

Kármán涡街流场的定性分析研究*

武作兵 凌国灿

中国科学院力学研究所, 北京(邮政编码 100080)

摘要 本文在采用 Rankine 涡模型和冻结 Oseen 涡模型消除 Kármán 涡街流场的速度奇性后, 对 Kármán 涡街流场进行了拓扑结构分析。证明 Kármán 涡街流场的自由驻点表现为中心和鞍点。随着空间参数的变化, 流动结构可具有三种形式。

关键词 Kármán 涡街, 拓扑结构, 涡模型。

引 言

在圆柱绕流尾迹的发展过程中, 早期实验观测表明 Re 数在 $60 \sim 5000$ 范围内可以观察到规则的涡街排列。近期实验测量表明, 即使在高 Re 数 ($O(10^4)$) 下, 采用相平均方法仍可得到规则的涡街排列^[1,2]。特别是随着实验技术水平的提高, 人们对尾迹流场获得了新的认识。文献[3, 4]的实验指出在尾迹的下游发展过程中会出现 Kármán 涡街的重组现象。文献[5, 6]的实验指出在尾迹的发展中旋涡可演化为三维涡结构。而这些现象都起源于涡街流场, 所以为了研究其物理机制, 分析和建立理论模型^[7], 需要考察涡街流场的结构特征。而自从 Kármán & Rubach^[8]采用交错涡列模拟涡街流场以来, 对涡街流场结构的理论研究还很不充分。本文就 Kármán 涡街流场的拓扑结构特征进行定性分析研究。

一、Kármán 涡街流场的模拟

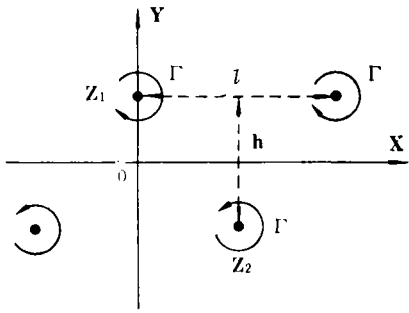
Kármán 涡街的传统理论模型是以一定规则排列的无粘集中涡列, 在涡心区存在速度奇性。为了进行分析, 首先必须消除该理论模型所引起的奇性, 以获得与实验测量近似相符的模拟。

若将坐标系固定于交错涡列中的某个 Kármán 涡上(如图 1), 则流场的复速度为

$$v_x - iv_y = -\frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z - z_1) + \frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z - z_2) + \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} \quad (1)$$

其中 $z_1 = (h/2)i$, $z_2 = l/2 - (h/2)i$ 。可见(1)式的右端首项在 $z = z_1$ 点存在奇异性。经 Laurent 级数展开, 可清楚地看到该涡列在 z_1 点的速度奇异性来自位于该点单个旋涡的

* 国家自然科学基金资助项目。



奇异性。为消除单个涡的奇异性,通常可引入涡核半径 r_0 , 并采用 Rankine 涡模型或冻结 Oseen 涡模型来实现^[9,11]。

用 Rankine 涡模型交错涡列的复速度, 当 $|z-z_1| \geq r_0$ 时, 仍由(1)式给出; 当 $|z-z_1| < r_0$ 时, 为

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} + \frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - z_2)$$

图1 Kármán 涡街流场

Fig. 1 Flow field of Kármán vortex street

$$+ \frac{i\Gamma}{2\pi r_0^2} \overline{(z-z_1)} + \frac{\pi\Gamma}{6l^2 i} (z-z_1) + O((z-z_1)^3) \quad (2)$$

用冻结 Oseen 涡模型交错涡列的复速度, 当 $|z-z_1| > 0$ 时, 为

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} + \frac{\Gamma}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - z_2) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} [1 - \exp(-1.256|z - z_1|^2/r_0^2)] + \frac{\pi\Gamma}{6l^2 i} (z - z_1) + O((z - z_1)^3) \quad (3)$$

当 $|z-z_1| \gg r_0$ 时, (3)式退化为(1)式; 当 $z \rightarrow z_1$ 时, $v_x - iv_y \rightarrow 0$ 。

