

文章编号: 1000-4750(2014)11-0009-08

# 有限变形下材料的弹塑性损伤行为及结构响应分析

陈 岑<sup>1</sup>, 梁乃刚<sup>1</sup>, 刘 芳<sup>2</sup>, 付 强<sup>3</sup>, 洪友士<sup>1</sup>

(1. 中国科学院力学研究所, 非线性力学国家重点实验室, 北京 100190;

2. 武汉理工大学交通学院, 湖北, 武汉 430063; 3. 中国轻型燃气轮机开发中心, 北京 100190)

**摘 要:** 该文基于一种弹塑性损伤本构模型, 分析了材料在有限变形下的力学行为及结构力学响应。将模型建立的本构方程进行线性化处理, 嵌入到有限元计算软件 ABAQUS 的子程序中, 实现模型在结构计算中的应用。针对铝合金材料(6061-T6), 建立了两种不同的结构模型进行数值模拟。模拟结果与实验结果对比表明, 模型能较好地描述材料的变形过程及结构的力学行为。最后基于模型的理论基础, 分析了材料在超出弹性范围时的复杂变形行为。

**关键词:** 有限变形; 弹塑性损伤; 结构响应; 本构理论; 构元组集模型

中图分类号: O344.3 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.05.0410

## ANALYSIS OF THE ELASTO-PLASTIC-DAMAGE BEHAVIOR AND STRUCTURAL RESPONSE OF MATERIALS UNDER FINITE DEFORMATION

CHEN Cen<sup>1</sup>, LIANG Nai-gang<sup>1</sup>, LIU Fang<sup>2</sup>, FU Qiang<sup>3</sup>, HONG You-shi<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Transportation, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei 430063, China;

3. China National Light Weight Gas Turbine Development Center, Beijing 100190, China)

**Abstract:** The mechanical behavior and structural response of materials under finite deformation are analyzed by using an elasto-plastic damage constitutive model. The constitutive equation of the present model is transformed into a linear format, and implemented into the finite element simulation tool ABAQUS. For the aluminum alloy 6061-T6, two kinds of structures are modeled for numerical simulation. From the comparison between the simulation and experimental results, it is found that the present model has the ability to describe the deformation processes and structural response of material. Based on the theory behind the present model, complicated deformation behavior beyond the elastic stage is also analyzed.

**Key words:** finite deformation; elasto-plastic-damage; structural response; constitutive theory; component assembly model

在航天航空工业和汽车工业中, 往往需要准确掌握构件的承载能力和使用寿命等信息, 因此确定

材料的力学行为和结构力学响应相当重要。固体材料在受载时往往会经历弹性、塑性、损伤等不同的

收稿日期: 2013-5-5; 修改日期: 2014-02-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(11021262)

通讯作者: 陈 岑(1986), 女, 湖北武汉人, 助理研究员, 博士, 主要从事材料力学行为研究(E-mail: chencen@lnm.imech.ac.cn).

作者简介: 梁乃刚(1944), 男, 河南博爱人, 研究员, 博士, 博导, 从事材料本构关系研究(E-mail: lng@lnm.imech.ac.cn);

刘 芳(1984), 女, 湖北天门人, 讲师, 博士, 从事材料弹塑性损伤本构关系研究(E-mail: liufang@lnm.imech.ac.cn);

付 强(1983), 男, 山西运城人, 工程师, 博士, 从事材料塑性本构关系研究(E-mail: fuhchiang@gmail.com);

洪友士(1951), 男, 福建厦门人, 研究员, 博士, 博导, 从事材料力学性能与内部结构研究(E-mail: hongys@imech.ac.cn).

阶段,不同的变形阶段涉及到不同的本构理论,需要确定不同的材料参数。而当材料的变形超过弹性变形范围时,变形通常会诱导各向异性以及对材料对变形历史的依赖性,基于不变量的等效理论往往不再适用。因此确定材料的力学行为十分困难,给工程应用带来了很大的不便。

另一方面,考虑到在工程应用中材料的变形常常超出小变形的范围,研究材料在有限变形下的力学行为也受到了广泛的重视<sup>[1-4]</sup>。例如,khan等<sup>[1-3]</sup>对屈服面演化的研究;Li等<sup>[4]</sup>针对铝合金材料(6061-T6)的延性断裂所做的实验研究。

为了满足工程应用和材料力学行为的研究需要,一个有优势的本构模型应该具备以下特征:1)能一致描述材料的弹塑性损伤力学行为;2)能适用于有限变形条件;3)能处理复杂变形及变形诱导各向异性等问题;4)能方便地应用于工程结构计算。

在理论研究方面,一些学者基于连续介质力学提出了适用于有限变形的弹塑性损伤本构模型。目前这些本构模型主要分为两类,一类基于势函数,建立在不可逆热力学框架下,并引入内变量<sup>[5-7]</sup>;例如,Voyiadjis等<sup>[5]</sup>在有限弹塑性变形的基础上引入四阶损伤刚度张量;Brünig<sup>[6]</sup>基于变形分解机制,提出了弹塑性连续介质损伤模型,并采用两种变形率张量来分别描述由位错引起的塑性变形和由微空洞的衍生引起的损伤。另一类基于等效原理<sup>[8-10]</sup>,例如,Bruhns等<sup>[8]</sup>将应变率分解为弹性和塑性部分,并分别与有效应力率建立直接关系,同时在弹性的本构关系中考虑各向同性损伤,建立了一种自洽的弹塑性损伤本构模型;Shen等<sup>[9]</sup>提出损伤等效应力的概念,建立塑性屈服准则,并利用有限元软件研究金属成型中的弹塑性损伤变形。

