

http://bhxb.buaa.edu.cn jbuua@buaa.edu.cn

DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2014.0663

基于 EMT 采用 FEM 研究含裂纹介质中弹性波传播机制

刘宁¹, 李敏^{*1}, 陈伟民²

(1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191; 2. 中国科学院 力学研究所, 北京 100190)

摘 要: 了解和掌握弹性波在含有裂纹介质中的传播规律是开发利用页岩气等非常规油气资源中的关键科学问题. 本文基于数值模拟的优点, 采用商用有限元软件 Nastran 模拟弹性波在含裂纹介质中的激发及传播方式, 分析了弹性波在该介质中裂纹微结构(密度和纵横比)对弹性波传播动力学特性的依赖程度. 结果表明: 有限元方法(FEM)可以用于该问题的研究; Hudson 等效介质理论(EMT)不适用泊松比近 0.5 的材料; 裂纹密度、纵横比的增大会减小纵波(P波)波速值, 以及衰减位移时域响应的首波振幅, 且裂纹密度对于该材料的各向异性的影响要远大于纵横比的作用.

关键词: 有限元方法(FEM); Hudson 理论; 频率; 裂纹数密度; 纵横比

中图分类号: O347.4⁺¹

文献标识码: A **文章编号:** 1001-5965(2015)09-1686-07

随着国民经济的不断增长, 我国对能源需求量和进口量日益增大, 安全有效地开发国内能源资源是目前亟待解决的问题. 在国民经济和社会发展“十二五”规划中也曾明确提出了要“推进页岩气等非常规油气资源开发利用”. 充分了解页岩层结构、动力学特性等, 将有助于该类能源的勘探和开采. 在理论研究中, 通常将该地质结构简化为含有微结构的等效弹性体^[1]. 早在 1950 年, Mackenzie^[2] 就采用自相关方法研究了含微小球状缺陷固体的弹性参数. 随后, Eshelby^[3] 和 Bristow^[4] 分别研究了椭圆缺陷及微小裂纹对于弹性参数的影响. 1965 年, Walsh^[5] 最先将该问题引入到岩土力学领域. 1980 年, Hudson^[6] 提出了较为完善的含有裂缝的岩石理论模型, 建立了等效弹性参数与裂缝密度、夹杂层厚度之间的表达式, 并随后讨论了这些参数对于纵波(P波)波速的影响^[7-8]. 时至今日,

该模型仍广泛地用于研究含微裂纹孔隙介质^[9].

与此同时, 科学技术的进步使得更多的研究手段用于探索该问题. 其中, 有限元方法(Finite Element Method, FEM)具有适用于工程中较为复杂的地质形态、易于边界处理的特点; 能够给出弹性波的基本运动学、动力学信息^[9], 有助于深入地研究模型的内在力学特性及其在岩石中的传播机制. FEM 的基本思想最早可以追溯到 1943 年^[10]. 1960 年, Clough 第一次提出了“有限元法”的概念. 随后, FEM 开始用于动力学分析. 1978 年, Aoki 等^[11] 就采用 FEM 分析了含有单裂纹结构的动力学问题. 1986 年, Taylor 等^[12] 采用 FEM 研究了含微裂纹脆性岩石的断裂行为. 1998 年, Ma 等^[13] 采用显式有限元分析程序 Autodyn 模拟了爆炸载荷激发下岩石中的冲击波传播问题. 2001 年, Garboczi 和 Berryman^[14] 采用 FEM 讨论

收稿日期: 2014-10-24; 录用日期: 2015-01-16; 网络出版时间: 2015-04-02 08:52

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20150402.0852.001.html

基金项目: 国家自然科学基金(11232012, 11372320)

作者简介: 刘宁(1988—), 女, 辽宁丹东人, 博士研究生, nicolaliu@buaa.edu.cn

* 通讯作者: 李敏(1968—), 男, 教授, 湖北天门人, jimin@buaa.edu.cn, 主要研究方向为结构动力学.

引用格式: 刘宁, 李敏, 陈伟民. 基于 EMT 采用 FEM 研究含裂纹介质中弹性波传播机制[J]. 北京航空航天大学学报, 2015, 41(9): 1686-1692. Liu N, Li M, Chen W M. Wave propagation in cracked elastic media based on EMT using FEM[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2015, 41(9): 1686-1692 (in Chinese).

了含有夹杂材料的等效弹性参数. 2006 年, Grechka 及 Kachanov^[15] 采用三维 FEM 分析了含小间距交叉排布的裂纹对于各向同性岩石的等效弹性参数的影响. 2013 年, Gaede 等^[16] 采用三维 FEM 计算了各向异性弹性岩石基体中, 任意方向的孔洞缺陷周围的应力集中问题.