图2给出了 Rankine 涡模型和冻结 Oseen 涡模型交错涡列的速度分布, 它们与文献[11, 12]的实验测量近似吻合, 后者比前者以在涡核附近的光滑过渡更为接近于真实涡街。

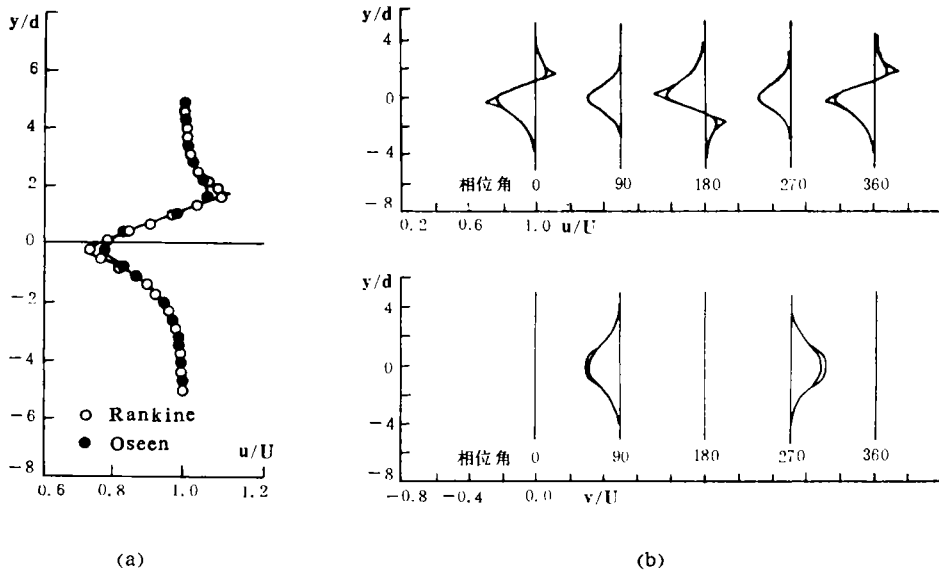


图2 Kármán 涡街流场的速度分布
Fig. 2 Velocity profile of Kármán vortex street flow field

二、Kármán 涡街流场拓扑结构的定性分析

由于在 $x-y$ 坐标系中 Kármán 涡街流场为定常场, 流线和迹线重合, 所以可以采用微分动力系统的定性理论来研究上述无奇性的 Kármán 涡街流场的拓扑结构^[13,14]。

1. 自由驻点附近的流态

对于远离涡心点的流场可用(1)式描写, 将其写成分量形式

$$\begin{cases} v_x = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} + \frac{\Gamma}{l} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{l} - \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l} \right)}{\left(\sin \frac{2\pi x}{l} \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{l} \right)^2 + \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{l} - \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l} \right)^2} \\ v_y = -\frac{\Gamma}{l} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{l}}{\left(\sin \frac{2\pi x}{l} \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{l} \right)^2 + \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{l} - \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l} \right)^2} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} v_x(x_0, y_0) = 0 \\ v_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

则在一个周期内的自由驻点为

$$A\left(0, -\frac{l}{2\pi} \ln s\right), B\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2\pi} \ln s\right)$$

其中

$$s = \left[\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} \sqrt{3 + \operatorname{ch}^2 \frac{2\pi h}{l}} + 1 + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l} \right] / \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l}$$

作平移变换 $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$ 代入(4)式, 并将其右端在 $(0, 0)$ 点展开为 Taylor 级数, 若截断高阶项, 得到常系数线性近似方程组

$$\begin{cases} \dot{\xi} = C\eta \\ \dot{\eta} = C\xi \end{cases} \quad (5)$$

其中 $C = -\frac{\pi\Gamma}{6l^2} \operatorname{th}^2 \frac{\pi h}{l} \cos \frac{2\pi x_0}{l} \operatorname{ch} \frac{2\pi y_0}{l} / \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}$ 。(5)式的系数矩阵的特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm C$, 则说明(5)式的不动点 $(0, 0)$ 为鞍点, 而轨线的斜率可以从(5)式求出为 $k = \pm 1$ 。所以对于 A 点, $C < 0$, 当 $\xi > 0$ 时, $d\eta/dt < 0$; 当 $\xi < 0$ 时, $d\eta/dt > 0$, 轨线如图 3 (a)。对于 B 点, $C > 0$, 当 $\xi > 0$ 时, $d\eta/dt > 0$; 当 $\xi < 0$ 时, $d\eta/dt < 0$, 轨线如图 3 (b)。而对于鞍点, 当附加高阶项后, 其性态仍等价于线性近似方程组(5)所决定的性态, 从而可知(4)式的自由驻点为不稳定的鞍点。

