



环境力学专题·论文

明渠挟沙水流双层积分模式的双曲性分析

李季^①, 曹志先^{①②*}, PENDER Gareth^②, 刘青泉^③^① 武汉大学水资源与水电工程国家重点实验室, 武汉 430072;^② School of Energy, Geoscience, Infrastructure and Society, Heriot-Watt University, Edinburgh EH14 4AS, UK;^③ 中国科学院力学研究所, 流固耦合系统力学重点实验室, 北京 100190

*联系人, E-mail: zxcao@whu.edu.cn

收稿日期: 2015-07-01; 接受日期: 2015-07-30; 网络出版日期: 2015-09-01

国家自然科学基金资助项目(批准号: 11172217, 51279144, 11432015)

摘要 将明渠挟沙水流双层积分模式的控制方程系分别作为单一系统和两个降阶的双曲性系统, 分析、比较其特征值; 结合溃坝挟沙水流和水库挟沙水流等两类典型的强分层挟沙水流, 研究其双曲性. 分析表明, 尽管作为单一系统和两个降阶的系统时, 特征值在定量上有差异, 但在所涉及的参数域内, 双曲性仍然得以保持, 并不引发 Kelvin-Helmholtz 失稳现象. 作为应用实例, 对水库异重流进行数值模拟研究. 结果表明, 在所应用的参数范围内, 显著增加水库清水泄流量并未导致异重流失稳, 且可明显提高排沙比, 减少水库泥沙淤积.

关键词 双层积分模式, 双曲性分析, 特征值, Kelvin-Helmholtz 不稳定性

PACS: 47.55.Hd, 47.20.Ft, 47.11.Df, 92.40.Gc

doi: 10.1360/SSPMA2015-00177

明渠强分层挟沙水流, 如溃坝挟沙水流和水库挟沙水流, 在自然界广泛存在. 通常, 强分层挟沙水流包括上层清水层和下层挟沙层, 而且上、下两层之间、以及下层与可冲积河床之间存在强烈的相互作用. 双层积分模式在模拟分层挟沙水流方面具有巨大的优势, 相较于立面二维和全三维模式, 它极大地提高了计算效率, 而相对于单层积分模式, 它能够表征流体的分层结构. 然而以往的双层积分模式全部或者部分忽略了强分层挟沙水流的基本力学特征, 其简化的控制方程系不满足流体力学守恒定律, 因此并不适用强分层挟沙水流. 早期的模式假设两层流体互不交换而且下层挟沙层的密度保持不变^[1-9], 近来有学者在模型中考虑了上下两层间的交换, 但是依

然假设下层挟沙层的密度不变^[10-13]. 最近, Li 等人^[14]和 Cao 等人^[15]建立了普遍适用于动床条件下的分层挟沙水流的双层积分模式, 充分考虑了上、下两层之间、以及下层与可冲积河床之间的相互作用. 该双层模式的理论基础、参数封闭模式、数值计算方法以及与实验与野外观测数据的比较分析等, 如文献[14, 15]所描述.

双层积分模式的控制方程系应当作为单一系统求解, 但是层间相互作用项的存在导致控制方程系无法始终保持双曲性^[16], 一旦两层流体的速度差过大, 会导致控制方程失去双曲性并且引发 Kelvin-Helmholtz 失稳现象^[17,18], 即出现两层流体界面失稳. 在数值计算中, 该失稳现象导致界面扰动逐渐增长,

引用格式: 李季, 曹志先, Pender G, 等. 明渠挟沙水流双层积分模式的双曲性分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2015, 45: 104705

Li J, Cao Z X, Pender G, et al. Hyperbolicity analysis of a double layer-averaged model for open-channel sediment-laden flows (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2015, 45: 104705, doi: 10.1360/SSPMA2015-00177

造成数值计算的崩溃, 因此在选择数值格式和设置边界条件方面非常困难. 在实际应用中, 界面失稳现象导致两层流体间剧烈掺混, 耗散能量, 因此增加下游泄流是否会破坏已经在库内形成的异重流并且导致 Kelvin-Helmholtz 失稳现象仍然有待研究^[15]. 学者们提出了很多特殊的手段来解决此类问题, 如引入中间层^[19], 增加一定的剪切力^[20]或者人为地额外增加两个方程^[21], 但是当前的双层积分模式^[14,15]相比于以前的模式增加了控制方程, 即泥沙连续方程和河床变形方程, 因此如何将当前双层积分模式的控制方程系作为单一系统求解仍然有待研究. 鉴于当前研究现状, Li 等人^[14]提出, 将每层的控制方程整理成传统的双曲形式, 即将相对于惯性项和重力项可忽略的层间相互作用项置于源项, 然后各自分裂、但同时求解. 由两组降阶的双曲系统组成的控制方程系可以无条件保持双曲性. 采用此种数值解法求解的双层积分模式已经成功地模拟了溃坝水流和水库异重流^[14,15], 并且与实验及野外观测资料均吻合良好, 但是仍然需要分析该模式的双曲性. 本文将一维明渠挟沙水流双层积分模式的控制方程系分别作为单一系统和两个降阶的双曲性系统, 分析、比较其特征值; 结合溃坝挟沙水流和水库挟沙水流等两类典型的强分层挟沙水流, 研究其双曲性. 作为应用实例, 对水库异重流进行数值模拟研究, 以探讨适当提高下游水库泄流量是否会破坏异重流的稳定并导致 Kelvin-Helmholtz 失稳现象.

1 数学模型

1.1 控制方程

一维明渠挟沙水流双层积分模式的控制方程系包括针对上层清水层和下层挟沙层分别建立的质量和动量守恒方程, 以及泥沙连续方程和河床变形方程. 参照 Cao 等人^[15]的研究, 控制方程可以整理成如下的守恒形式:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \mathbf{R}_b + \mathbf{R}_f + \mathbf{R}_c, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_f + \mathbf{S}_c, \quad (2)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \eta \\ q_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ h_w u_w \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} h_w u_w \\ h_w u_w^2 + 0.5g(\eta^2 - 2\eta\eta_s) \end{bmatrix}, \quad (3a, 3b)$$

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\eta \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \end{bmatrix}, \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_w}{\rho_w} - E_w u_w \end{bmatrix}, \quad (3c, 3d)$$

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} -E_w + \frac{\partial \eta_s}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \eta \\ q_s \\ q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_s \\ h_s u_s \\ h_s c_s \end{bmatrix}, \quad (3e, 3f)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} h_s u_s \\ h_s u_s^2 + 0.5g(\eta_s^2 - 2\eta_s z_b) \\ h_s u_s c_s \end{bmatrix}, \quad (3g)$$

$$\mathbf{S}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\eta_s \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ E - D \end{bmatrix}, \mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} E_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3h, 3i, 3j)$$

$$N = \frac{\tau_w - \tau_b}{\rho_c} - \frac{\rho_w g}{\rho_c} h_s \frac{\partial h_w}{\partial x} - \frac{(\rho_0 - \rho_s)(E - D)u_s}{(1-p)\rho_c} + \frac{(\rho_s - \rho_w)c_s u_s E_w}{\rho_c} + \frac{\rho_w E_w u_w}{\rho_c} - \frac{(\rho_s - \rho_w)gh_s^2}{2\rho_c} \frac{\partial c_s}{\partial x}, \quad (3k)$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{E - D}{1-p}, \quad (3l)$$