基于连续介质力学的研究方法,能方便的运用到数值模拟中,计算量较小,但这一类宏观模型很难将材料变形与物理机制结合起来,采用的计算参数缺乏明确的物理意义,并且在处理复杂变形等问题时具有一定的局限性。为克服这些困难,同时考虑到材料的力学行为取决于他的微结构性质,一些学者将连续介质力学和微观物理力学相结合,建立了基于微观物理机制的连续介质模型<sup>[11-13]</sup>。例如,虚内键模型<sup>[11]</sup>和准连续介质模型<sup>[12]</sup>就是在连续介质力学的模型框架下描述原子的力学响应。基于物理机制的宏观模型不仅能在数值计算中实现,同时能解释材料的力学行为,为准确地掌握和分析材料

的力学行为提供了一种有效的方法。

本文利用一种基于微观物理机制的宏观模型(构元组集模型)来研究金属材料在有限变形时的弹塑性损伤力学行为及其结构力学响应。构元组集模型是一种基于物理机制的宏观模型,以原子键、原子键的物理性质及演化特征为基础的,引入“构元”的概念来代表不同的物理变形机制,并且材料的宏观性质由所有构元的性质和耦合规律来决定。材料的总变形是各种变形机制控制下变形的叠加,因此提出“组集”的思想。模型的建立首先是根据对泛函势和Cauchy-Born准则,用弹簧束构元和体积构元共同描述材料的弹性变形和损伤行为<sup>[14-16]</sup>,接着考虑滑移作为晶体塑性的主要变形机制,用滑移构元描述材料的塑性行为<sup>[17-20]</sup>,由这三种构元组集得到的弹塑性损伤一体化本构模型称为构元组集模型,并在有限变形条件下建立了由Kirchhoff应力的Jaumann导数和变形率组成的本构方程。

在本文的研究中,将模型在有限变形条件下建立的本构方程进行线性化处理,并嵌入到商业有限元软件ABAQUS的子程序VUMAT中,实现模型在结构计算中的应用。针对铝合金材料,建立了两种缺口圆棒模型(缺口半径分别为20mm和5mm),通过模拟得到结构的载荷位移曲线以及颈缩率的演化曲线。将模拟结果与实验结果对比,并考察圆棒中心处的损伤及塑性变形的演化,同时分析材料弹塑性损伤力学行为的物理机制。

## 1 材料模型

目前,构元组集模型已经完成小变形条件下的建立和验证工作<sup>[14-16,21]</sup>,并推广到了有限变形条件下<sup>[17]</sup>,研究有限变形下后继屈服面在拉-剪<sup>[18-19]</sup>及拉-拉应力空间中的演化<sup>[22]</sup>,因此,本文中只给出材料模型推导的关键部分。

### 1.1 弹性损伤本构关系

基于对泛函势和Cauchy-Born准则<sup>[23]</sup>,将具有相同取向的原子键作为一组,提出弹簧束构元来描述原子间对势的作用,同时提出体积构元来描述原子与其他原子以及原子和电子云之间的作用。由这两种构元来共同描述材料的弹性变形和损伤。有限变形下的弹性损伤本构关系是由Kirchhoff应力的Jaumann导数 $\overset{\nabla}{\tau}(w^e)$ 和变形率 $D^e$ 建立的<sup>[18]</sup>:

$$\overset{\nabla}{\tau}(w^e) = C^e : D^e \quad (1)$$

式中,  $C^e$  为弹性损伤刚度张量, 其分量表示为<sup>[18]</sup>:

$$C_{ijkl}^e = \sum_{s=1}^n (f'(\lambda^{(s)}) - 2f(\lambda^{(s)})) e^{-4\lambda^{(s)}} n_i n_j n_k n_l + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n f(\lambda^{(s)}) e^{-2\lambda^{(s)}} (n_j n_l \delta_{ik} + n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk}) + p'(\theta) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2)$$

式中:  $\lambda^{(s)}$  为弹簧束构元上的变形;  $f(\lambda^{(s)})$  为弹簧束构元上力的响应;  $n_i$  代表构元在方向矢量  $n$  上的分量;  $\theta$  是体积构元上的变形,  $p'(\theta)$  是体积构元的力响应对变形的导数。

由于损伤的本质是原子间力的减少和缺失, 因此, 损伤的影响可以通过弹簧束构元和体积构元来反映。而在本文的研究中, 暂时不考虑体积构元的损伤。

### 1.2 弹塑性损伤本构关系

考虑晶体滑移作为金属材料的主要塑性变形机制, 将单晶体推广到多晶体, 提出滑移构元来描述材料的塑性变形<sup>[18]</sup>。滑移构元描述材料的塑性变形响应与晶体滑移理论类似, 但构元组集模型与晶体滑移模型最大的区别有两点: 首先, 弹性理论不同, 晶体塑性理论采用的是线弹性理论, 而构元组集模型则通过弹簧束构元和体积构元来描述材料的弹性变形及损伤。其次, 构元组集模型提出滑移构元来描述材料的塑性变形。对于单晶体, 滑移构元等同于滑移系; 对于多晶体, 滑移构元是大量随机分布的滑移系按照取向的分组, 描述了不同晶粒内部具有相同运动学特点的滑移系的宏观平均性质。