目前, 关于岩石的 FEM 多侧重于静力问题的研究. 然而在实际工程测量中, 主要采用地震勘探技术, 该方法是利用人工激发地震波, 通过拾取测点地震波记录来推断地质形态. 因而, 有必要采用动力学 FEM 建立有效岩石模型. 本文根据 Hudson 理论, 将岩石简化为含有定向周期均匀分布裂纹的线弹性体, 采用 FEM 构建三维模型, 商用 FE 软件 Nastran 求解弹性动力学方程, 可得到各结点的位移、速度、加速度, 以及各单元的应力随时间分布, 进而得到弹性波在岩石中完整的传播过程; 与 Hudson 理论解的对比验证了 FEM 模型的有效性, 并定量地讨论了 Hudson 理论的适用范围; 基于本文的 FEM 模型, 分析了弹性波在裂纹介质中的频散效应, 裂纹微结构对弹性波传播动力学特性的影响; 通过研究含裂纹介质中等效弹性常数的变化规律, 讨论了传播介质特性的反演问题.

1 基本方程

1.1 Hudson 裂纹介质理论

Hudson 在 20 世纪 80 年代就对含有裂纹结构的弹性模型做了很好的研究总结^[9]. 在该理论中, Hudson 将岩石假设为含有平行定向均匀分布的圆币形裂纹; 微结构的尺寸远小于入射波长, 即可以使得弹性波在裂纹附近发生衍射绕过缺陷、裂纹位置; 裂纹在弹性体中占有很小的比率.

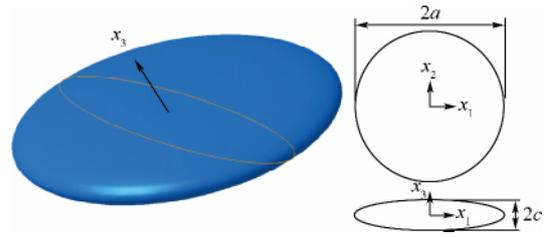
基于文献[9]模型, Hudson 应用平均位移场理论, 提出了裂纹介质的等效弹性模型^[6]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad C_{ijkl} = C_{ijkl}^0 + C_{ijkl}^1 + C_{ijkl}^2 + o(\varepsilon) \quad (1)$$

式中: σ_{ij} 和 ε_{kl} 分别为应力、应变张量分量; C_{ijkl} 为弹性模量, 对于三维问题, $i, j, k, l = 1, 2, 3$; ε 为裂纹密度; $o(\varepsilon)$ 为高阶扰动小量. 忽略高阶小量, 二阶近似为

$$C = C^0 + C^1 + C^2 \quad (2)$$

式中: C 为四阶张量; C^0 为无裂纹介质的弹性模量; C^1 为每个裂纹分别独立作用产生的修正项; C^2 为由两裂纹间耦合作用产生的修正项. 这里假设介质中所有裂纹法向相同, 沿 x_3 轴方向分布, 单位矢量为 $[0 \ 0 \ 1]^T$, 裂纹模型如图 1 所示.



a —裂纹的平均半径; $2c$ —裂纹厚度;
 x_1, x_2 和 x_3 —空间内 3 个正主轴.

图 1 Hudson 裂纹模型

Fig. 1 Hudson's crack model

基体为各向同性线弹性材料, 裂纹均匀分布, 其等效弹性模量为

$$\begin{cases} C_{ijkl}^0 = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ C_{ijpq}^1 = -\varepsilon C_{k3ip}^0 C_{l3jq}^0 U_{kl}(0) / \mu \\ C_{ijpq}^2 = -C_{vrjq}^1 C_{iqln}^1 \chi_{lmpr} / \mu \end{cases} \quad (3)$$

式中:

$$\begin{cases} \chi_{lmpr} = \frac{\delta_{lp} \delta_{mr} (4 + \tau^2) - \delta_{lm} \delta_{pr} (1 - \tau^2)}{15} \\ \tau^2 = \mu / (\lambda + 2\mu) = (v_s / v_p)^2 \\ v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho} \\ v_s = \sqrt{\mu / \rho} \\ \mu = E / (2 + 2\nu) \\ \lambda = \nu E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)] \end{cases} \quad (4)$$

其中: ρ 为岩石密度; v_p 和 v_s 分别为纵波、横波波速; λ 和 μ 为 Lamé 常数; ν 为泊松比; E 为弹性模量.