从图 2 可以看出 Rankine 涡模型和冻结 Oseen 涡模型的交错涡列流场在涡心附近近似等价, 下面仅采用 Rankine 涡模型的交错涡列流场来分析涡心点 $(0, h/2)$ 附近的性态, 类似的结果可以完全从冻结 Oseen 涡模型流场得出。将(2)式写成分量形式

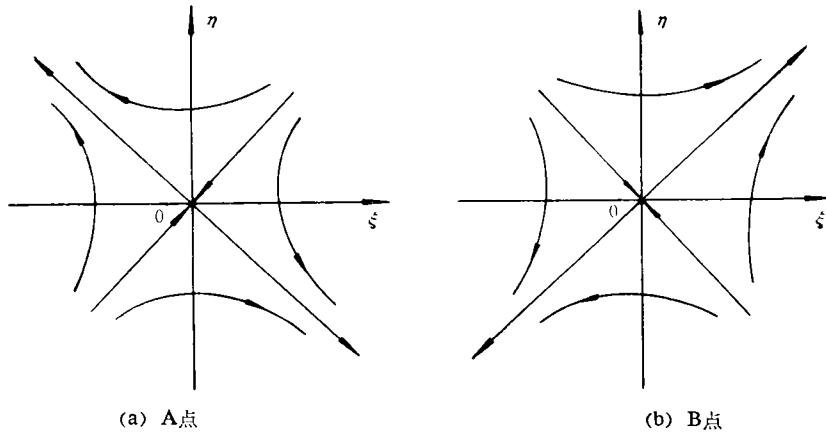


图3 涡辨区自由驻点附近流场的拓扑结构

Fig. 3 Topological structure of flowfield near the free stagnation point in braid region

$$\begin{cases} v_x = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} - \frac{\Gamma}{4l} \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{l} \left(y + \frac{h}{2} \right)}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \left(y + \frac{h}{2} \right) - \sin^2 \frac{\pi x}{l}} + \left(\frac{\pi \Gamma}{6l^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} \right) \left(y - \frac{h}{2} \right) \\ v_y = -\frac{\Gamma}{4l} \frac{\sin \frac{2\pi}{l} x}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \left(y + \frac{h}{2} \right) - \sin^2 \frac{\pi x}{l}} + \left(\frac{\pi \Gamma}{6l^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} \right) x \end{cases} \quad (6)$$

由(6)式可得自由驻点(0, h/2), 作 $\xi = x, \eta = y - h/2$ 变换, 代入(6)式并在(0, 0)点展开为 Taylor 级数

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_1 \eta - \frac{b}{2} \xi^2 + \frac{b}{2} \eta^2 + \dots \\ \dot{\eta} = a_2 \xi + b \xi \eta + \dots \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$a_{1,2} = \frac{\pi \Gamma}{6l^2} \left(1 - 3 \operatorname{sch}^2 \frac{\pi h}{l} \right) \pm \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2}, \quad b = \frac{\pi^2 \Gamma}{l^3} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} \operatorname{sch} \frac{2\pi h}{l}$$

截断高阶项, 得到常系数线性近似方程组, 其系数矩阵的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \pm i \frac{\pi \Gamma}{6l^2} \sqrt{\frac{9l^4}{\pi^4 r_0^2} - \left(3 \operatorname{sch}^2 \frac{\pi h}{l} - 1 \right)}$$

令 $\lambda_{1,2} = 0$, 则 $r_0 = \frac{l}{\pi} \left| \operatorname{sch}^2 \frac{\pi h}{l} - \frac{1}{3} \right|^{-1/2}$

当 $r_0 > \frac{l}{\pi} \left| \operatorname{sch}^2 \frac{\pi h}{l} - \frac{1}{3} \right|^{-1/2}$, 则 $\lambda_{1,2} \geq 0$, 可知非线性方程组(7)的不动点为鞍点, 从而可知(6)式的自由驻点为不稳定的鞍点。