滑移构元均匀的分布在空间中, 对于第  $\alpha$  个滑移构元, 运动学变量和动力学变量分别为滑移量  $\gamma^{(\alpha)}$  以及分解剪应力  $\tau^{(\alpha)}$ 。根据 Schmid 定理, 当分解剪应力达到其临界值时, 滑移构元开动, 当分解剪应力的增量与其临界值的增量保持一致时, 滑移构元持续开动。在滑移过程中, 可以用一个简单的线性关系来表示临界分解剪应力率与滑移率之间的关系:

$$\begin{cases} \dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} = b \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)}, \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} > 0 \\ \dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} = b \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)}, \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $h_{\alpha\beta}$  为滑移硬化模量, 表示第  $\alpha$  个滑移构元

滑移一单位时对第  $\beta$  个滑移构元分解剪应力临界值的影响。当  $\sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} > 0$  时, 滑移构元沿主动开动方向开动, 主动开动方向上的临界分解剪应力值  $\tau_{+cr}^{(\alpha)}$  由于硬化而改变, 被动开动方向上的临界分解剪应力值  $\tau_{-cr}^{(\alpha)}$  由包氏效应影响系数  $b$  决定, 反之亦然。

Kirchhoff 应力的 Jaumann 导数可以写为:

$$\begin{aligned} \nabla \tau = C^e : (D - D^p) - \sum_{\alpha=1}^m \dot{\gamma}^{(\alpha)} (Q^{(\alpha)} \cdot \tau - \tau \cdot Q^{(\alpha)}) = \\ \left( C^e - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m (g_{\alpha\beta})^{-1} \lambda^{(\alpha)} \otimes \lambda^{(\beta)} \right) : D \end{aligned} \quad (4)$$

式中, 对所有开动的滑移构元求和。 $\lambda^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} : C^e + Q^{(\alpha)} \cdot \tau - \tau \cdot Q^{(\alpha)}$ 。  $P^{(\alpha)}$  和  $Q^{(\alpha)}$  分别为对称和反对称张量:  $P^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(s^{(\alpha)} \otimes n^{(\alpha)} + n^{(\alpha)} \otimes s^{(\alpha)})$ ,  $Q^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(s^{(\alpha)} \otimes n^{(\alpha)} - n^{(\alpha)} \otimes s^{(\alpha)})$ 。

对于第  $\alpha$  个构元,  $s^{(\alpha)}$  为沿滑移方向的方向矢量,  $n^{(\alpha)}$  为垂直于滑移方向的方向矢量。

定义  $C^{epd}$  为弹塑性损伤刚度张量为:

$$C^{epd} = C^e - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m (g_{\alpha\beta})^{-1} \lambda^{(\alpha)} \otimes \lambda^{(\beta)} \quad (5)$$

式中, 弹性损伤刚度张量  $C^e$  由式(2)计算得到; 且  $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \lambda^{(\alpha)} : P^{(\beta)}$ 。

由于弹簧束构元和滑移构元均匀地分布在空间中, 不同方向的构元经历的变形与物理状态随变形历史各不相同, 从而可以方便地描述材料的变形诱导各向异性与历史依赖性问题。同时, 模型兼具了连续介质力学和微观物理方法的优势, 具备了应用到工程实践的理论基础。

## 2 本构方程的线性化

有限元软件 ABAQUS 以其优越的性能被广泛的用于结构力学分析。在计算中, 由软件将位移(位移增量)或者应变(应变增量), 传入到子程序中, 计算得到应力(应力增量)。为实现模型在结构计算中的应用, 需要将式(4)中的本构方程进行线性化的处理, 并嵌入到 ABAQUS 的子程序中。

本构方程线性化的推导过程将基于更新的 Lagrange 方法。其思想是在时间  $[t, t + \Delta t]$  的增量求解期间所有的变量都以时刻  $t$  (此步长开始的时刻)

的构形作为参考构形来定义。这样在计算中对于不同时间步长的增量求解，不断地修改参考构形。下面将给出具体推导过程。

Kirchhoff 应力的 Jaumann 导数可以写为：

$$\overset{\nabla}{\tau} = \dot{\tau} + \tau \cdot W - W \cdot \tau \quad (6)$$

式中： $W$  为反物质旋率张量，为反对称张量；由式(6)，kirchhoff 应力的物质应率  $\dot{\tau}$  的分量为：

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\dot{\tau}}_{ij} &= \tau_{ij} + \tau_{ip} \cdot W_{jp} + W_{ip} \cdot \tau_{pj} = \\ \overset{\nabla}{\tau}_{ij} + \tau_{ip} \cdot (L_{jp} - D_{jp}) &+ (L_{ip} - D_{ip}) \cdot \tau_{pj} = \quad (7) \\ (C_{ijkl}^{epd} - \tau_{ik} \delta_{jl} - \tau_{kj} \delta_{il}) D_{kl} &+ L_{jp} \tau_{ip} + L_{ip} \tau_{pj} \end{aligned}$$