其中 \mathbf{T} 和 \mathbf{U} 为守恒变量; \mathbf{E} 和 \mathbf{F} 为通量向量. 对于挟沙层, \mathbf{S}_b 代表河床底坡源项, \mathbf{S}_f 包括阻力项以及受到泥沙输移和清水交换影响的源项, \mathbf{S}_c 代表清水交换的源项; 对于清水层, \mathbf{R}_b 表征界面坡度源项, \mathbf{R}_f 包括界面阻力源项和其他受到清水交换影响的源项, \mathbf{R}_c 代表清水交换源项和界面高程的变化; q_w, q_s, q_c 为方程(1)和(2)的守恒变量; t 为时间, g 为重力加速度; x 为平面坐标; η 为水面高程; η_s 为清水层和挟沙层的界面高程; h_w 为清水层厚度; u_w 为清水层的深度平均速度; h_s 为挟沙层的厚度; u_s 为挟沙层的深度平均的速度; c_s 为挟沙层的深度平均的体积含沙量; z_b 为河床高程; p 为河床孔隙率; ρ_w, ρ_s 分别为水和泥沙的密度; $\rho_c = \rho_w(1-c_s) + \rho_s c_s$ 为挟沙层的水沙混合体的密度; $\rho_0 = \rho_w p + \rho_s(1-p)$ 为床沙饱和湿密度; E 和 D 分别为河床界面上的泥沙上扬和沉降上扬通量; τ_w 为清水层和挟沙层界面剪切阻力; τ_b 为河床界面剪切阻力; E_w 为清水层和挟沙层的交换通量.

1.2 封闭模式

应用曼宁公式计算两层流体界面阻力和床面阻力:

$$\tau_w = \rho_w g n_w^2 (u_w - u_s) abs(u_w - u_s) / h_w^{1/3}, \quad (4)$$

$$\tau_b = \rho_c g n_b^2 u_s^2 / h_s^{1/3}, \quad (5)$$

其中 n_w 为上层和下层界面上的曼宁糙率; n_b 为床面曼宁糙率.

两层之间的水量交换通量 E_w 按 Parker 等人^[22]提出的公式计算:

$$E_w = -e_w (u_s - u_w), \quad (6)$$

其中交换系数 e_w 通过 Richardson 数 $Ri = sgc_s h_s / (u_w - u_s)^2$ 和 $s = \rho_s / \rho_w - 1$ 计算:

$$e_w = \frac{0.00153}{0.0204 + Ri}. \quad (7)$$

通常, 水流和河床的泥沙交换包括两种机制, 即由湍流引起的泥沙上扬和重力引起的泥沙沉降. 泥沙上扬和沉降通量公式的选择取决于算例情况. 参照 Li 等人^[14]的研究, 对于溃坝水流引起的推移质输移, 泥沙上扬和沉降通量按如下公式计算:

$$E = \omega c_e (1 - c_e)^m, \quad D = \omega c_s (1 - c_s)^m, \quad (8)$$

其中 ω 为单颗粒泥沙在清水中的沉降速度, 采用 Zhang 和 Xie^[23]公式计算; $m = 4.45 R_p^{-0.1}$, $R_p = \omega d / \nu$ 为颗粒雷诺数; d 为中值粒径; ν 为清水运动黏性系数; c_e 为近底饱和含沙量, 采用修正梅耶-彼得公式计算:

$$c_e = q_b / h_s u_s, \quad q_b = \phi 8 \sqrt{sgd^3} (\theta - \theta_c)^{1.5}, \quad (9)$$

其中 q_b 为饱和状态下单宽推移质输沙率; ϕ 为修正系数; $\theta = u_*^2 / sgd$ 为 Shields 参数; u_* 为摩阻流速; θ_c 为泥沙启动的临界 Shields 参数.

对于水库异重流, 参照 Cao 等人^[15]的研究, 采用如下公式计算泥沙上扬和沉降通量:

$$E = \omega E_s, \quad D = \omega c_b, \quad (10)$$

其中 $c_b = r_b c_s$ 为局部近底体积含沙量; r_b 可以按 Parker 等人^[22]提出的公式计算,

$$r_b = 1 + 31.5 (u_* / \omega)^{-1.46}, \quad (11)$$

其中 E_s 为近底饱和体积含沙量. Parker 等人^[22]提出如下公式来计算:

$$E_s = \begin{cases} 0.3, & \psi \geq 13.2, \\ 3 \times 10^{-12} \psi^{10} (1 - 5\psi^{-1}), & 5.0 < \psi < 13.2, \\ 0, & \psi \leq 5.0, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\psi = \sqrt{u_*^2 \sqrt{sgd^3} / \nu}$.

2 双曲性分析

进行双曲性分析的基本方法是验证控制方程系的特征值是否全为实数. 由于本模式已经成功地模拟了溃坝水流^[14]和异重流实验算例^[15], 故利用本模式所得的水力要素计算将控制方程系作为单一系统的特征值是合理的.

很容易证明由方程(1)和(2)组成的两个降阶的双曲系统(RS)的特征值(w_+ , w_- , s_+ , s_- , λ_s)为

$$w_+ = u_w + \sqrt{gh_w}, \quad w_- = u_w - \sqrt{gh_w}, \quad (13)$$

$$s_+ = u_s + \sqrt{gh_s}, \quad s_- = u_s - \sqrt{gh_s}, \quad \lambda_s = u_s. \quad (14)$$

为了计算将双层积分模式的控制方程作为单一系统(SS)的特征值, 首先需要重新整理控制方程系, 将层间相互作用项和体积含沙量变化项(即方程(3k)右端的第二和最后一项)置于方程(3g)的左端, 控制方程可被写成如下守恒形式:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad (15)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} h_w \\ u_w \\ h_s \\ u_s \\ c_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_w & h_w & 0 & 0 & 0 \\ g & u_w & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_s & h_s & 0 \\ \beta g & 0 & g & u_s & 0.5 \mu g h_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_s \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -E_w \\ -\tau_w / \rho_w h_w - g \partial z_b / \partial x \\ E_w + (E - D) / (1 - p) \\ (\tau_w - \tau_b) / \rho_c h_s - g \partial z_b / \partial x - \rho_0 (E - D) u_s / \rho_c h_s (1 - p) + \rho_w E_w (u_w - u_s) / \rho_c h_s \\ (1 - p - c_s) (E - D) / h_s (1 - p) - c_s E_w / h_s \end{bmatrix},$$

其中 $\beta = \rho_w / \rho_c$, $\mu = (\rho_w - \rho_s)$. 5 个特征值 $\lambda_i (i=1, \dots, 5)$ 可以通过矩阵 \mathbf{A} 的特征方程 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ (\mathbf{I} 为单位矩阵) 计算, 得到特征多项式

$$(\lambda - u_s) [(\lambda - u_w)^2 - gh_w] \times [(\lambda - u_s)^2 - gh_s - \beta g^2 h_w h_s] = 0. \quad (16)$$

根据方程(16), 很容易计算 $\lambda_s = u_s$, 该特征根与泥沙连续方程相关. 其余 4 个特征根可根据 Lawrence^[24]提供的方法计算, 具体的推导过程见附录. 通常, 两个外特征根 λ_1, λ_2 始终为实数, 其余两个内特征根 λ_3, λ_4 可能为实数, 也可能为共轭复数, 非实数特征根的出现即标志系统失去双曲性, 进而可能引发 Kelvin-

Helmholtz 失稳现象.

本文分别将分析和比较通过不同的框架 SS 和 RS 所得的 5 个特征值. 不失一般性, 两个外特征值 λ_1, λ_2 与 w_+, w_- 相互比较, 两个内特征值 λ_3, λ_4 同 s_+, s_- 相互比较. λ_2 和 λ_3 都等于挟沙层的深度平均速度, 因此这两者相互比较. 为了更清晰的表征双曲性, 定义逻辑变量 Φ , 如果通过 SS 计算所得特征根皆为实数, 则 $\Phi=1$, 象征着双曲性得以保持, 如果两个内特征根为共轭复数, 则 $\Phi=-1$, 代表双曲性失去; 此外, 如果双层结构未形成或者瓦解, 即只有清水层或挟沙层, 则 $\Phi=0$.