当 $r_0 = \frac{l}{\pi} \left| \operatorname{sch}^2 \frac{\pi h}{l} - \frac{1}{3} \right|^{-1/2}$, 则 $\lambda_{1,2} = 0$, 可知点(0, 0)为(7)式的高阶不动点。

取极坐标 $\xi = r \cos \theta, \eta = r \sin \theta$, 则(7)式化为

$$\begin{cases} \dot{r} = R(\theta)r^2 + O(r^3) = -\frac{b}{2}\cos 3\theta r^2 + O(r^3) \\ \dot{\theta} = U(\theta)r + O(r^2) = \frac{b}{2}\sin 3\theta r + O(r^2) \end{cases}$$

可见 $U(\theta) = (b/2) \sin 3\theta$ 在 $[0, 2\pi]$ 上变号。令 $U(\theta^*) = 0$, 则 $\theta^* = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$, 即局部轨线只有六个方向趋于不动点(当 $t \rightarrow +\infty$, 或 $t \rightarrow -\infty$)。对于 $\theta^* = 0, 2\pi/3, 4\pi/3, R(\theta^*) < 0, U'(\theta^*) > 0$, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 轨线沿 $\theta = \theta^*$ 趋于不动点; 对于 $\theta^* = \pi/3, \pi, 5\pi/3, R(\theta^*) > 0, U'(\theta^*) < 0$, 则当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 轨线沿 $\theta = \theta^*$ 趋于不动点, 而以不动点为顶点, $\theta = \theta^*$ 为分角线的狭而短的扇形内的轨线如图 4。

当 $r_0 < \frac{l}{\pi} \left| \operatorname{sch}^2 \frac{\pi h}{l} - \frac{1}{3} \right|^{-1/2}$, 则 $\lambda_{1,2}$ 为共轭复数, 可知线性近似方程的不动点为中心点。

由连续性方程 $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$, 可知平面系统不存在焦点和结点, 仅可能存在中心和鞍点。因而由线性近似方程的中心点可知自由驻点 $(0, h/2)$ 为(6)式的中心点, 轨线如图 5。

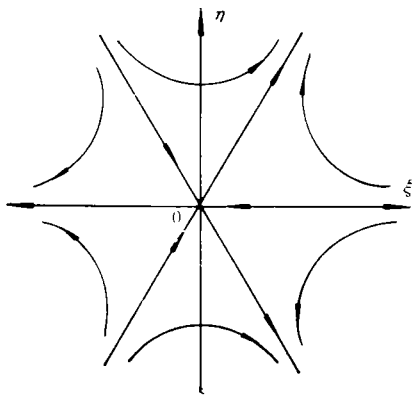


图 4 高阶鞍点

Fig. 4 High-order saddle point

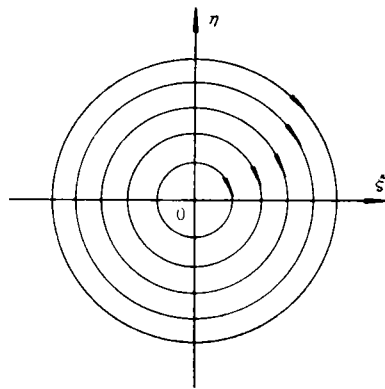


图 5 涡心的拓扑结构

Fig. 5 Topological structure near vortex center

从上述分析可知, 当 $r_0 \geq \frac{l}{\pi} \left| \operatorname{sch}^2 \frac{\pi h}{l} - \frac{1}{3} \right|^{-1/2}$ 时, 自由驻点 $(0, \frac{h}{2})$ 为鞍点或高阶鞍点, 显然它们不能代表旋涡, 所以对于这里所讨论的旋涡运动, 应有

$$r_0 < \frac{l}{\pi} \left| \operatorname{sch}^2 \frac{\pi h}{l} - \frac{1}{3} \right|^{-1/2}$$