式中， $L$  为应度为度张量。

基于更新的 Lagrange 方法，在参考构型中第二 Piola-Kirchhoff 应力  $T$  与 kirchhoff 应力  $\tau$  相等，并且第二 Piola-Kirchhoff 应力的物质应率  $\dot{T}$  与 kirchhoff 应力的物质应率  $\dot{\tau}$  存在以下关系：

$$\dot{T}_{ij} = \dot{\tau}_{ij} - L_{ip} \tau_{pj} - L_{jp} \tau_{ip} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)，得到：

$$\dot{T}_{ij} = (C_{ijkl}^{epd} - \tau_{ik} \delta_{jl} - \tau_{kj} \delta_{il}) D_{kl} \quad (9)$$

由于 Green 应变率  $\dot{E}$  与变形率  $D$  在现时构形中相等： $\dot{E} = D$ 。式(9)可以表示为：

$$\Delta T = \tilde{C} : \Delta E \quad (10)$$

式中， $\tilde{C}$  是满足 Voigt 对称性的刚度张量，其分量可以写为：

$$\tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl}^{epd} - \tau_{ik} \delta_{jl} - \tau_{kj} \delta_{il} \quad (11)$$

由此得到了由式(10)表示的线性化的本构方程。

### 3 迭代流程

在子程序 VUMAT 中，每个增量步的具体计算过程如下：

1) 应变增量  $\Delta E^{(n)}$  由 ABAQUS 计算得到并传入到子程序中；

2) 由于  $D^{(n)} = \Delta E^{(n)}$ ，可由  $D_e^{(n)} = D^{(n)} - D_p^{(n-1)}$  计算得到弹性变形率， $D_p$  为塑性变形率，其初始值为 0；

3) 弹性变形为度的增量为  $\Delta F_e = (D_e + W_e) \cdot F_e^{(n-1)}$ ；其中， $W_e$  为反物质旋率的弹性部分，其值设为 0；弹性变形为度为  $F_e^{(n)} = \Delta F_e + F_e^{(n-1)}$ ；

4) 弹簧束构元和体积构元上的变形可由变形为度  $F_e^{(n)}$  计算得到，同时通过计算能得到这两种构

元的力响应；

5) 由式(2)可计算得到弹性损伤刚度张量  $C^e$ ；

由  $\tau = \sum_{s=1}^n f(\lambda^{(s)}) e^{-2\lambda^{(s)}} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + p(\theta) I$  计算

Kirchhoff 应力  $\tau$  ( $I$  为单位张量)<sup>[18]</sup>；

6) 根据广义的 Schmid 定理，滑移构元上的分解剪应力为： $\tau^{(\alpha)} = \tau : P^{(\alpha)}$ 。对于持续开动的滑移构元  $\alpha$ ，滑移率  $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$  可以通过分解剪应力率  $\dot{\tau}^{(\alpha)}$  以及硬化模量  $h_{\alpha\beta}$  由式(3)计算得到<sup>[18]</sup>；

7) 计算得到塑性变形率的试探值

$$\tilde{D}_p^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^m \dot{\gamma}^{(\alpha)} P^{(\alpha)} ;$$

8) 计算得到变形率的试探值  $\tilde{D}^{(n)} = D_e^{(n)} + \tilde{D}_p^{(n)}$ 。将试探值  $\tilde{D}^{(n)}$  与给定值  $D^{(n)}$  进行比较：如果  $\|\tilde{D}^{(n)} - D^{(n)}\| < \delta$  ( $\delta$  为计算精度) 满足，则进入第 10) 步，否则，回到第 2) 步由  $\tilde{D}_p^{(n)}$  计算得到当前步的  $D_e^{(n)}$ ；

9) 弹塑性损伤刚度张量  $C^{epd}$  由式(5)计算得到；

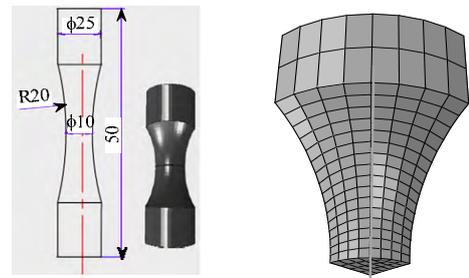
10) 由式(10)计算得到第二 Piola-Kirchhoff 应力的增量  $\Delta T^{(n)}$ ，并计算总的第二 Piola-Kirchhoff 应力  $T^{(n)} = T^{(n-1)} + \Delta T^{(n)}$ 。

### 4 数值模拟

本文的数值模拟将针对 Li 等<sup>[4]</sup>关于铝合金材料 (6061T6) 的实验结果进行。该实验选取几种不同的拉伸试件，采用 200kN CMT520 试验机，通过位移加载的方式得到载荷-位移曲线。

本文的计算主要选取了其中两种缺口圆棒(缺口半径分别为 20mm 和 5mm)。并通过相关软件从实验得到的载荷-位移曲线图中读取数据。

图 1(a)和 2(a)分别为两种的圆棒的结构及尺寸图，图 1(b)和 2(b)为网格划分图，单元数目分别为 362



(a) 结构及尺寸图 (b) 网格划分图  
图 1 缺口半径为 20mm 的圆棒结构及网格划分图

Fig.1 Geometry and mesh grid for notched bar (notch radii: 20mm)