3 检验算例

本文结合溃坝挟沙水流和水库挟沙水流等两类典型的强分层挟沙水流, 研究明渠挟沙水流双层积分模式的双曲性. 采用能够有效捕捉激波的控制方程各自离散、但同时求解^[15]. 本文采用显式格式, 为了满足计算稳定, 须满足柯朗稳定条件 (CFL 条件). 需要强调的是, 本文所研究的双层积分模式已经过实验和野外观测数据的验证^[14,15], 下文只给出典型算例的数值模拟结果, 便于对该模式双曲性分析的理解.

3.1 坝体渐进溃决洪水实验

Cao 等人^[26]开展了系列水槽实验研究坝体渐进溃决洪水. 该实验在玻璃水槽中进行, 水槽长 80 m, 宽 1.2 m, 高 0.8 m, 坡度 0.001. 本文模拟其中一组无初始溃口的实验 (F-Case 11). 上游来流流量为 $0.042 \text{ m}^3/\text{s}$. 组成坝体的泥沙粒径为 0.8 mm, 密度为 $2650 \text{ kg}/\text{m}^3$. 坝体高 0.4 m, 位于距入口 41 m 处. 初始时刻, 坝体的上下游的坡度分别为 1/2 和 1/3, 坝前和坝后水深分别为 0.054 和 0.048 m. 在入口处, 根据给定流量, 通过特征线法来求解水深和流速, 在下游, 由于有挡水堰的存在, 水流为急流, 采用传动边界, 即外部节点的数据大小和方向等于内部节点.

根据 Li 等人^[14]的数值模拟, 当计算参数为 $Cr=0.5, \Delta x=0.02 \text{ m}, n_b=0.012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}, n_w=0.006 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$, 采用公式(9)计算泥沙上扬和沉降通量且修正系数 $\phi=4.5$, 计算结果与试验观测的水位过程等符合良好. 图 1 为不同时刻水面, 界面和河床高程的模拟结果.

界面即上层清水层与下层挟沙层的界面. 由图 1 看出, 上下两层的界面没有出现明显的失稳现象. 图 2 比较了由 RS 和 SS 所计算的 5 个特征值. 由 SS 系统计算的 5 个特征值均为实数, 表明双曲性得以保持. 在整个过程中, λ_5 始终等于 λ_3 . 在 $t=425 \text{ s}$ 时, 当水流刚漫顶并开始侵蚀坝脚时, 双层结构还未充分发展, λ_1 和 w_+ 的绝对值最大且差别很小(图 2(a1)), 其他 3 组特征值的差别很显著(图 2(a2)-(a4)). 当 $t=600 \text{ s}$ 时, 水面线平稳, 挟沙层充分发展, 整个水体呈现了明显的双层结构, 4 组特征值的差别均很显著. 在上下游边界上, 由 SS 和 RS 分别计算的特征值的正负性是相同的, 显示出 RS 和 SS 这两种系统所采用的边界条件应当是一致的. 图 3 显示了全过程中全场的逻辑变量 Φ 的变化, 从图 3 中看出, 在双层结构存在的区域 Φ 始终等于 1, 表明在坝体渐进溃决洪水过程中, 双曲性得以保持.

3.2 水库异重流实验

Lee 和 Yu^[27]在台湾大学开展了一系列水库异重流的水槽实验. 水槽尺寸为 $20 \text{ m} \times 0.2 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$, 坡度为 0.02. 实验中所采用的泥沙密度为 $2650 \text{ kg}/\text{m}^3$, 颗粒粒径为 0.0068 mm. 本文模拟其中的一组算例 (Series B-PP4). 实验中首先通过释放清水形成水库, 然后释放浑水以形成水库异重流, 在整个实验过程中, 上游释放的浑水的单宽流量 ($q_{in}=q_0=85.2 \text{ cm}^2/\text{s}$) 和泥沙体积含沙量 ($c_{in}=c_0=0.002$) 保持不变, 下游泄流量等于入流量. 根据已知的流量条件, 通过特征线法确定上下游边界条件. 参照 Cao 等人^[15]的数值模拟, 当计算参数为 $Cr=0.5, \Delta x=0.025 \text{ m}, n_b=0.015 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}, n_w=0.005 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$, 采用公式(10)计算泥沙上扬和沉降通量, 计算结果与试验观测的异重流潜入点位置、深度及其传播速度等符合良好.

图 4 为异重流的形成和传播过程的模拟结果, 包括初始条件(图 4(a)), 侵入过程(图 4(b), (c))和侵入点稳定后异重流的传播过程(图 4(c), (d)). 在演变过程中, 界面没有出现明显的失稳现象. 图 5 比较了由 RS 和 SS 所计算的 5 个特征值. 由 SS 系统计算的 5 个特征均为实数, 表明双曲性得以保持. 初始时刻, 水槽充满了流动的清水, 因此只有两组与清水层相关的特征值存在且相等(即 λ_1 和 w_+, λ_2 和 w_-). 在 $t=25 \text{ s}$ 时, 浑水从上游释放, 但是还未向河床底部侵入形成异

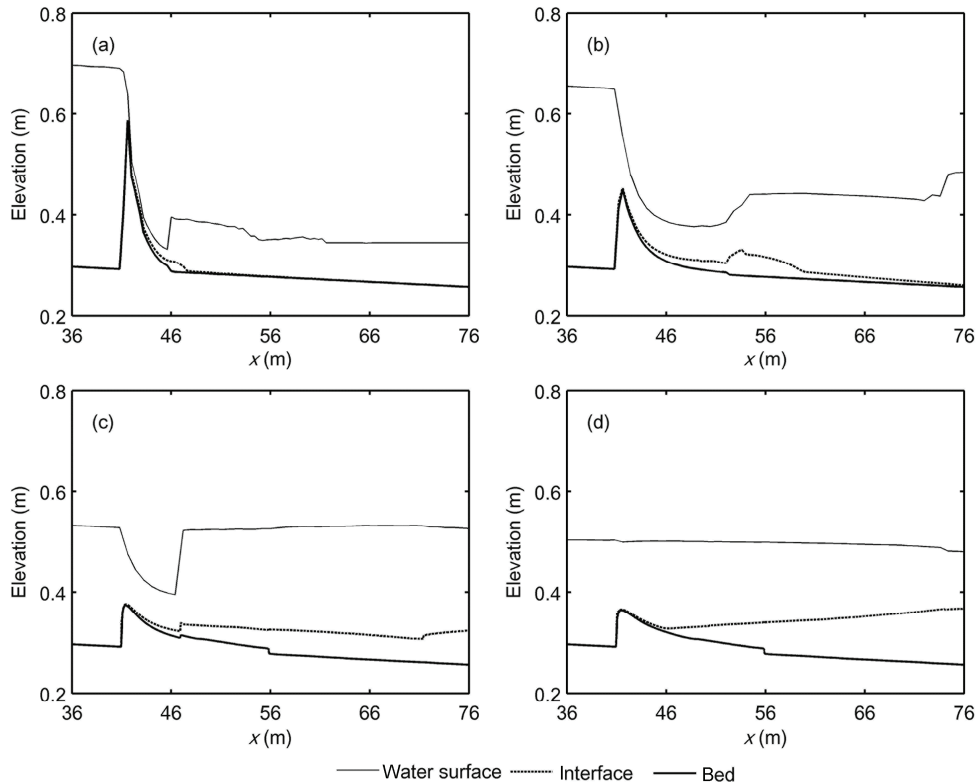


图 1 坝体渐进溃决洪水过程中水面、界面和河床高程. (a) $t=425$ s; (b) $t=450$ s; (c) $t=500$ s; (d) $t=600$ s
Figure 1 Water surface, interface and bed profiles for landslide dam failure. (a) $t=425$ s; (b) $t=450$ s; (c) $t=500$ s; (d) $t=600$ s.