而且实验测量所得的参数 l 、 h 、 r_0 满足上述关系式^[11,12]。因此, 涡心点 $(0, h/2)$ 表现为中心。

综上所述, Kármán 涡街流场自由驻点的拓扑结构具有中心和鞍点的特征, 涡心存在中心点, 涡辨区存在鞍点。文献[2]采用实验测试手段也显示出上述结果。

2. 全局流态

设 Kármán 涡街流场的流函数为 ψ , 由 $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, 从(4)式可积分得

$$\psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y - \frac{h}{2} \right) - \cos \frac{2\pi}{l} x}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y + \frac{h}{2} \right) + \cos \frac{2\pi}{l} x} + \frac{\Gamma y}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} + c \quad (8)$$

从上面分析可知,不同周期的上下侧鞍点可分别写为

$$\bar{A} \left(kl, -\frac{l}{2\pi} \ln s \right), \bar{B} \left(\frac{1}{2}(2k+1)l, \frac{1}{2\pi} \ln s \right)$$

其中 $k=0, \pm 1, \dots$ 。分别将 \bar{A} , \bar{B} 中的任意两点代入(8)式可得

$$\psi_{\bar{A}} - c = -(\psi_{\bar{B}} + c) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi h}{l} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \left(y_s + \frac{h}{2} \right)} + \frac{\Gamma y}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l}$$

这样,同侧鞍点处具有相同的 ψ 值,所以它们为同一流线上的点。而涡街外不存在自由驻点,所以根据流线的性质和流场的对称性,涡街外上述鞍点间的流线是唯一的。由于流场上、下具有反对称性,则 $c=0$, $\psi_{\bar{A}} = -\psi_{\bar{B}}$, 且 $\psi_{\bar{A}}$ 和 $\psi_{\bar{B}}$ 间必存在零流线。

对于涡街内,上、下侧鞍点仍存在两个特征流动方向(见图3),为了保证零流线的存在,它们的轨线依赖 h/l 的变化可存在三种情况:①自行封闭;②与对面邻近鞍点相连;③与同侧邻近鞍点相连。相应的零流线位置在 y 轴上的位置 y_0/l 为:① $y_0/l > y_0/l > h/(2l)$; ② $y_0/l = y_0/l$ (或 $y_0/l = y_0/l$); ③ $h/(2l) > y_0/l > y_0/l$, 其中 y_0 为上侧鞍点间流线与 y 轴的交点。由(8)式得

$$\psi(0, y_0) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \left(y_0 - \frac{h}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \left(y_0 + \frac{h}{2} \right)} \right| + \frac{\Gamma y_0}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} = 0 \quad (9)$$

将 $y_0/l = -(1/2\pi) \ln s$ 代入(9)式,采用牛顿下山法可解超越方程(9)的根为 $h/l =$

0.411。进一步可解出(9)式的根 y_0/l 与 h/l 的变化关系曲线如图6,从图上可以看出上述三种情况对应为:① $h/l < 0.411$, ② $h/l = 0.411$, ③ $h/l > 0.411$, 其流动结构如图7。

综上所述, Kármán 涡街流场的全局拓扑结构存在三种情况:①当 $h/l < 0.411$, 流场存在同宿轨道和异宿轨道,保持同侧鞍点相连;②当 $h/l > 0.411$, 流场仅存异宿轨道,保持同侧鞍点相连;③当 $h/l = 0.411$, 流场处于临界状态,存在异宿轨道,

除保持同侧鞍点相连外,还保持异侧鞍点相连,且该轨线为零流线。实验指出^[15], $h/l \approx 0.3$, 因此全局流态表现为图7(a)的结构。

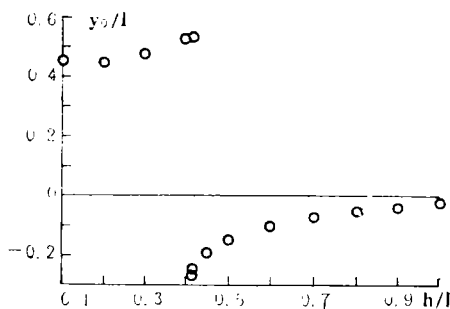


图6 y 轴上零流线位置随参数的变化曲线
Fig. 6 Changed curve of location of zero flow line at y coordinate