对于法向为 x_3 轴的干裂纹, 则有:

$$\begin{cases} U_{11} = U_{22} = 16(\lambda + 2\mu) / [3(3\lambda + 4\mu)] \\ U_{33} = 4(\lambda + 2\mu) / (3\lambda + 3\mu) \\ U_{kl} = 0 \quad k \neq l \end{cases} \quad (5)$$

采用 Voigt 拉直公式^[17], 将 C 转化为二阶张量, 即

$$C_{IJ} = C_{ijkl} \quad (6)$$

式中:

$$\begin{matrix} ij(kl) & 11 & 22 & 33 & 23 & 32 & 13 & 31 & 12 & 21 \\ I(J) & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & & \end{matrix} \quad (7)$$

则广义 Hooke 定律^[17] 可以写为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

将式(3)代入式(8)中,可以看出由于共向均匀排列裂纹的存在,岩石通常不再是各向同性材料,在地震勘探中一般用 Thomsen 参数描述材料的各向异性^[18]:

$$\begin{cases} \alpha = (C_{11} - C_{33})^2 / (2C_{33}) \\ \gamma = (C_{66} - C_{44})^2 / (2C_{44}) \\ \delta = \frac{(C_{13} + C_{14})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})} \end{cases} \quad (9)$$

其大小反映各向异性程度.将弹性模量代入,得到一阶修正结果为

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{8\varepsilon(-1 + 2\nu)}{16\varepsilon(1 - \nu)^2 + 6\nu - 3} \\ \gamma_1 = \frac{-8\varepsilon(\nu - 1)}{16\varepsilon\nu - 16\varepsilon - 3\nu + 6} \\ \delta_1 = \frac{16(2\nu - 1)\varepsilon(\nu^2 - \nu + 1)}{h_1 \cdot \varepsilon - 6\nu^2 + 15\nu - 6} \\ h_1 = 32\nu^4 - 96\nu^3 + 160\nu^2 - 144\nu + 48 \end{cases} \quad (10)$$

同理可得到二阶修正弹性模量的 Thomsen 参数.

1.2 FEM 动力学方程

波在介质中传播是动力学研究的重要领域,主要研究短暂作用于介质边界或内部的载荷所引起的位移、速度变化在介质中向周围传播、散射规律,在建筑结构抗震设计、人工地震勘探、无损探伤等领域中都有广泛应用.运动方程^[19]为

$$M\ddot{a}_t + c\dot{a}_t + Ka_t = Q_t \quad (11)$$

这里采用中心差分方法,有

$$\begin{cases} \ddot{a}_0 = M^{-1}(Q_0 - c\dot{a}_0 - Ka_0) \\ a_{-\Delta t} = a_0 - \Delta t\dot{a}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{a}_0 \\ \ddot{a}_t = \frac{1}{\Delta t^2}(a_{t-\Delta t} - 2a_t + a_{t+\Delta t}) \\ \dot{a}_t = \frac{1}{2\Delta t}(a_{t+\Delta t} - a_{t-\Delta t}) \end{cases} \quad (12)$$

式中: M 、 c 和 K 分别为质量、阻尼和刚度矩阵; Q_t 、 a_t 、 \dot{a}_t 和 \ddot{a}_t 分别为 t 时刻结点载荷、位移、速度和加速度向量; a_0 、 \dot{a}_0 、 \ddot{a}_0 和 $a_{-\Delta t}$ 分别为初始位移、速度、加速度向量和 $t = -\Delta t$ 时刻位移向量; $a_{t-\Delta t}$ 和 $a_{t+\Delta t}$ 分别为 $t = t - \Delta t$ 和 $t = t + \Delta t$ 时刻位移向量.中心差分为条件稳定算法,时间步长 Δt 需要满足一定的条件,选择最小单元的最小边长,记为 L ,近似估计^[19]:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} \quad \Delta t_{cr} \approx \frac{L}{v_p} \quad (13)$$

式中: Δt_{cr} 为临界时间步长.

2 数值结果与讨论

2.1 Hudson 理论波速

岩石基体选择为各向同性线弹性材料,其泊松比 ν 的范围为

$$-1 < \nu < 0.5 \quad (14)$$

在式(14)范围内,由式(9)可知,对于一阶和二阶修正弹性模量张量都只有 $\varepsilon = 0$ 时,才能表征为各向同性材料.

对于正交异性材料,其弹性模量在实验室中通常采用测量波在介质中的 P 波、S 波波速计算得到:

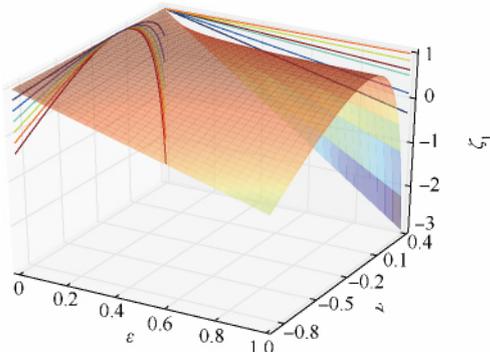
$$\begin{cases} C_{33} = \rho v_p^2(0) \\ C_{11} = \rho v_p^2(\pi/2) \\ C_{55} = \rho v_{SH}^2(\pi/2) \\ C_{66} = \rho v_{SV}^2(\pi/2) \\ C_{13} = \left[\frac{1}{4}(4\rho v_p^2(\pi/4) - C_{11} - C_{33} - 2C_{44})^2 - \frac{1}{4}(C_{11} - C_{33})^2 \right]^{\frac{1}{2}} - C_{44} \end{cases} \quad (15)$$

式中: v_{SV} 为横波波速竖直分量; v_{SH} 为横波波速水平分量.

