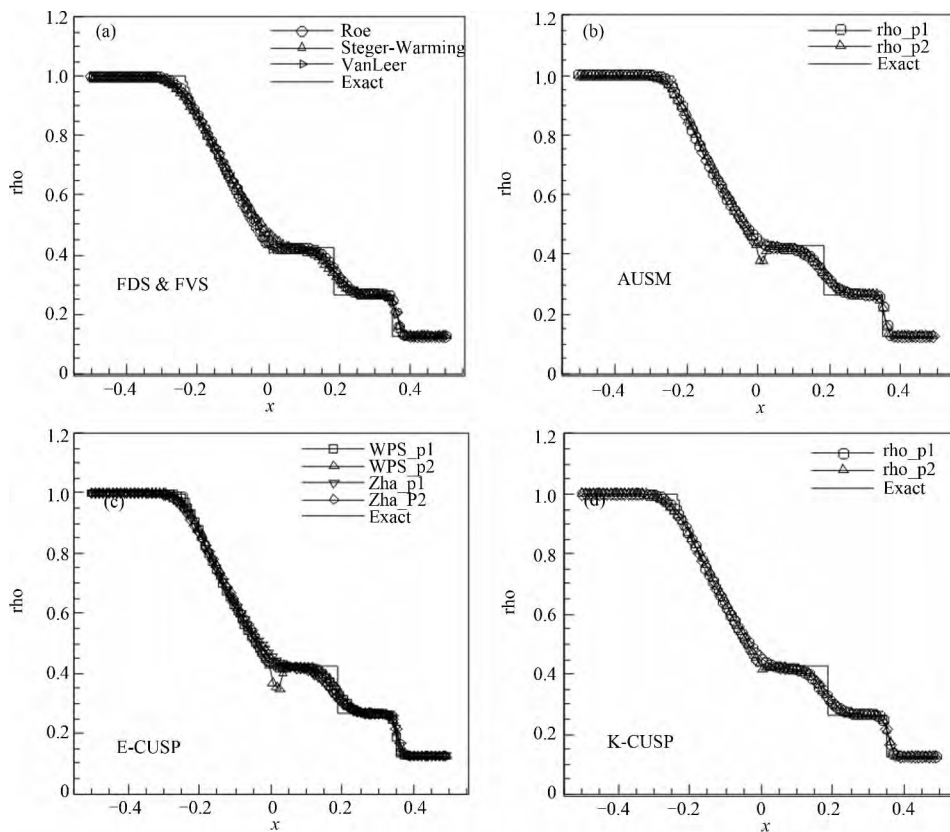


图 8 激波管 Sod 问题的密度分布

Fig. 8 Density distribution of Sod shock tube problem

(a) FDS/FVS schemes (b) H-CUSP scheme (c) E-CUSP schemes (d) K-CUSP scheme

### 2.9 二维 Riemann 问题

下面是 K-CUSP 格式模拟的两个二维 Riemann 问题, 时间和空间精度均为一阶, 计算结果见图 9、10.

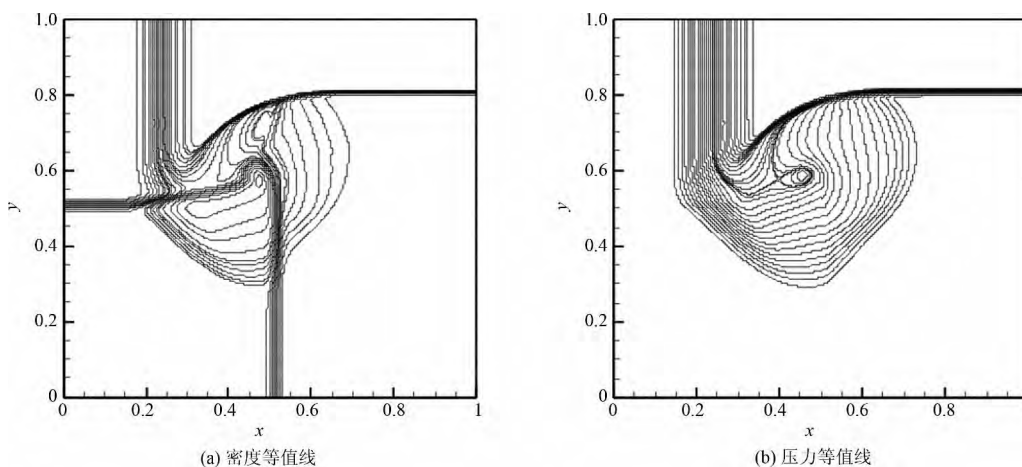


图 9 二维 Riemann 问题

Fig. 9 Two-dimensional Riemann problem: (a) density contours; (b) pressure contours