重流. 在此阶段, 整个水体在 $x=3.68$ m 处被分割为上游的明渠挟沙水流和下游的清水. 在分割点的下游 ($x>3.68$ m), w_+ 和 w_- 分别等于 λ_1 和 λ_2 (图 5(b1), (b2)), 在分割点的上游 ($x<3.68$ m), s_+ 和 s_- 分别等于 λ_3 和 λ_4 (图 5(b3), (b4)). 当 $t>450$ s 时, 异重流形成, 双层结构充分发展, 层间相互作用项的影响显著, SS 和 RS 系统计算的特征值的差异显著(图 5(c1)–(c4)). 在上下游边界上, 由 SS 和 RS 计算的特征值的正负性相同, 显示 RS 和 SS 这两种系统所采用的边界条件是一致的. 图 6 显示了整个过程中全场的逻辑变量 ϕ 的变化, 从图 6 中看出 ϕ 始终为非负, 表明在水库异重流的演化过程中, 双曲性得以保持.

以上分析表明, 尽管作为单一系统和两个降阶的系统时, 特征值在定量上有差异, 但在所涉及的参数域内 ($Cr=0.5$, $n_b=0.015$ m^{-1/3} s, $n_w=0.005$ m^{-1/3} s), 双曲性仍然得以保持, 并不引发 Kelvin-Helmholtz 失稳现象.

4 下泄流量对库区异重流影响的数值实验

增加水库大坝泄流量是否会破坏已经形成的异重流并且导致 Kelvin-Helmholtz 失稳现象是实际工程中关注的一个重要问题, 仍有待研究^[15]. 本节以水库异重流的实验算例 Series B-PP4^[27]为基础, 设计了一系列数值实验以说明增加下游泄流量对于异重流的影响. 本节仍然采用 RS 系统求解控制方程, 数值计算参数与 3.2 节相同^[15], 假设在异重流侵入点稳定后, 下游泄流量显著增加, 具体的泄流条件见表 1. Lee 和 Yu^[27]的实验没有考虑异重流排沙, 而排沙比对于水库的泥沙优化管理有着重要的指导意义. 在本节数值实验中, 假设在下游边界处设置一个高度为 4 cm, 最大泄流量为 42.55 cm²/s 的排沙底孔. 当异重流传播到下游边界处时, 排沙底孔被打开以进行排沙. 对于下游边界条件, 在异重流抵达之前, 清水层的厚度和流速将根据已知的下游泄流量通过特征线法确定,

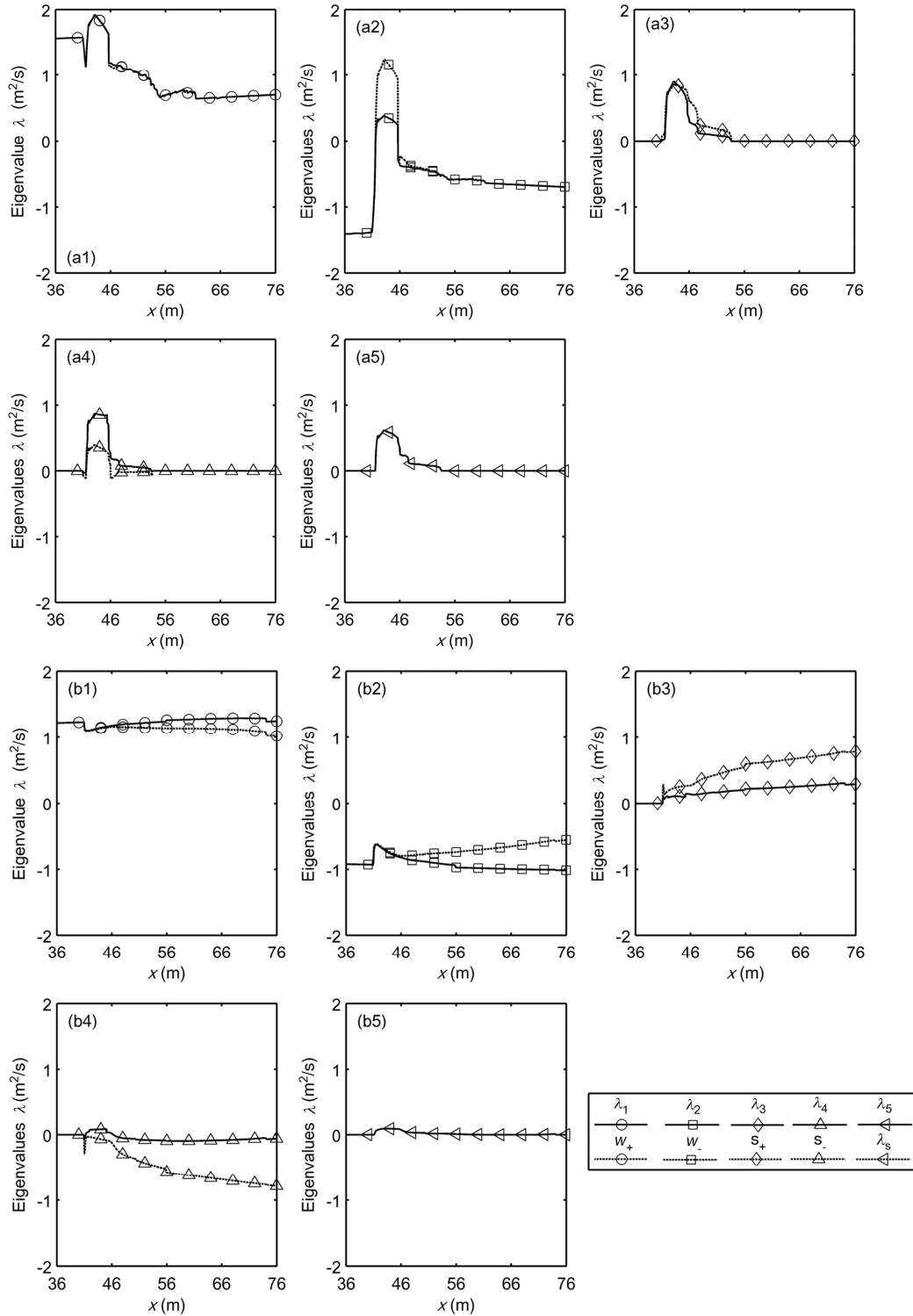


图 2 坝体渐进溃决洪水过程中分别由 SS 和 RS 计算的特征根的对比, (a1)–(a5) $t=425$ s; (b1)–(b5) $t=600$ s
 Figure 2 Comparisons of the eigenvalues computed by SS and RS for landslide dam failure. (a1)–(a5) $t=425$ s; (b1)–(b5) $t=600$ s.