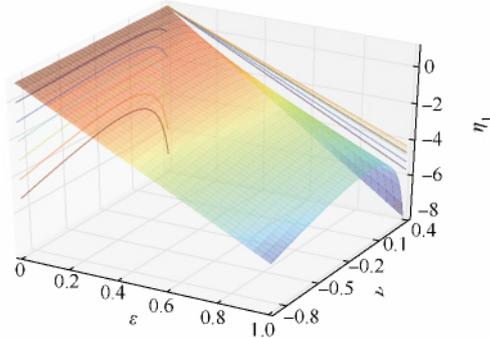
定义两个无量纲数 ζ 和 η ,分别用来表征含裂纹的 C_{11} 与无裂纹 C_{11}^0 和 C_{33} 与无裂纹 C_{33}^0 的差异,表达形式为

$$\begin{cases} \zeta = \frac{v_p^2(\pi/2)}{v_p^2(0)} \\ \eta = \frac{v_p^2(0)}{v_p^2} \end{cases} \quad (16)$$

图2和图3分别为 Hudson 裂纹介质一阶等效弹性模量 (ζ_1 与 η_1) 和二阶修正等效弹性模量与无裂纹基体的比值 (ζ_2 与 η_2) 关于 ε 与 ν 的变化曲面,曲线为投影面的等值线.从图2和图3中可以看出 ν 的影响要大于裂纹密度 ε 的作用,且相对于 C_{11} 来说, C_{33} 的变化趋势更为显著;在图2中随着 ε 变化,比值出现负值,这显然是与实际情况相违背的,而图3会出现比值显著大于1的情形,波速远大于无裂纹基体,即裂纹密度的增大反而使得岩石刚度远大于无裂纹情形,这一点也是与真实情况不符的.综上,Hudson 裂纹介质理论不仅建立在低裂纹密度的基础上,实际上,对无裂纹基体 ν 也有一定要求,只有基体 ν 在某一范围内时,该理论才成立,尤其当 ν 接近 0.5 时,Hudson 理论显然不再适用.



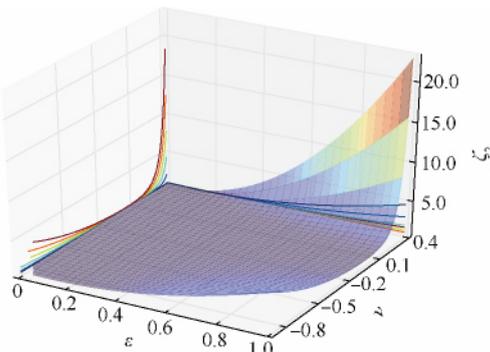
(a) ζ_1 关于 ϵ 与 ν



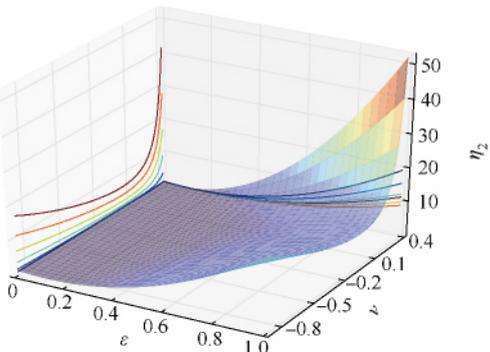
(b) η_1 关于 ϵ 与 ν

图2 ζ, η 关于 ϵ 与 ν 的一阶修正

Fig. 2 First-order correction of ζ, η with respect to ϵ and ν



(a) ζ_2 关于 ϵ 与 ν



(b) η_2 关于 ϵ 与 ν

图3 ζ, η 关于 ϵ 与 ν 的二阶修正

Fig. 3 Second-order correction of ζ, η with respect to ϵ and ν

2.2 算例分析

本文计算模型材料为岩石,无裂纹岩石近似

为各向同性线弹性材料,弹性参数^[9]及相应的理论波速分别为

$$\begin{cases} E = 33.56 \text{ GPa} \\ \nu = 0.33 \\ v_p = 4399.70 \text{ m/s} \\ v_s = 2200.02 \text{ m/s} \end{cases} \quad (17)$$

有效研究区域尺寸选为 $100 \text{ m} \times 100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$, 时间步长 Δt 选为 $50 \mu\text{s}$, 为满足式(13), 最小网格尺寸 L 应大于 0.22 m .