第一个问题的初始条件见文献 [37], 采用  $400 \times 400$  的网格数, 计算时间  $T = 0.2$ , 黎曼解由两个接触间断、一个稀疏波和一个激波组成, 如图 9 所示. 可以清晰地看到激波和稀疏波, 虽然为一阶但两个接触间断仍能较清楚地辨认出来. 在这复杂的波系下 K-CUSP 格式可以较好地捕捉到接触间断和激波间断. 第二个是径向对称的黎曼问题, 见文献 [38], 网格数仍为  $400 \times 400$ , 计算时间  $T = 0.13$ , 初始时刻在半径为 0.13 的范围

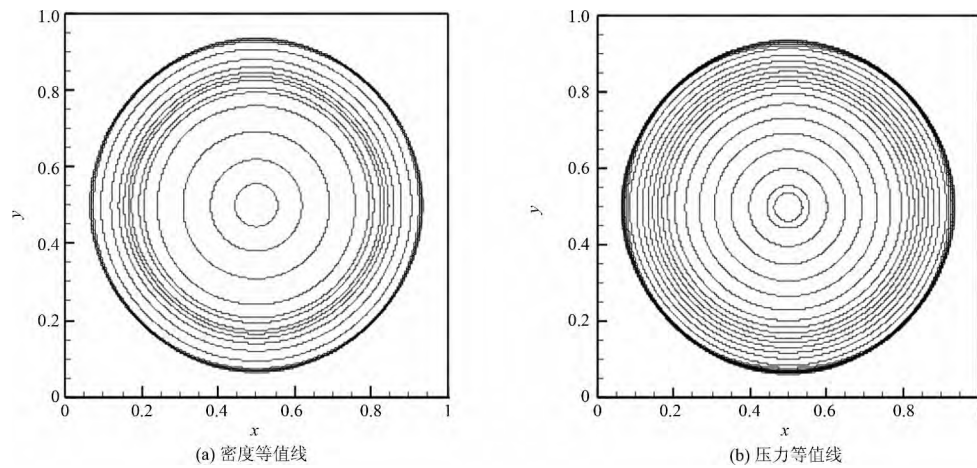


图 10 径向对称的 Riemann 问题

Fig. 10 A radially symmetric Riemann problem: (a) density contours; (b) pressure contours

内为高压静止气体,此后的流动是各向同性的,激波形状为一个二维圆,中心区域为低压,如图 10 所示,可以看到密度等值线和压力等值线的分布光滑匀称。

## 2.10 后台阶激波衍射

最后一个算例是超声速气流绕  $90^\circ$  后台阶的衍射问题<sup>[14]</sup>,采用一阶精度的 K-CUSP 格式,计算结果如图 11 所示.初始来流马赫数为 5.09,  $400 \times 400$  的网格数, CFL 取 0.5, 计算时间约为 0.15, 从密度和压力的等值线可以看到清晰尖锐的弧形激波,特别是拐角点处的膨胀气流过渡光滑,没有出现虚假的膨胀激波。

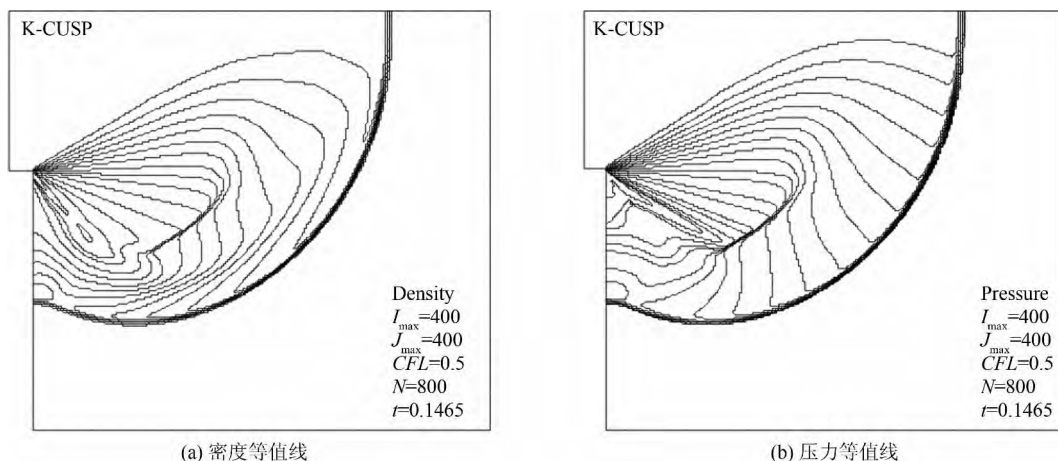


图 11 后台阶激波衍射

Fig. 11 Shock diffraction around a corner: (a) density contours; (b) pressure contours