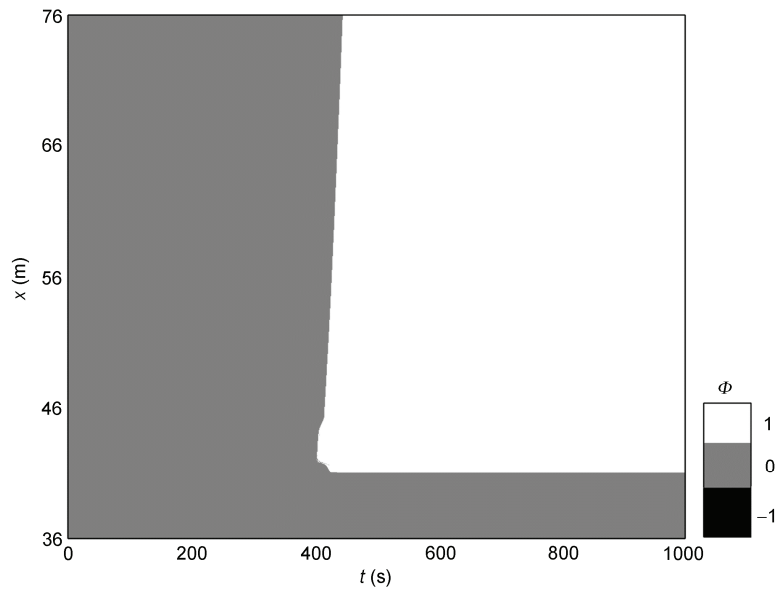


图3 坝体渐进溃决洪水过程中逻辑变量 Φ 的变化
 Figure 3 Distributions of Φ during the whole process for landslide dam failure.

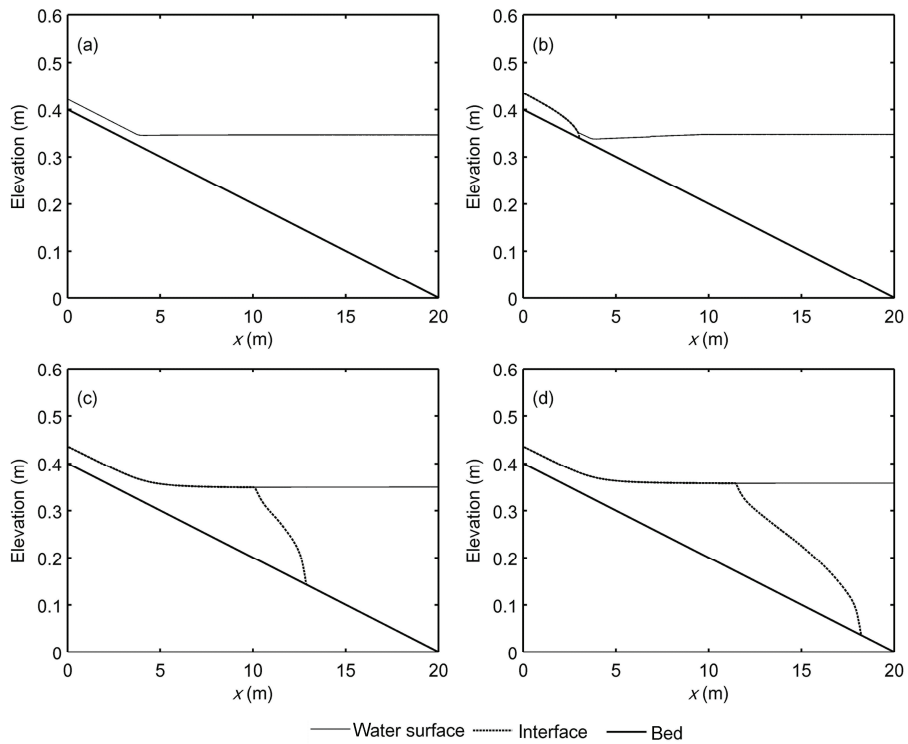


图4 异重流的形成和传播过程. (a) $t=0$ s; (b) $t=25$ s; (c) $t=250$ s; (d) $t=450$ s
 Figure 4 Formation and propagation of the turbidity current. (a) $t=0$ s; (b) $t=25$ s; (c) $t=250$ s; (d) $t=450$ s.

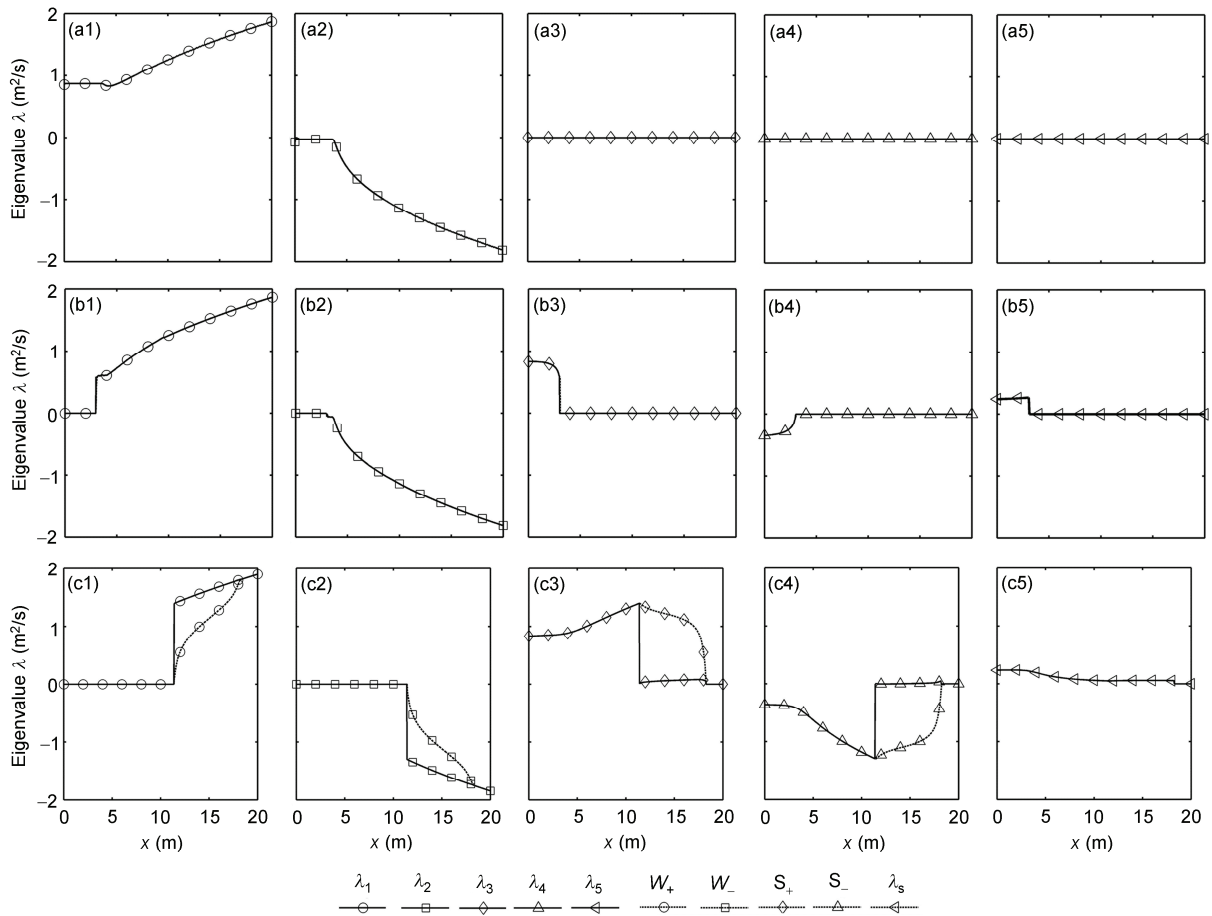


图 5 异重流演化过程中分别由 SS 和 RS 计算的特征根的对比, (a1)–(a5) $t=0$ s; (b1)–(b5) $t=25$ s; (c1)–(c5) $t=450$ s

Figure 5 Comparisons of the eigenvalues by SS and RS during the evolution process of turbidity current. (a1)–(a5) $t=0$ s; (b1)–(b5) $t=25$ s; (c1)–(c5) $t=450$ s.