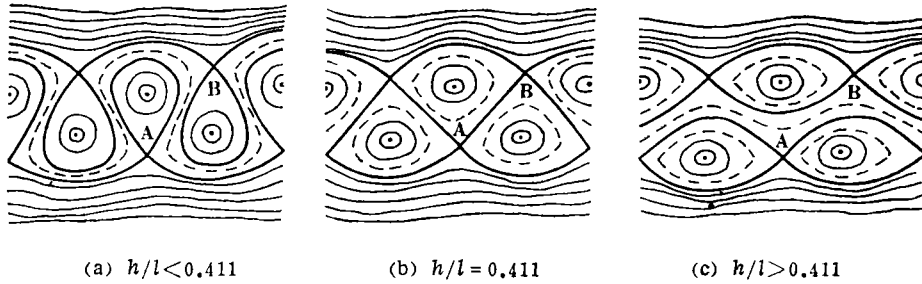
(a) $h/l < 0.411$ (b) $h/l = 0.411$ (c) $h/l > 0.411$

图7 Kármán 涡街流场的全局拓扑结构

Fig. 7 Global topological structure of Kármán vortex street flow field

三、结 论

分析表明, Kármán 涡街流场的拓扑结构具有中心和鞍点的组合。涡心区自由驻点表现为中心, 涡瓣区自由驻点表现为鞍点。鞍点之间存在同宿轨道或异宿轨道。根据空间参数 h/l 的变化, 全局流动结构可具有三种表现形式。

参 考 文 献

- 1 Kiya M, Matsumura M. Turbulent Structure in Intermediate Wake of a Circular Cylinder. *Bull. of JSMZ*, 1985, 23(245): 2617
- 2 Hussain A K M F, Hayakawa M. Evolution of Large-Scale Organized Structure in a Turbulent Plane Wake. *J. Fluid Mech.*, 1987, 180: 193
- 3 Taneda S. Downstream Development of the Wakes Behind Cylinder. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1959, 14: 843
- 4 Okude M. Rearrangement of the Kármán Vortex Street. *Trans. Jpn. Soc. Aero. Space Sci.*, 1981, 24: 95
- 5 Shirakashi M, Yamaguchi S, Mochimaru Y, Yamane R. Coherent Structure in the Turbulent Wake Behind a Circular Cylinder. *Fluid Dynamics Research*, 1988, 4:25
- 6 Williamson C H K. The Existence of Two Stages in the Transition to Three-Dimensionality of a Cylinder Wake. *Phys. Fluid*, 1988, 31(11): 3165
- 7 武作兵, 凌国灿. 圆柱尾迹涡的三维演化及结构特征. *力学学报*, 1993, 25(3)
- 8 von Kármán Th, Rubach H. Über den Mechanismus des Flüssigkeits und Luftwiderstandes. *Phys. Zs.*, 1912, 13(2): 49
- 9 童秉纲. 旋涡运动原理. 北京: 中国科技大学研究生院讲义, 1989.
- 10 凌国灿. 圆柱非定常运动初期旋涡运动. *力学学报*, 1983, (5)
- 11 Okude M, Matsui T. Correspondence of Velocity Fluctuations to Flow Patterns in a Kármán Vortex at Street Low Reynolds Number. *Trans. Jap. Soc. Aero. Space. Sci.*, 1987, 30(88):80
- 12 Okude M, Wada K, Matsui T. Structure of Vortex Street in the Near Wake of a Circular Cylinder at Low Reynolds Number. *J. Jpn. Soc. Fluid Mech.*, 1991, 10: 24
- 13 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社, 1987.
- 14 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Field. Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- 15 Birkhoff G, Zarantonello Z H. Jets, Wakes and Cavities. New York, Academic Press, 1959.

Theoretical Study on Topological Structure of Kármán Vortex Street Flow Field

Wu Zuobing Ling Guocan

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract In this paper, the singularity of velocity in Kármán vortex street is removed by using Rankine vortex model and frozen Oseen vortex model, and then the further of topological structure in Kármán vortex street are analysed theoretically. It is demonstrated that the free stagnation points in Kármán vortex street flow field consist of centers and saddle points, and that the global structure may be described by three types, depending on the variation of spacial parameters.

Key words Kármán vortex street, Topological structure, vortex model.