2.2.1 频率影响

弹性模量的测量分为静力法和动力学方法. 用(准)静力加载法得到静弹性模量; 根据弹性波在岩石中的传播速度测得的则是动弹性模量, 其值与入射频率有关. 虽然理想弹性问题与频率无关, 然而模型的大小会限制拾取结果的准确程度, 因而在激励选择方面有必要考虑频率的影响.

图4为不同频率下得到的 v_p 相对于理论值(见式(17))的误差. 从图4中可以看出, 该模型尺寸下, 当 $f \geq 200 \text{ Hz}$ 时 v_p 不再随频率增大, 此时得到的弹性模量略大于其静弹性参数, 且 $f = 100 \text{ Hz}$ 时的值更接近理论结果.

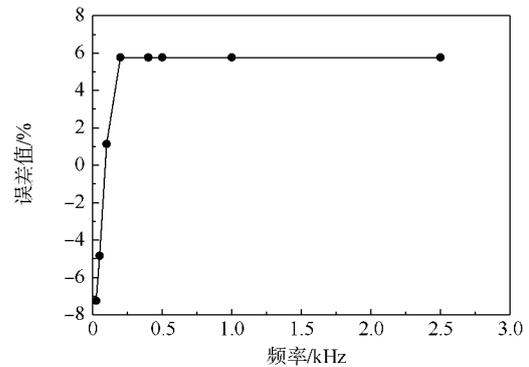


图4 误差值随频率变化

Fig. 4 Variation of error with respect to frequency

基于 Hudson 等效介质理论, 计算模型裂纹周期排布, 近似均匀分布, 入射波需满足长波假设, 即入射波长 λ_{in} 满足:

$$\begin{cases} a \ll \lambda_{in} \\ c \ll \lambda_{in} \\ \lambda_{in} = \frac{v_p}{f_n} > 44 \text{ m} \end{cases} \quad (18)$$

式中: f_n 为模型固有频率. 裂纹尺寸平均半径 a 可以选为 2 m , 当材料整体尺寸远大于材料小尺寸特征参数时, 可不计小尺寸效应影响^[20], 模型可等比缩放.

2.2.2 裂纹密度影响

三维 FEM 模型中, 裂纹周期近似均匀分布且

裂纹法向为 x_3 方向 x_1x_2 平面内,波速 $v_p(\pi/2)$ 在各方向近似相同. 在 x_1Ox_2 平面内,在侧边中点处沿 x_1 方向激励产生弹性波,中线处每隔相等距离设置测点,进而得到平均波速值. 图5为采用 FEM 得到的 $v_p(\pi/2)$ 与一阶、二阶 Hudson 理论值的对比结果. 在图5中,当裂纹密度 $\varepsilon \leq 0.117$ 时,3种方法得到的结果相近,速度误差不大于5%;当 $\varepsilon > 0.117$ 时,Hudson 二阶修正结果呈上升趋势,与经验结果不符;在该周期均匀裂纹模型条件下,采用 FEM 得到的结果与 Hudson 一阶修正结果更相近;而之前,曾新吾等^[9]采用边界元方法(Boundary Element Method, BEM) 得出了 $v_p(0)$ 的值与 Hudson 理论的二阶近似结果吻合更好的结论. 裂纹密度 $\varepsilon > 0.19$ 时,Hudson 裂纹介质理论与 BEM 分析结果不再吻合. 当数值模拟结果与 Hudson 理论公式不再相符时,是否还能将岩石视为等效弹性体,是值得讨论的.

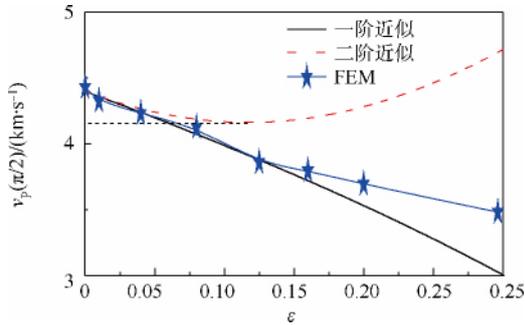


图5 $v_p(\pi/2)$ 随裂纹密度 ε 变化

Fig. 5 Variation of $v_p(\pi/2)$ with respect to ε

图6为 $\varepsilon = 0.125$ 时 x_1Ox_2 平面内的,在不同时刻,各单元结点沿 x_1 方向位移 u_{x1} 的色谱图. 从该图中可以清楚地看到 P 波的传播过程,波前近似为半球状,说明在各方向的 $v_p(\pi/2)$ 近似相同,即弹性模量 C_{11} 和 C_{22} 相同,在该裂纹密度条件下,周期拓扑结构仍可近似为均匀排布,且等效介质理论仍可成立.