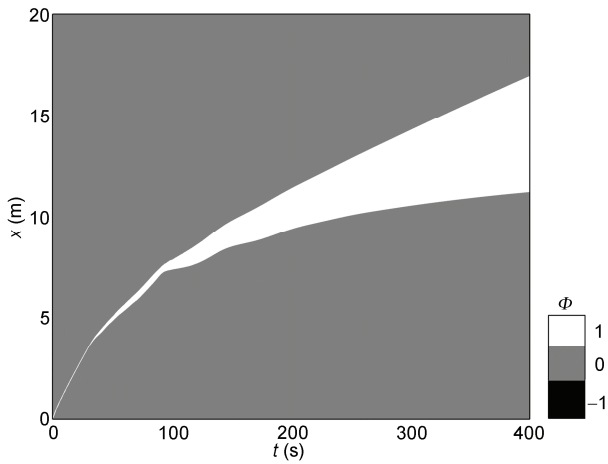


图 6 异重流演化过程中逻辑变量 ϕ 的变化

Figure 6 Distributions of ϕ during the whole process for the turbidity current.

异重流层不需要边界条件. 在异重流抵达后, 如果异重流的上界面超过排沙底孔, 则异重流的流量等于排沙底孔的最大泄流量, 否则, 异重流的流量将通过异重流的厚度与排沙底孔的高度按比例确定. 如果异重流处于缓流状态, 则异重流的厚度和流速根据已知的泄流量(q_s)通过特征线法确定. 同时, 清水层的厚度和速度根据剩余流量($=q_{out}-q_s$)通过特征线法确定.

图 7 显示了算例 EC 2 中异重流的演化过程, 表现了从异重流(图 7(a))到明渠挟沙水流(图 7(d))的转变过程. 在 $t=250$ s 时, 异重流侵入点不再下移, 趋于稳定, 此时下游泄流量加倍(表 1). 由于下游泄流量的增加以及后续的异重流排沙, 异重流侵入点失稳并开始向下游移动(图 7(b), (c)), 同时水面高程显著下降. 此后, 清水被完全排出, 双层结构瓦解, 整个

水体转变为明渠挟沙水流. 从图 7 可以看出, 界面失稳现象没有发生. 图 8 为算例 EC 2-5 中逻辑变量 Φ

的变化, 从图 8 中可以看出, 逻辑变量 Φ 始终为非负, 表明在下游泄流量适当增加的情况下, 异重流不会

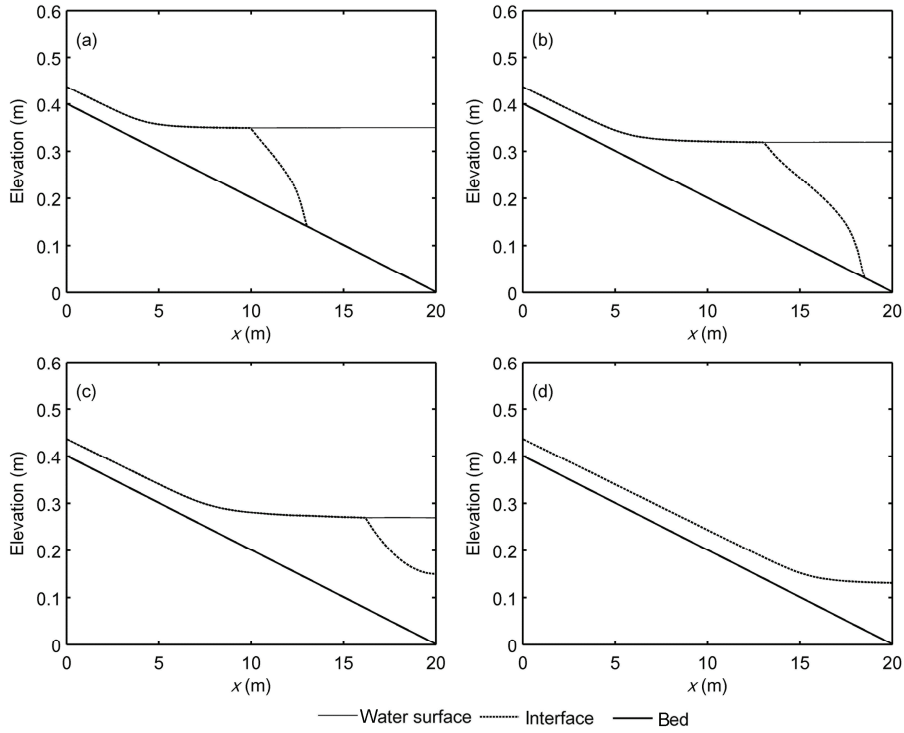


图 7 算例 EC 2 中异重流的演化过程. (a) $t=250$ s; (b) $t=350$ s; (c) $t=450$ s; (d) $t=900$ s

Figure 7 Turbidity current evolution for EC 2. (a) $t=250$ s; (b) $t=350$ s; (c) $t=450$ s; (d) $t=900$ s.

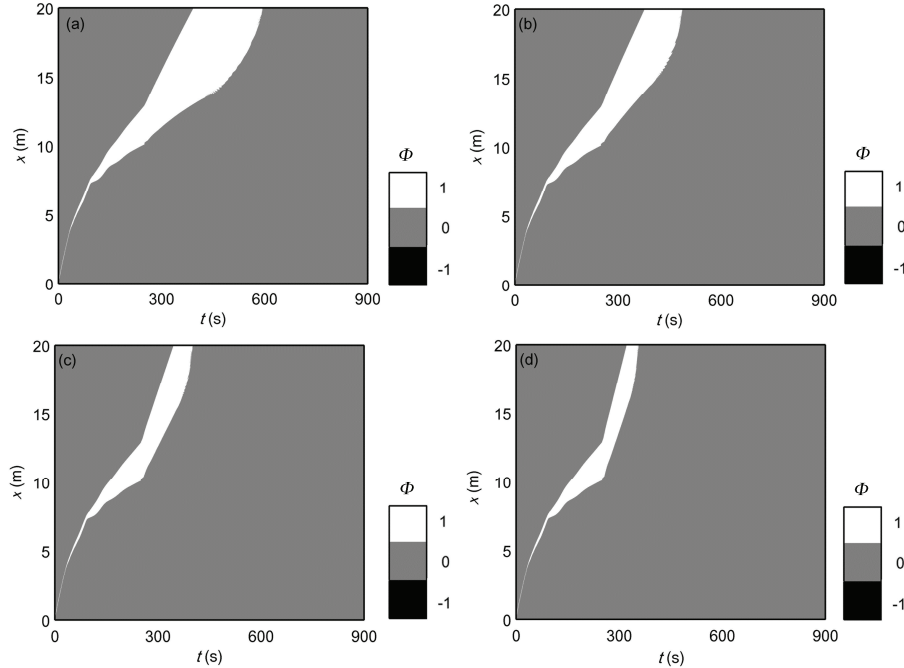


图 8 算例 EC 2-5 中逻辑变量 Φ 的变化. (a) 算例 EC 2; (b) 算例 EC 3; (c) 算例 EC 4; (d) 算例 EC 5

Figure 8 Hyperbolicity analysis by distributions of Φ for EC 2-5. (a) Case EC 2; (b) case EC 3; (c) case EC 4; (d) case EC 5.