## 3 结论

根据对流迎风分裂思想提出了一种 K-CUSP 格式,其构造出发点、物理意义、界面处理与 H-CUSP 格式、E-CUSP 格式都存在不同,三类 CUSP 格式最大的差异在于总能量的分裂方法不同.通过一系列测试计算,详细比较分析了 K-CUSP 和 H-CUSP、E-CUSP、FDS/FVS 这几类迎风格式的间断分辨率和稳健性。

1) K-CUSP 格式为了处理对流和声波两个不同的物理过程,将总能量(即总焓)中所有的运动学量和所有热力学量完全分裂到相应的对流项和压力项.因此与 AUSM 格式相比,除了分裂动量守恒量外, K-CUSP 格式的能量守恒量也进行了相应的分裂。

2) H-CUSP 格式的总焓没有分裂, E-CUSP 格式将总焓分裂为总能和静压能,而 K-CUSP 格式将总焓分裂为动能和静焓。

3) 在处理网格界面的数值通量时, K-CUSP 格式采用了一种新的分裂方法,取得了较好结果。

4) 计算发现: ① K-CUSP 格式继承了 FVS 格式的简单性和稳健性, 在激波后不易出现压力过冲, 优于 H-CUSP 格式(AUSM 格式) 和 E-CUSP 格式(Zha 和 WPS 格式), 在膨胀区域没有振荡, 稳健性优于 AUSM 格式和 WPS 格式。② K-CUSP 格式也继承了 FDS 格式的分辨率, 激波间断的捕捉精度和 H-CUSP、E-CUSP 格式相当, 接触间断的捕捉精度远高于 FVS 格式, 与 Zha 格式相当, 但低于 Roe、AUSM 和 WPS 格式。不过对于运动接触间断后的速度, AUSM 和 WPS 格式存在很大的振荡, 而 K-CUSP 格式没有振荡。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Steger J L , Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamics equations with application to finite difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics* ,1981 ,**40**( 2 ) : 263 – 293.
- [ 2 ] Van Leer B. Flux vector splitting for Euler equations [C] // Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics ,Berlin: Lecture Notes in Physics ,1982: 170.
- [ 3 ] Hanel D ,Schwane R ,Seider G. On the accuracy of upwind schemes for the solution of the Navier-Stokes equations [R]. AIAA – 1987 – 1105.
- [ 4 ] Hanel D ,Schwane R. An implicit flux-vector splitting scheme for the computation of viscous hypersonic flow [R]. AIAA – 1989 – 0274.
- [ 5 ] Coirier W J , Van Leer B. Numerical flux formulas for the Euler and Navier-Stokes equations: II. Progress in flux-vector splitting [R]. AIAA – 1991 – 1566.
- [ 6 ] Roe P L. Approximate Riemann solvers , parameter vectors and difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics* , 1981 ,**43**: 357 – 372.
- [ 7 ] Osher S , Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Mathematical computations* , 1982 , **158**: 339 – 374.
- [ 8 ] Toro E F , Spruce M , Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver [J]. *Shock Waves* ,1994 ,**4**: 25 – 34.
- [ 9 ] Peery K M , Imlay S T. Blunt-body flow simulations [R]. AIAA – 1988 – 2904.
- [10] Quirk J J. A contribution to the great Riemann solver debate [R]. ICASE Report ,1992 – 64.
- [11] Liou M S , Steffen C J. A new flux splitting scheme. [J] *Journal of Computational Physics* ,1993 ,**107**: 23 – 39.
- [12] Wada Y , Liou M S , An accurate and robust splitting scheme for shock and contact discontinuities [R]. AIAA – 1994 – 0083.
- [13] Liou M S , Progress towards an improved CFD methods: AUSM + [R]. AIAA – 1995 – 1701.
- [14] Liou M S , A Sequel to AUSM: AUSM + [J]. *Journal of Computational Physics* ,1996 ,**129**: 364 – 382.
- [15] Liou M S , Ten years in the making-AUSM-family [R]. AIAA – 2001 – 2521.
- [16] Liou M S , A sequel to AUSM , Part II: AUSM + – up for all speeds [J]. *Journal of Computational Physics* ,2006 ,**214**: 137 – 170.
- [17] Kim K H , Lee J H , Rho O H. An improvement of AUSM schemes by introducing the pressure-based weight functions [J]. *Computers and Fluids* ,1998 ,**27**( 3 ) : 311 – 346.
- [18] Kim K H , Kim C , Rho O H. Accurate computations of hypersonic flows using AUSMPW + scheme and shock-aligned grid technique [R]. AIAA – 1998 – 2442.
- [19] Kim K H , Kim C , Rho O H. Methods for the accurate computations of hypersonic flows I. AUSMPW + scheme [J]. *Journal of Computational Physics* ,2001 ,**174**( 1 ) : 38 – 80.
- [20] Jameson A. Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics I: Artificial diffusion , upwind biasing , limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flow [J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* ,1995 ,**4**: 171 – 218.
- [21] Jameson A. Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics II: Artificial and discrete shock structure [J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* ,1995 ,**5**: 1 – 38.
- [22] Edwards J R. A low-diffusion flux-splitting scheme for Navier-Stokes calculations [R]. AIAA – 1995 – 1703.
- [23] Edwards J R. A Low-diffusion flux-splitting scheme for Navier-Stokes calculations [J]. *Computer & Fluids* ,1997 ,**6**: 635 – 659.
- [24] Zha G C , Bilgen E , Numerical solutions of Euler equations by using a new flux vector splitting scheme [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* ,1993 ,**17**: 115 – 144.