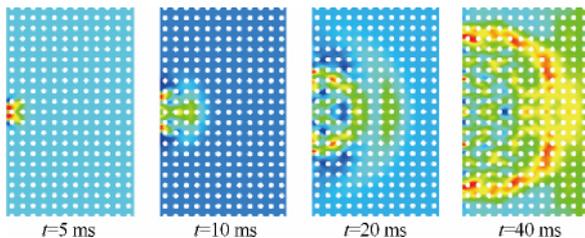


图6 $\varepsilon = 0.125$ 在 5, 10, 20 和 40 ms 时刻的 u_{x1}

Fig. 6 u_{x1} of $\varepsilon = 0.125$ at $t = 5, 10, 20$ and 40 ms

图7为 $\varepsilon = 0.3$ 时 u_{x1} 的色谱图,从 $t = 20$ ms 时刻的图谱可以看到,波前不再呈现出半球状,说明该周期拓扑、裂纹密度下的计算模型,不再适用等

效介质理论. 对于该拓扑结构下 $\varepsilon > 0.3$ 的 FEM 模型,由于孔隙过多,弹性波在传播的过程中,在基体内不断地散射,造成能量的损耗,在距离激励点不远处就没有观测数据产生,即没有位移产生.

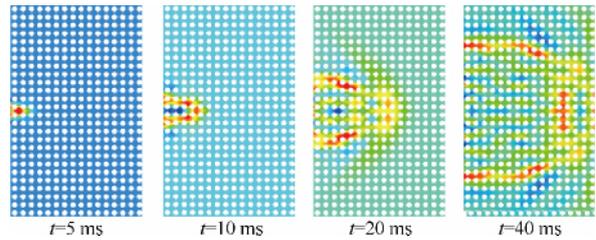


图7 $\varepsilon = 0.3$ 在 5, 10, 20, 40 ms 时刻 u_{x1}

Fig. 7 u_{x1} of $\varepsilon = 0.3$ at $t = 5, 10, 20, 40$ ms

2.2.3 纵横比影响

在 FEM 研究中,于 x_1Ox_3 平面内,在侧边中点处沿 x_3 方向激励产生弹性波,采用相同方法布置测点. 模型裂纹密度 $\varepsilon = 0.04$,裂纹平均半径 $a = 2$ m. 图8为 $\kappa = 0.5$ 时 u_{x3} 的色谱图,其中:图8(a)和图8(b)分别为 $\kappa = 0.5^{10}$, $\kappa = 0.5$ 在 x_1Ox_3 平面内的,不同时刻下,各结点沿 x_3 方向位移 u_{x3} 的色谱图. 由于波长远大于微结构尺度,且裂纹比例较小,波前仍呈现出半球状,说明在该模型条件下,各方向的 v_p 值仍相同,即 $C_{11} \approx C_{33}$,与图6和图7对比,说明裂纹密度 ε 对于该材料的各向异性的影响要远大于纵横比 κ 的作用.

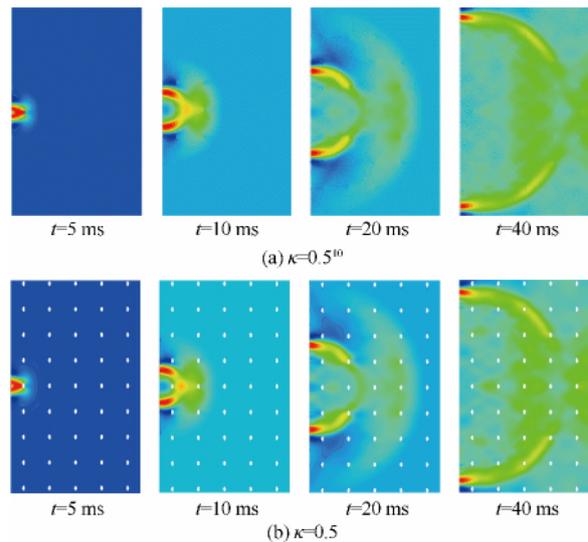


图8 $\kappa = 0.5$ 在 5, 10, 20 和 40 ms 时刻的 u_{x3}

Fig. 8 u_{x3} of $\kappa = 0.5$ at $t = 5, 10, 20$ and 40 ms

图9为采用 FEM 得到的结果与 Hudson 理论值的对比图像. 图中, $\kappa = c/a$ 为纵横比, $\kappa = 0$ 表示无裂纹情形;当 $\kappa > 0.001$ 时,与裂纹法向平行方向波速 $v_p(0)$ 急剧下降. $0.001 < \kappa \leq 0.0625$ 时,采用 FEM 得到的值在 Hudson 一阶和二阶近似理论值之间,在 $\kappa = 0.0625$ 时, $v_p(0)$ 略有回升,不排除 FEM 网格划分的影响;当 $\kappa \geq 0.125$ 时,采用 FEM

得到的结果不再满足 Hudson 理论,但误差不超过 2% 在合理范围内. Hudson 理论中,干裂纹密度与裂纹厚度 c 无关,而采用 FEM 也存在纵横比 κ 不同,但波速相同的情况,即 $0.5^9 \leq \kappa \leq 0.5^5$. $0.125 \leq \kappa \leq 0.9$ 时,在该条件下如何根据勘测数据推断岩石微结构特征是值得进一步分析的问题,这将有助于在石油、地质勘探等领域的实际应用.