表1 数值实验的入流和泄流条件

Table 1 Summary of the inflow and outflow conditions for numerical tests

算例编号	入流量 q_{in} (cm ² /s)	体积含沙量 c_{in}	泄流量 q_{out} (cm ² /s)
EC 1	q_0	c_0	q_0
EC 2	q_0	c_0	$1.5 \times q_0$
EC 3	q_0	c_0	$2.0 \times q_0$
EC 4	q_0	c_0	$2.5 \times q_0$
EC 5	q_0	c_0	$3.0 \times q_0$

被破坏而出现失稳.

异重流的排沙比对于优化水库泥沙管理至关重要, 排沙比等于通过下游排沙底孔排出的泥沙体积 V_{so} 与上游释放的泥沙体积 V_{si} 之比. V_{si} 和 V_{so} 根据如下公式计算:

$$V_{si}(t) = \int (h_s u_s c_s)_{inlet} dt, V_{so}(t) = \int (h_s u_s c_s)_{outlet} dt. \quad (17)$$

图9为算例EC 1-5的排沙比. 当异重流抵达下游后, 异重流通过排沙底孔排沙, 异重流的排沙比随着时间不断增加. 需要指出的是, 在实验后期, 异重流已经转变为明渠挟沙水流后, 排沙比实际上指的是明渠挟沙水流的排沙比. 算例EC 1-5的最终排沙比分别为46.68%, 51.74%, 57.76%, 63.03%和70.4%, 可以看出异重流的最终排沙比随着下游泄流量增加而增加. 因为下游泄流有利于异重流的传播, 因而更多的泥沙被排出, 从而有利于增加排沙比.

上述数值模拟结果表明, 对表1所列计算实例, 在所应用的参数范围内 ($Cr=0.5$, $n_b=0.015 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$, $n_w=0.005 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$), 显著增加水库清水泄流量(最大为上游来流量的3倍, 见表1)并不导致已经在库内形成的异重流失稳, 且可明显提高排沙比, 减少水库泥沙淤积, 这为水库的泥沙优化管理提供了理论依据. 尽管如此, 本文的数值计算试验只考虑了水库下泄流

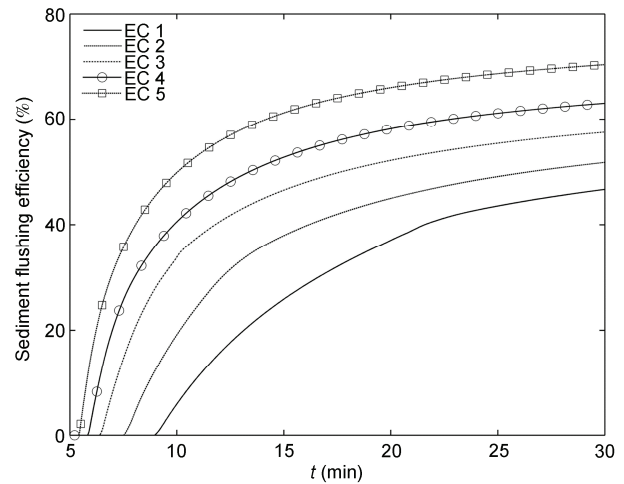


图9 算例EC 1-5的排沙比

Figure 9 Sediment flushing efficiencies for EC 1-5.

量的影响, 而异重流失稳可能受到其他因素的影响, 如上游来水来沙过程、含沙量较高时非牛顿流体特性等, 这些需要将来进一步深入研究.

5 结论

本文结合溃坝挟沙水流和水库挟沙水流等两类典型的强分层挟沙水流, 通过分析和比较将明渠挟沙水流双层积分模式的控制方程系分别作为单一系统和两个降阶的双曲系统时的特征值以研究其双曲性. 研究表明, 作为单一系统和两个降阶的系统时, 特征值在定量上有差异, 但在所涉及的参数域内, 双曲性仍然得以保持, 并不引发 Kelvin-Helmholtz 失稳现象. 通过对水库异重流进行数值模拟研究表明, 在所涉及的计算实例参数范围内, 显著增加水库清水泄流量并未导致异重流失稳, 且可明显提高排沙比, 减少水库泥沙淤积.

参考文献

- Rottman J W, Simpson J E. Gravity currents produced by instantaneous releases of a heavy fluid in a rectangular channel. *J Fluid Mech*, 1983, 135: 95-110
- Castro M J, Macías J, Parés C. A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term: Application to a two-layer 1-D shallow water system. *ESAIM-Math Model Numer Anal*, 2001, 35: 107-127
- Hallworth M, Huppert H E, Ungarish M. On inwardly propagating high-Reynolds-number axisymmetric gravity currents. *J Fluid Mech*, 2003, 494: 255-274
- Castro M J, Garcia-Rodriguez J A, González-Vida J M, et al. Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with

- irregular geometry. *J Comput Phys*, 2004, 195: 202–235
- 5 Ungarish M, Zemach T. On the slumping of high Reynolds number gravity currents in two-dimensional and axisymmetric configurations. *Eur J Mech B-Fluid*, 2005, 24: 71–79
 - 6 Chen S C, Peng S H, Capart H. Two-layer shallow water computation of mud flow intrusions into quiescent water. *J Hydraul Res*, 2007, 45: 13–25
 - 7 La Rocca M, Adduce C, Sciortino G, et al. A two-layer shallow-water model for 3D gravity currents. *J Hydraul Res*, 2012, 50: 208–217
 - 8 Izem N, Benkhaldoun F, Sahmim S, et al. A new composite scheme for two-layer shallow water flows with shocks. *J Appl Math Comput*, 2014, 44: 467–489
 - 9 Lee W K, Borthwick A G, Taylor P H. Tracer dynamics in two-layer density-stratified estuarine flow. *Proc Inst Civil Eng-Eng Comput Mech*, 2014, 161: 41–49
 - 10 Spinewine B. Two-layer flow behaviour and the effects of granular dilatancy in dam-break induced sheet-flow. Dissertation for Doctoral Degree. Belgium: Université Catholique de Louvain, 2005
 - 11 Savary C, Zech Y. Boundary conditions in a two-layer geomorphological model: Application to a hydraulic jump over a mobile bed. *J Hydraul Res*, 2007, 45: 316–332
 - 12 Zech Y, Soares-Frazão S, Spinewine B, et al. Inertia effects in bed-load transport models. *Canadian J Civil Eng*, 2009, 36: 1587–1597
 - 13 Audusse E, Bristeau M O, Perthame B, et al. A multilayer Saint-Venant system with mass exchanges for shallow water flows: Derivation and numerical validation. *ESAIM-Math Model Numer Anal*, 2011, 45: 169–200
 - 14 Li J, Cao Z X, Pender G, et al. A double layer-averaged model for dam-break flows over mobile bed. *J Hydraul Res*, 2013, 51: 518–534
 - 15 Cao Z X, Li J, Pender G, et al. Whole-process modelling of reservoir turbidity currents by a double layer-averaged model. *J Hydraul Eng*, 2015, 141: 04014069
 - 16 Bouchut F, Morales de Luna T. An entropy-satisfying scheme for two-layer shallow water equations with uncoupled treatment. *ESAIM-Math Model Numer Anal*, 2008, 42: 683–698
 - 17 Armi L. The hydraulics of two flowing layers with different densities. *J Fluid Mech*, 1986, 163: 27–58
 - 18 Kim J, LeVeque R J. Two-layer shallow water system and its applications. In: Tadmor E, Liu J G, Tzavaras A E, eds. *Proceedings of the 13rd International Conference on Hyperbolic Problems*. Maryland: AMS Press, Providence RI, 2008. 737–743
 - 19 Castro M J, Frings J, Noelle S, et al. On the hyperbolicity of two- and three-layer shallow water equations. In: Jiang S, Li T, eds. *Proceedings of the 13rd International Conference on Hyperbolic Problems*, Beijing: Higher Education Press, 2010. 657–664
 - 20 Castro M J, Fernández-Nieto E D, González-Vida J M, et al. Numerical treatment of the loss of hyperbolicity of the two-layer shallow-water system. *J Sci Comput*, 2011, 48: 16–40
 - 21 Abgrall R, Karni S. Two-layer shallow water systems: A relaxation approach. *SIAM J Sci Comput*, 2009, 31: 1603–1627
 - 22 Parker G, Fukushima Y, Pantin H M. Self-accelerating turbidity currents. *J Fluid Mech*, 1986, 171: 145–181
 - 23 Zhang R J, Xie J H. *Sedimentation Research in China: Systematic Selections*. Beijing: China Water Power Press, 1993
 - 24 Lawrence G A. On the hydraulics of Boussinesq and non-Boussinesq two-layer flows. *J Fluid Mech*, 1990, 215: 457–480
 - 25 Toro E F. *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. Chichester: John Wiley & Sons, 2001
 - 26 Cao Z X, Yue Z Y, Pender G. Landslide dam failure and flood hydraulics. Part I: Experimental investigation. *Nat Hazards*, 2011, 59: 1003–1019
 - 27 Lee H Y, Yu W S. Experimental study of reservoir turbidity current. *J Hydraul Eng*, 1997, 123: 520–528