和 248, 最小单元尺寸均为 0.12mm。考虑到结构的对称性, 取八分之一的圆棒, 并采用缩减积分的三维八节点单元进行结构计算。

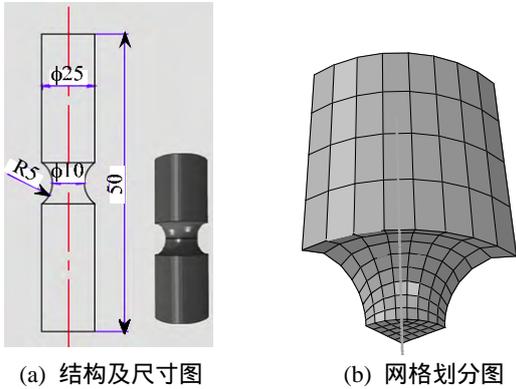


图 2 缺口半径为 5mm 的圆棒结构及网格划分图  
Fig.2 Geometry and mesh grid for notched bar (notch radii: 5mm)

#### 4.1 构元的离散

由于弹簧束构元和滑移构元均匀的分布在空间中, 数值计算中需要将构元进行离散。对于三维问题, 通常将弹簧束构元在空间中离散到 46 个独立的方向, 如图 3(a)所示。将弹簧束构元的方向作为滑移构元的法向, 对于每一个法向, 在其垂直平面内, 均匀地取 12 个滑移方向, 如图 3(b)所示, 滑移构元在空间中离散的数目为  $46 \times 12=552$ 。

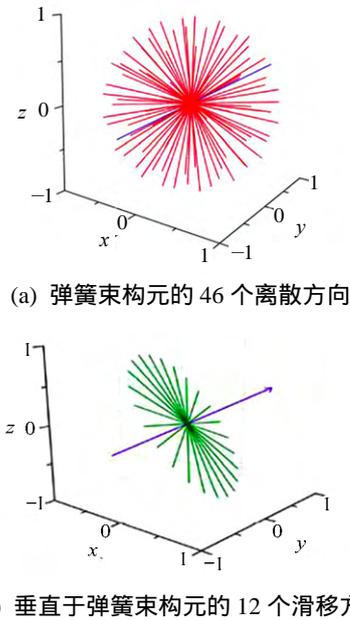


图 3 构元在三维空间中离散示意图

Fig.3 Discrete directions of components in 3-D space

#### 4.2 参数标定

通过实验结果, 可确定弹性模量为  $E=68.9\text{GPa}$ , 泊松比为  $\nu=0.33$ , 初始屈服应力为  $\sigma_{ys}=310\text{MPa}$ 。

#### 4.2.1 弹簧束构元的参数确定

考虑用幂指数函数能较好的反映材料宏观的应力-应变曲线, 因此弹簧束构元的响应曲线为<sup>[18]</sup>:

$$f(\lambda^{(s)}) = \begin{cases} \left( H_0 \lambda_0 + H_0 k \left( 1 - e^{-\frac{\lambda_{\pm h}^{(s)} + \lambda_0}{k}} \right) \right) \frac{\lambda^{(s)}}{\lambda_{\pm h}^{(s)}}, & \lambda_{\pm h}^{(s)} > \lambda_0 \\ H_0 \lambda_0, & -\lambda_0 \leq \lambda_{\pm h}^{(s)} \leq \lambda_0 \\ \left( -H_0 \lambda_0 - H_0 k \left( 1 - e^{-\frac{\lambda_{\pm h}^{(s)} + \lambda_0}{k}} \right) \right) \frac{\lambda^{(s)}}{\lambda_{\pm h}^{(s)}}, & \lambda_{\pm h}^{(s)} < -\lambda_0 \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $H_0$  为弹簧束构元的初始刚度, 将式(2)中的刚度计算式与广义胡克定理对比, 可由弹性模量和泊松比计算得到弹簧束初始刚度。在三维问题中,

$$H_0 = \frac{15E}{4\pi(1+2\nu)} ;$$

损伤临界值  $\lambda_0$  和参数  $k$  通过拟合结构的载荷位移曲线得到。随着加载, 当弹簧束构元上的变形超过损伤临界值时, 弹簧束构元刚度会发生折减, 因此能自然地反映出宏观损伤。

$\lambda_{\pm h}^{(s)}$  为加载历史, 能反映弹簧束构元沿拉伸(或压缩)方向记载的最大值, 因此在加载过程中能反映出材料对变形历史的依赖性。

#### 4.2.2 体积构元的参数确定

由于在本文的研究中不考虑体积构元的损伤, 体积构元上的力响应可以通过弹性模量和泊松比计算得到。在三维问题中, 体积构元的力响应计算为<sup>[18]</sup>:

$$p(\theta) = \frac{E(4\nu-1)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \theta \quad (13)$$

#### 4.2.3 滑移构元的参数确定

1) 初始临界分解剪应力的值由拉伸屈服应力

$$\text{决定: } \tau_{\pm cr}^0 = \frac{\sigma_{ys}}{2}。$$

2) 滑移构元的力学性质由式(3)中的滑移硬化模量  $h_{\alpha\beta}$  来反映。硬化模量由两部分组成, 其表达式为:

$$h_{\alpha\beta} = h_{kl}^{(\alpha, \beta)} P^{(\alpha)} : P^{(\beta)} + (h_{ks}^{(\alpha)} - h_{kl}^{(\alpha, \beta)}) \delta_{\alpha\beta} P^{(\alpha)} : P^{(\beta)} \quad (14)$$