图 10 为当 $0.5^5 \leq \kappa \leq 1$ 及 $0.5^5 \leq \kappa \leq 1$ 时 μ_{x_3} 时域响应. 图 10(a) 和图 10(b) 分别为 $0 \leq \kappa \leq 0.5^5$,

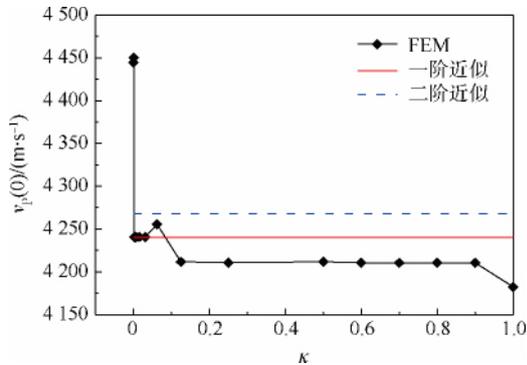
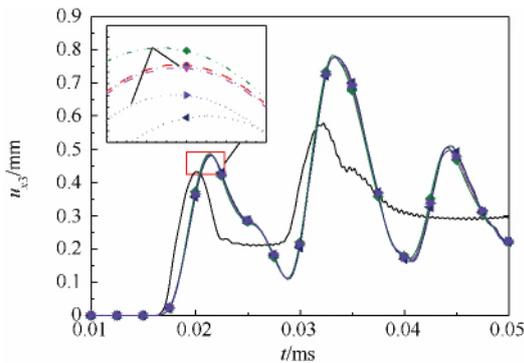
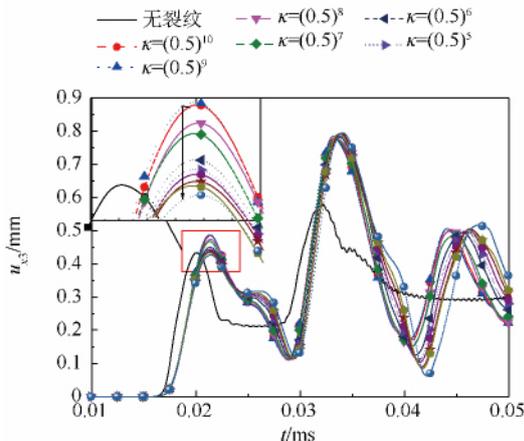


图 9 $\varepsilon = 0.04$ 时的 $v_p(0)$ 随 κ 变化

Fig. 9 Variation of $v_p(0)$ at $\varepsilon = 0.04$ with respect to κ



(a) $0 < \kappa < 0.5^5$



(b) $0.5^5 < \kappa < 1$

图 10 当 $(0.5)^5 \leq \kappa \leq 1$ 及 $(0.5)^5 \leq \kappa \leq 1$ 时 μ_{x_3} 时域响应

Fig. 10 Time domain response of u_{x_3} when

$0 \leq \kappa \leq (0.5)^5$ and $(0.5)^5 \leq \kappa \leq 1$

$0.5^5 \leq \kappa \leq 1$ 时距激励 74 m 处的结点 x_3 方向位移随时间变化曲线. 图 10 中, 出现裂纹使得弹性模量减小, 刚度降低, 这也就解释了无裂纹的时域响应波峰小于有裂纹的情形; 当 $0.5^{10} \leq \kappa \leq 0.5^8$ 时, 随着 κ 的增大, 曲线的首波峰振幅呈下降趋势; 当 $0.5^8 \leq \kappa \leq 0.5^7$ 时, 振幅略有回升, 这可能是动应力集中作用减弱的结果; $0.5^7 \leq \kappa \leq 1$ 时, 随着 κ 的增大, μ_{x_3} 呈单调下降趋势.

3 结 论

1) 采用 FEM 可以用于研究弹性波在含裂纹介质中的传播问题; Hudson 理论适用于低裂纹密度, 泊松比不接近 0.5 的常规弹性材料.

2) 在给定的模型条件下, 激励入射频率对于弹性模量的测量有一定影响, 本文模型的适用频率为 100 Hz.

3) 对于 C_{11} (C_{22}), 裂纹密度 $\varepsilon \leq 0.117$ 时, FEM 与 Hudson 一阶和二阶的理论值误差不大于 5%; $0.117 < \varepsilon \leq 0.125$, Hudson 含裂纹理论不再适用, 但该模型仍然可视为等效介质, 有必要探索适用范围更广的等效理论; $\varepsilon > 0.3$ 时, 该周期拓扑条件下, 等效理论或许不再适用.