附录

根据第 2 节“双曲性分析”，特征方程多项式为

$$(\lambda - u_s)[((\lambda - u_w)^2 - gh_w)((\lambda - u_w)^2 - gh_w) - \beta g^2 h_w h_s] = 0. \quad (\text{a1})$$

从方程(A1)很容易求解得到与泥沙连续方程相关的特征根 $\lambda_5 = u_s$ 。其他 4 个特征根的精确解可以通

过如下步骤取得。

首先定义如下参数： $H = h_s + h_w$ ； $\alpha = 4h_s h_w / H$ ；

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(u_s + u_w); \quad \hat{u} = (u_w h_s + u_s h_w) / H; \quad \varepsilon = \frac{\rho_c - \rho_w}{\rho_c};$$

$$F_w = \frac{u_w}{\sqrt{\varepsilon g h_w}}; \quad F_s = \frac{u_s}{\sqrt{\varepsilon g h_s}}; \quad G^2 = F_w^2 + F_s^2 - \varepsilon F_w^2 F_s^2;$$

$$F_{\Delta}^2 = \frac{(u_w - u_s)^2}{\varepsilon g H}.$$

根据以上定义, 特征方程可以改写为

$$\sum_{m=0}^4 a_m \lambda^m = 0, \quad (\text{a2})$$

其中 $a_0 = u_w^2 u_s^2 - g h_w u_s^2 - g h_s u_w^2 + \varepsilon g^2 h_w h_s = \varepsilon g^2 h_w h_s (1 - G^2)$; $a_1 = -4u_w u_s \bar{u} + 2gH\hat{u}$; $a_2 = 4\bar{u}^2 + 2u_w u_s - gH$; $a_3 = -4\bar{u}$; $a_4 = 1$.

对变量 λ 进行替换以达到对方程(A2)简化的目的, 令 $\lambda = y + \bar{u}$ 则可以得到

$$y^4 + dy^2 + ey + f = 0, \quad (\text{a3})$$

其中 $d = \frac{1}{2}gH(2 + \varepsilon F_{\Delta}^2)$; $e = 2gH(\hat{u} - \bar{u})$; $f = \left(\frac{1}{4}gH\right)^2 [4\varepsilon(\alpha - F_{\Delta}^2) + \varepsilon^2 F_{\Delta}^4]$.

简化后的方程的 4 个根为 $y_{1,2} = \xi z_1^{1/2} \pm (z_2^{1/2} + z_3^{1/2})$, $y_{3,4} = -\xi z_1^{1/2} \pm (z_2^{1/2} - z_3^{1/2})$, 因此 4 个特征根的表达式为

$$\lambda_{1,2} = \bar{u} + \xi z_1^{1/2} \pm (z_3^{1/2} + z_2^{1/2}), \quad (\text{a4a})$$

$$\lambda_{3,4} = \bar{u} - \xi z_1^{1/2} \pm (z_3^{1/2} - z_2^{1/2}), \quad (\text{a4b})$$

其中 $\xi = \text{sgn}(u_s - u_w)$, 而 z_1, z_2, z_3 为以下三次方程的根:

$$z^3 + rz^2 + sz + t = 0, \quad (\text{a5})$$

其中 $r = -\left(\frac{1}{4}gH\right)(2 + \varepsilon F_{\Delta}^2)$, $s = \left(\frac{1}{4}gH\right)^2 [1 + \varepsilon(2F_{\Delta}^2 - \alpha)]$, $t = -\varepsilon\left(\frac{1}{4}gH\right)^3(1 - \alpha)F_{\Delta}^2$.

以上三次方程的根可以通过经典的 Tartaglia 方法求得, 该方法的判别式如下:

$$D_z = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 + \left(\frac{1}{2}q\right)^2, \quad (\text{a6})$$

其中 $p = \frac{1}{3}(3s - r^2)$, $q = \frac{1}{27}(2r^3 - 9rs + 27t)$.

如果 $D_z \leq 0$, 则 z_1, z_2 和 z_3 为实数, 则所有特征根为实数.

如果 $D_z > 0$, z_1 为实数, 但是 z_2 和 z_3 为共轭复数. 因此 $(z_3^{1/2} + z_2^{1/2})$ 仍然为实数, 故特征根 $\lambda_{1,2}$ 为实数. 相反, $(z_3^{1/2} - z_2^{1/2})$ 为纯虚数, 导致 $\lambda_{3,4}$ 为共轭复数.

Hyperbolicity analysis of a double layer-averaged model for open-channel sediment-laden flows

LI Ji¹, CAO ZhiXian^{1,2*}, PENDER Gareth² & LIU QingQuan³

¹ State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

² School of Energy, Geoscience, Infrastructure and Society, Heriot-Watt University, Edinburgh EH14 4AS, UK;

³ Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

Recently we developed a physically enhanced double layer-averaged model for open-channel sediment-laden flow, which properly incorporates inter-layer interactions, sediment transport and morphological evolution. Yet it is hard to solve the whole set of governing equations of the two layers as a single system, the governing equations for each layer are cast into a non-homogeneous hyperbolic system, whilst the inter-layer interactions are represented as source terms as they are generally negligible when compared to inertia and gravitation. The two reduced-order hyperbolic systems of the governing equations for the two layers are solved separately and simultaneously. The performance of the model has been demonstrated for series of observed datasets. However, it remains to be revealed if the hyperbolicity is preserved. The present study analyzes and compares the eigenvalues of the governing equations when cast into a single system and two reduced-order hyperbolic systems respectively. As applied to typical stratified sediment-laden flows concerning dam-break floods over erodible sediment beds and reservoir turbidity currents, the model can preserve hyperbolicity and thus avoid Kelvin-Helmholtz instability although appreciable discrepancies of the eigenvalues of single system and two reduced-order hyperbolic systems are discernible. Computational tests for reservoir turbidity currents reveal that an excessive clear-outflow would keep the turbidity current from being spoiled, and also is conducive to improve sediment flushing efficiency and mitigate reservoir sedimentation.

double layer-averaged model, hyperbolicity analysis, eigenvalues, Kelvin-Helmholtz instability

PACS: 47.55.Hd, 47.20.Ft, 47.11.Df, 92.40.Gc

doi: 10.1360/SSPMA2015-00177