式中:  $h_{ks}^{(\alpha)}$  为自硬化系数;  $h_{kl}^{(\alpha, \beta)}$  为潜在硬化系数。

考虑到幂指数函数能很好地描述材料宏观的力学行为, 对于持续开动的滑移构元, 其响应函数

可以表示为：

$$\tau^{(\alpha)} = c_k (|\gamma| + \gamma_0)^{m_k} \quad (15)$$

由式(15)，自硬化部分可以表示为：

$$h_{\alpha\alpha} = c_k m_k (|\gamma^{(\alpha)}| + \gamma_0)^{m_k - 1} \quad (16)$$

其中， $\gamma_0 = \left( \frac{\tau_{+cr}^0}{c_k} \right)^{\frac{1}{m_k}}$ 。

结合式(14)和式(16)，有：

$$h_{\alpha\alpha} = h_{ks}^{(\alpha)} P^{(\alpha)} : P^{(\alpha)} = \frac{1}{2} h_{ks}^{(\alpha)} = c_k m_k (|\gamma^{(\alpha)}| + \gamma_0)^{m_k - 1} \quad (17)$$

因此，自硬化系数  $h_{ks}^{(\alpha)}$  的表达式写为：

$$h_{ks}^{(\alpha)} = 2c_k m_k (|\gamma^{(\alpha)}| + \gamma_0)^{m_k - 1} \quad (18)$$

式中， $c_k$  和  $m_k$  分别为随动硬化参数。

考虑到先开动的滑移构元影响次开动和未开动的滑移构元，以及硬化矩阵具有对称性，潜在硬化系数  $h_{kl}^{(\alpha, \beta)}$  为：

$$h_{kl}^{(\alpha, \beta)} = q \min(h_{ks}^{(\alpha)}, h_{ks}^{(\beta)}) \quad (19)$$

式中， $q$  是潜在硬化系数。

3) 由于实验中只给出了单轴拉伸时的载荷位移曲线，因此无法确定先开动的构元对次开动和未开动的构元的影响，也无法确定主动开动方向的临界值对被动方向的影响，因此本文的计算中潜在硬化系数  $q$  取为  $1.0 \times 10^{-5}$ ，包氏效应影响系数取为 0。自硬化参数  $c_k$  和  $m_k$  通过拟合实验中材料在单轴拉伸时的应力-应变曲线来确定。

图 4 为模拟得到的单轴拉伸下的应力-应变曲线与实验结果的对比。表 1 为计算参数，对两种结构不同的试件，计算参数保持一致。

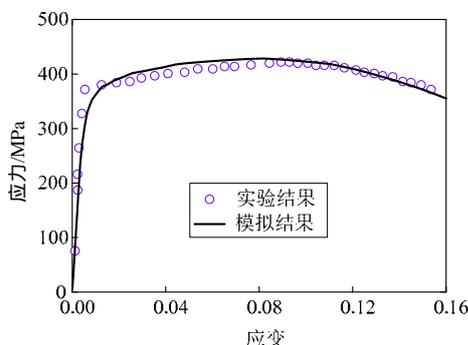


图 4 模拟得到单轴拉伸时的应力-应变曲线与实验结果的比较

Fig.4 Comparison of simulated and experimental stress-strain curve under uniaxial loading

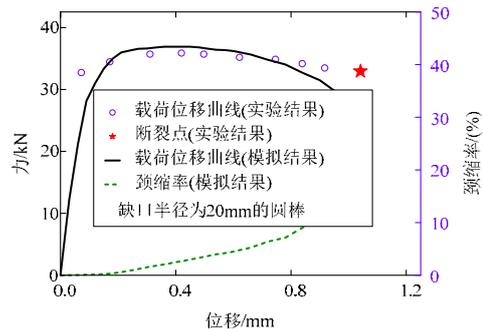
表 1 计算参数

Table.1 Simulation parameters								
$E/\text{GPa}$	$\nu$	$\lambda_0$	$k$	$\tau_{+cr}^0/\text{MPa}$	$c_s/\text{MPa}$	$m_s$	$q$	$b$
68.9	0.33	0.0022	0.01	155	1000	0.1	$1.0 \times 10^{-5}$	0.0

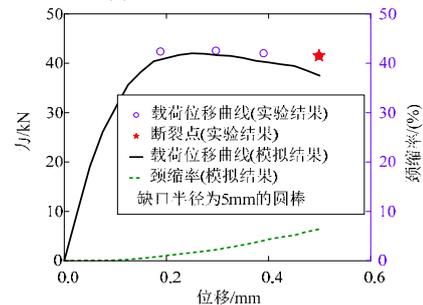
### 4.3 数值模拟结果

#### 4.3.1 材料的结构力学响应分析

图 5(a)和图 5(b)为模拟得到的两种缺口圆棒的载荷位移曲线与实验结果的对比，模拟结果与实验结果的最小二乘拟合误差分别为 11.003(缺口半径 20mm)和 7.55(缺口半径 5mm)。此外，图 5 也给出了圆棒颈缩率随位移的变化曲线。