4) 裂纹密度 ε 对于该材料的各向异性的影响要远大于纵横比 κ 的作用.

5) $\varepsilon = 0.04$ 时, 通过时域响应即可判定弹性体是否具有裂纹; 随纵横比增大, 测得 C_{33} 值有所下降, 位移时域响应的首波振幅基本呈现减小趋势.

参考文献 (References)

[1] Guéguen Y, Kachanov M. Mechanics of crustal rocks [M]. Vienna: Springer, 2011: 73-125.

[2] Mackenzie J K. The elastic constants of a solid containing spherical holes [J]. Proceedings of the Physical Society, Section B, 1950, 63(1): 1.

[3] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems [J]. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1957, 241(1226): 376-396.

[4] Bristow J R. Microcracks and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily cold-worked metals [J]. British Journal of Applied Physics, 1960, 11(2): 81.

[5] Walsh J B. The effect of cracks on the compressibility of rock [J]. Journal of Geophysical Research, 1965, 70(2): 381-389.

[6] Hudson J A. Overall properties of a cracked solid [C] // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge: Cambridge University Press, 1980, 88(2): 371-384.

[7] Hudson J A. Seismic wave propagation through material contain-

- ning partially saturated cracks [J]. *Geophysical Journal International*, 1988, 92(1): 33-37.
- [8] Hudson J A. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks [J]. *Geophysical Journal International*, 1981, 64(1): 133-150.
- [9] 曾新吾, 韩开锋, 张光莹. 含裂缝介质中的弹性波传播特性 [M]. 北京: 科学出版社, 2013: 1-5, 18-40, 98-121.
Zeng X W, Han K F, Zhang G Y. Elastic wave propagation characteristics in cracked media [M]. Beijing: Science Press, 2013: 1-5, 18-40, 98-121 (in Chinese).
- [10] Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations [J]. *Bulletin of American Mathematical Society*, 1943, 49(1): 1-23.
- [11] Aoki S, Kishimoto K, Kondo H, et al. Elastodynamic analysis of crack by finite element method using singular element [J]. *International Journal of Fracture*, 1978, 14(1): 59-68.
- [12] Taylor L M, Chen E, Kusmaul J S. Microcrack-induced damage accumulation in brittle rock under dynamic loading [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, 55(3): 301-320.
- [13] Ma G W, Hao H, Zhou Y X. Modeling of wave propagation induced by underground explosion [J]. *Computers and Geotechnics*, 1998, 22(3): 283-303.
- [14] Garboczi E J, Berryman J G. Elastic moduli of a material containing composite inclusions: Effective medium theory and finite element computations [J]. *Mechanics of Materials*, 2001, 33(8): 455-470.
- [15] Grechka V, Kachanov M. Effective elasticity of rocks with closely spaced and intersecting cracks [J]. *Geophysics*, 2006, 71(3): D85-D91.
- [16] Gaede O, Karpfinger F, Jocker J, et al. Comparison between analytical and 3D finite element solutions for borehole stresses in anisotropic elastic rock [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2012, 51: 53-63.
- [17] Mavko G, Mukerji T, Dvorkin J. The rock physics handbook: Tools for seismic analysis of porous media [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009: 21-76.
- [18] Thomsen L. Weak elastic anisotropy [J]. *Geophysics*, 1986, 51(10): 1954-1966.
- [19] 王勳成. 有限单元法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 468-520.
Wang X C. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 468-520 (in Chinese).
- [20] Liu N, Wang Y, Li M, et al. Nonlinear buckling analyses of a small-radius carbon nanotube [J]. *Journal of Applied Physics*, 2014, 115(15): 154301.

Wave propagation in cracked elastic media based on EMT using FEM

LIU Ning¹, LI Min^{*1}, CHEN Weimin²

(1. School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Understanding mechanism of wave propagation in elastic media with cracks is the key scientific issue in exploration and extraction of shale and other unconventional oil and gas resources. Based on the advantages of the numerical simulation, the excitation and propagation of elastic wave in the cracked media were simulated by Nastran, a commercial solver for finite element analysis. Then the dependence of dynamic characteristics of propagation in that kind of media was further analyzed based on the microstructure (crack density, aspect ratio). Some conclusions were obtained as follows. Finite element method (FEM) would be effectively used to study the issue. Hudson's effective medium theory (EMT) could not be applied into materials with Poisson's ratio of nearly 0.5. Increasing crack density and aspect ratio would reduce the primary wave (P wave) velocity, with decaying the displacement amplitude of the P wave in time-domain. Crack density of the medium exposes greater effect on the anisotropy than the aspect ratio.

Key words: finite element method (FEM); Hudson's theory; frequency; crack number density; aspect ratio