- [25] Zha G C. Numerical tests of upwind scheme performance for entropy condition [J]. AIAA. 1999 ,**37**: 1005 – 1007.
- [26] Zha G C. Comparative study of upwind scheme performance for entropy condition and discontinuities [R]. AIAA – 1999 – 3348.
- [27] Zha G C , Hu Z J , Calculation of transonic internal flows using an efficient high resolution upwind scheme [J]. AIAA ,2004 ,**42**( 2) : 205 – 214.
- [28] Zha G C. A low diffusion efficient upwind scheme [J]. AIAA ,2005 ,**43**: 1137 – 1140.
- [29] Zha G C , Shen Y Q , Wang B Y. Calculation of transonic flows using WENO method with a low diffusion E-CUSP upwind scheme [R]. AIAA – 2008 – 0745.
- [30] Shen Y Q , Zha G C. Low diffusion E-CUSP scheme with high order WENO scheme for preconditioned Navier-Stokes equations [R]. AIAA – 2010 – 1452.
- [31] Zha G C , Shen Y Q , Wang B Y. An improved low diffusion E-CUSP upwind scheme [J]. Computers & Fluids ,2011 ,**48**: 214 – 220.
- [32] Halt D W , Agarwal R K. A novel algorithm for the solution of compressible Euler equations in wave/particle split ( WPS) form [C]//Proceedings of the AIAA Computational Fluid Dynamics Conference , 1993.
- [33] Agarwal R , Augustinus J , Halt D. A comparative study of advection upwind split( AUSM) and wave/particle split( WPS) schemes for fluid and MHD flows [R]. AIAA – 1999 – 3613.
- [34] Deshpande S M , Balakrishnan N , Raghurama Rao S V. PVU and wave-particle splitting schemes for Euler equations of gas dynamics [J]. Sadhana ,1994 ,**19**( 6) : 1027 – 1054.
- [35] Lyra P R M , Morgan K. A review and comparative study of upwind biased schemes for compressible flow computation Part I: 1-D first-order schemes [J]. Archives of Computational Methods in Engineering ,2000 ,**7**( 1) : 19 – 55.
- [36] Roberts T W. The behavior of flux difference splitting schemes near slowly moving shock waves [J]. Journal of Computational Physics ,1994 ,**90**: 141 – 160.
- [37] Levy D , Puppo G , Russo G. A fourth-order central WENO scheme for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics ,2002 **24**( 2) : 480 – 506.
- [38] Brio M , Zakharian A R , Webb G M. Two-dimensional Riemann solver for Euler equations of gas dynamics [J]. Journal of Computational Physics ,2001 ,**167**: 177 – 195.

## A Flux Splitting Scheme Based on AUSM

LI Xindong , HU Zongmin , ZHANG Deliang , JIANG Zonglin

( State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics , Institute of Mechanics , Chinese Academy of Sciences ,  
Beijing 100190 , China)

**Abstract:** According to advection upstream splitting method , a flux splitting method called K-CUSP is proposed. The greatest difference between K-CUSP and two traditional CUSP schemes , namely H-CUSP and E-CUSP , is splitting of total energy: All kinematic quantities and thermodynamic quantities should be separately split into convective term and pressure term by K-CUSP scheme. Numerical tests indicate that: ① K-CUSP scheme inherits the simplicity and robustness of FVS scheme. It is less prone to pressure overshoot after shock and no oscillations in expansion area , which is better than AUSM and WPS schemes. ② K-CUSP scheme also inherits resolution of FDS scheme. Shock resolution is almost the same with H-CUSP and E-CUSP schemes. Contact discontinuity resolution is better than FVS schemes , a little worse than Roe , AUSM and WPS schemes. However , velocity of contact discontinuity in AUSM and WPS schemes exist large oscillation , while our scheme does not.

**Key words:** flux splitting; mixing upwind scheme; AUSM scheme; CUSP scheme

Received date: 2014 – 01 – 06; Revised date: 2014 – 04 – 04