(a) 缺口半径为 20mm



(b) 缺口半径为 5mm

图 5 缺口圆棒载荷位移曲线与实验结果的对比以及颈缩率的演化曲线

Fig.5 Comparisons of simulated and experimental force-displacement response and evolution of necking for notched bars

颈缩率  $\Phi$  主要考察的是圆棒中间横截面积最小处的缩减率，其计算如下：

$$\Phi = \left| \frac{A - A'}{A} \right| \times 100\% \quad (20)$$

式中  $A$  为变形前缺口圆棒横截面积最小处的面积； $A'$  为变形后的同一位置的横截面积。

图 6 为缺口半径为 20mm 的缺口圆棒的轴向对数应变云图，图 6(a)为弹性阶段，图 6(b)为载荷下降阶段。从图中对比可以看出，缺口圆棒中间处出现了应变集中及颈缩现象。

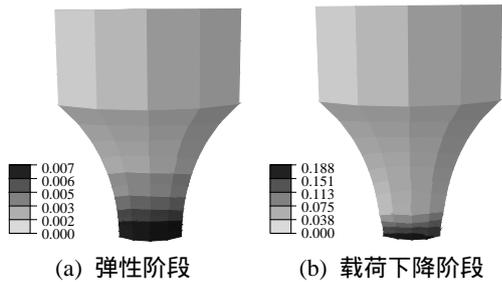


图6 缺口半径为20mm的缺口圆棒轴向对数应变云图  
Fig.6 Contour plots of logarithmic axial strain for notched bar (notch radii: 20mm)

从图5~图6可以看出模型计算得到的载荷位移曲线与实验符合较好,能较好的描述材料的结构力学响应。两种缺口圆棒在弹性阶段,结构横向变形较小;随着加载,结构局部产生塑性变形,圆棒中间处横向颈缩现象越来越明显;在结构的载荷下降时,圆棒中心处出现较大的变形,颈缩量增长较快。

#### 4.3.2 材料的塑性损伤力学行为分析

材料的变形在超出弹性范围以后,尤其当损伤和塑性变形同时产生时,其力学行为往往十分复杂。为进一步考察结构在加载过程中的损伤与塑性行为,针对圆棒的中心点,分析其损伤率随等效塑性应变的变化。图7(a)和图7(b)分别为两种圆棒的中心点处损伤率随等效塑性应变的演化曲线。

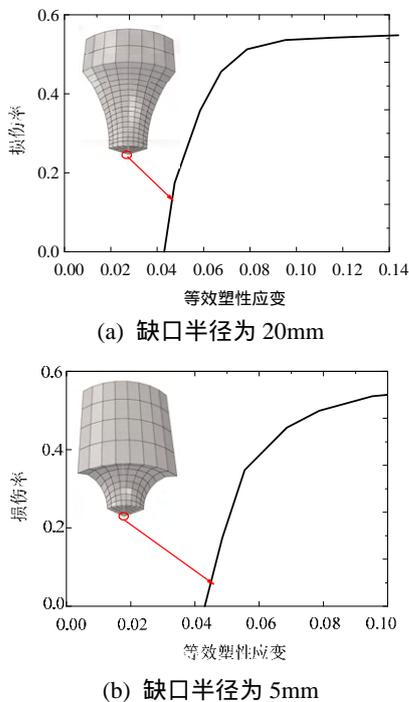


图7 缺口圆棒中心处损伤率随等效塑性应变演化曲线  
Fig.7 Evolution of relationship between damage and equivalent plastic strain

宏观损伤率的计算公式为:

$$D_{am} = 1 - \frac{\bar{C}}{C} \quad (21)$$

式中:  $C$  为加载前的有效刚度;  $\bar{C}$  为加载后的有效刚度。

从图7可以看出,在缺口圆棒中心点处,材料先进入塑性,随后有效刚度下降,损伤量增长较快。随着塑性应变的增加,损伤量逐渐趋于平缓。

#### 4.4 讨论

由于模型中由弹簧束构元反映损伤,由滑移构元反映塑性变形,而这两种构元均匀分布于空间中,能自然地反映加载过程中材料在不同方向上的损伤和塑性行为。另外,由于构元上的状态变量随加载而改变,能记录加载历史。因此,模型能有效描述变形诱导各向异性、材料对变形历史的依赖性等问题,并能分析材料超出弹性范围后的复杂变形行为。

弹簧束构元和滑移构元上的计算参数取决于材料在单轴拉伸时的应力-应变曲线。对于同种材料,即使结构尺寸不同,但都采用同样的参数进行计算分析。计算结果与实验结果对比显示,构元组集模型能较好的描述结构从开始受载到破坏时的变形行为。

### 5 结论

本文基于构元组集模型的理论基础,分析材料在有限变形下的力学行为及结构力学响应,主要结论如下:

- (1) 将模型在有限变形条件下的本构方程进行线性化处理,设计相应的迭代流程,将线性化的本构方程嵌入到有限元计算软件中,实现模型在结构计算中的应用;
- (2) 模型能适用于有限变形的条件下,并能一致描述材料在弹性、塑性、损伤等不同阶段的力学行为及其结构力学响应;
- (3) 模型能反映变形诱导各向异性以及材料对变形历史的依赖性,同时能处理复杂变形等问题;
- (4) 模型能方便简单地应用到数值模拟中,且计算参数根据材料的力学性能确定,并具有明确的物理意义。对于同种材料,都采用相同的参数进行计算分析。

## 参考文献：

- [1] Khan A S, Kazmi R, Pandey A, Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part-I: A very low work hardening aluminum alloy (Al6061-J6511) [J]. *International Journal of Plasticity*, 2009, 25(9): 1611–1625.
- [2] Khan A S, Pandey A, Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part III: Yield surface in tension-tension stress space (Al 6061-T 6511 and annealed 1100 Al) [J]. *International Journal of Plasticity*, 2010, 26(10): 1432–1441.
- [3] Khan A S, Pandey A, Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part II: A very high work hardening aluminum alloy (annealed 1100 Al) [J]. *International Journal of Plasticity*, 2010, 26(10): 1421–1431.
- [4] Li H, Fu M W, Lu J, Yang H. Ductile fracture: Experiments and computations [J]. *International Journal of Plasticity*, 2011, 27(2): 147–180.
- [5] Voyiadjis G Z, Park T. The kinematics of damage for finite-strain elasto-plastic solids [J]. *International Journal of Engineering Science*, 1999, 37(7): 803–830.
- [6] Brünig M. A framework for large strain elastic-plastic damage mechanics based on metric transformations [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2001, 39(9): 1033–1056.
- [7] 齐虎, 李云贵, 吕西林. 基于能量的弹塑性损伤实用本构模型[J]. *工程力学*, 2013, 30(5): 172–180.  
Qi Hu, Li Yungui, Lü Xilin. A Practical elastic plastic damage constitutive model based on energy [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(5): 172–180. (in Chinese)
- [8] Bruhns O T, Xiao H, Meyers A. A self-consistent Eulerian rate type model for finite deformation elastoplasticity with isotropic damage [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(4): 657–683.
- [9] Shen W, Peng L H, Tang C Y. An anisotropic damage-based plastic yield criterion and its application to analysis of metal forming process [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005, 47(12): 1897–1922.
- [10] 李忱, 杨桂通, 黄执中. 各向同性弹性介质非线性本构方程[J]. *工程力学*, 2010, 27(1): 1–5.  
Li Chen, Yang Guitong, Huang Zhizhong. On constitutive equations of isotropic non-linear elastic medium [J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(1): 1–5. (in Chinese)
- [11] Gao H, Klein P. Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bonds [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, 46(2): 187–218.
- [12] Miller R, Ortiz M, Phillips R, Shenoy V, Tadmor E B. Quasicontinuum models of fracture and plasticity [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1998, 61(3/4): 427–444.
- [13] 韦立德, 杨春和, 徐卫亚. 考虑体积塑性应变的岩石损伤本构模型研究[J]. *工程力学*, 2006, 23(1): 139–143.  
Wei Lide, Yang Chunhe, Xu Weiya. A damage constitutive model for rock with plastic volume strain [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(1): 139–143. (in Chinese)
- [14] Deng S C, Liang N G, Lu H X. The elasto-damage theory of the components assembling model [J]. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2009, 52(1): 1–12.
- [15] Deng S C, Liu J X, Liang N G, Zhang J. Validation of component assembly model and extension to plasticity [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2007, 47(3): 244–259.
- [16] Zhang J, Liang N G, Deng S C, Liu J X, Liu X Y, Fu Q. Study of the damage-induced anisotropy of quasi-brittle materials using the component assembling model [J]. *International Journal of Damage Mechanics*, 2008, 17(3): 197–221.
- [17] Liu F, Fu Q, Chen C, Liang N G. An elasto-plastic damage constitutive theory based on pair functional potentials and slip mechanism [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2010, 23(6): 686–697.
- [18] Liu F, Fu Q, Chen C, Liang N G. An elasto-plastic damage constitutive theory and its prediction of evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants [J]. *International Journal of Plasticity*, 2011, 27(9): 1355–1383.
- [19] 付强, 刘芳, 陈岑, 梁乃刚. 有限变形下的后继屈服面演化规律研究 [J]. *工程力学*, 2011, 28(11): 23–30.  
Fu Qiang, Liu Fang, Chen Cen, Liang Naigang. A study on the evolution of subsequent yield surfaces with finite deformation [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(11): 23–30. (in Chinese)
- [20] 付强, 刘芳, 张晶, 梁乃刚. 一种基于物理机制的后继屈服面演化模型[J]. *力学学报*, 2010, 42(5): 880–888.  
Fu Qiang, Liu Fang, Zhang Jing, Liang Naigang. A physically motivated model for the evolution of subsequent yield surfaces [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(5): 880–888. (in Chinese)
- [21] Deng S C, Liu J X, Zhang J, Liang N G. Component assembling model and its application to quasi-brittle damage [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2006, 46(3): 232–242.
- [22] 陈岑, 刘芳, 付强, 洪友士. 双轴拉伸应力下后继屈服面的演化研究[J]. *航空学报*, 2012, 33(12): 2230–2239.  
Chen Cen, Liu Fang, Fu Qiang, Hong Youshi. Investigation of the evolution of subsequent yield surface under biaxial tension [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2012, 33(12): 2230–2239. (in Chinese)
- [23] Ericksen J L. The cauchy and born hypotheses for crystals in phase transformations and material instabilities in solids [M]. New York: Academic Press, 1984.