

文章编号: 1000-4750(2015)04-0015-07

# 热机载荷作用下拐折裂纹问题的 通用权函数法分析

张 翼<sup>1</sup>, 吴化平<sup>1</sup>, 石 曼<sup>2</sup>, 李 龙<sup>3</sup>, 柴国钟<sup>1</sup>

(1. 浙江工业大学机械工程学院, 浙江 310032; 2. 浙江工业大学教育科学与技术学院, 浙江 310032; 3. 中国科学院力学研究所, 北京 100190)

**摘 要:** 根据 Betti 互易原理, 推导出二维拐折裂纹问题通用权函数法的普遍表达式, 并利用虚拟裂纹扩展技术以及刚度阵导数法, 将通用权函数法与有限元法直接耦合, 给出了二维拐折裂纹问题通用权函数法的有限元格式。通过实例计算比较, 验证了此方法的可靠性和准确性。分析结果表明: 通用权函数法可以极大地简化计算过程, 具有极高的计算效率。在此基础上应用此方法讨论了拐折裂纹长度、拐折角度对应力强度因子过渡过程的影响。

**关键词:** 拐折裂纹; 通用权函数; 应力强度因子; 虚拟裂纹扩展技术; 刚度阵导数法

中图分类号: O346.1 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.10.0927

## ANALYSIS OF UNIVERSAL WEIGHT FUNCTION METHOD FOR KINKED CRACKS UNDER MECHANICAL AND THERMAL LOADING

ZHANG Yi<sup>1</sup>, WU Hua-ping<sup>1</sup>, SHI Man<sup>2</sup>, LI Long<sup>3</sup>, CHAI Guo-zhong<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Zhejiang 310032, China;

2. College of Education and Technology, Zhejiang University of Technology, Zhejiang 310032, China;

3. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics (LNM), Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** The universal weight function (UWF) method is extended in this study to deal with the kinked crack problems. Fundamental equations of the UWF method for two dimensional kinked crack body subjected to thermal and mechanical loadings are formulated based on the Betti's reciprocal theorem. The virtual crack extension technique and stiffness derivative method are used to couple the UWF method with the finite element method (FEM). Formulation of finite element implementation of UWF method are given for two dimensional kinked crack body. Numerical results show that the UWF method is of high accuracy and efficiency. The changes of stress intensity factors with kinked crack length and inclination angle of kinked cracks are studied using the UWF method.

**Key words:** kinked crack; universal weight function; stress intensity factors; virtual crack extension technique; stiffness derivation method

在工程结构的加工制造以及使用过程中, 由于加工工艺和变化的工作环境, 使得疲劳裂纹普遍存在于工程结构中。在疲劳载荷、应力腐蚀或蠕变的作用下, 这些疲劳裂纹会逐渐扩展, 最终断裂而导致结构的失效。在工程实际中, 疲劳破坏也是工程

结构最主要的失效形式之一, 在飞机、船舶、海洋平台、核反应堆压力容器等结构的失效中占了很大的比例。上述工程结构一旦失效, 会产生难以预料的恶性事故。因此, 从工程结构使用的安全性和可靠性角度出发, 对工程结构的疲劳寿命评估显得尤

收稿日期: 2013-10-10; 修改日期: 2014-03-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(51275471, 11372280, 11232013); 浙江省自然科学基金项目(Y6100425, Y1100108)

通讯作者: 吴化平(1979), 男, 吉林人, 副教授, 博士, 主要从事智能材料与微纳米力学方面的研究(E-mail: wuhuaping@gmail.com).

作者简介: 张 翼(1986), 男, 浙江人, 博士, 主要从事机械强度及计算机辅助工程的研究(E-mail: zhangyi181199376@126.com);

石 曼(1988), 女, 山东人, 硕士, 主要从事职业技术教育原理的研究(E-mail: shiman88@126.com);

李 龙(1988), 男, 河北人, 博士, 主要从事机械强度及计算机辅助工程的研究(E-mail: lilong@lnm.imech.ac.cn);

柴国钟(1957), 男, 浙江人, 教授, 博士, 中国力学学会理事, 主要从事机械强度及计算机辅助工程的研究(E-mail: chaigz@zjut.edu.cn).

为重要。

首先,工程结构的疲劳寿命评估需要对裂纹扩展路径进行预测。同时由于载荷和裂纹方位的不对称以及材料属性的变化,使得裂纹在扩展过程中往往并不是沿着原来直线方向发展,而常发生转折。因此对裂纹扩展路径<sup>[1-14]</sup>以及转折裂纹<sup>[15-19]</sup>的研究成为工程实际的需要而受到了众多学者的关注,并提出了一系列用于处理裂纹扩展问题的模型和方法。其次,工程结构的疲劳寿命评估还需要对裂纹扩展参数(如应力强度因子)进行精确的分析计算。在工程实际中,诸多工程结构在服役期间往往工作在表面力冲击、热冲击等十分恶劣的环境下。例如,核反应堆遇到紧急情况需要停堆。此时常需要在反应堆压力容器及其管路中注入冷却剂,这会使得上百摄氏度的热器壁温度快速冷却下来,压力容器必须有能力的持续的经受这种热冲击载荷的作用。然而,当压力容器中含有裂纹时,在这种循环冲击载荷作用下裂纹尖端会产生很高的奇异应力场,甚至会导致压力容器及其管路爆裂,后果不堪设想。因此在核反应堆压力容器及其管路设计时必须确保结构在这种循环冲击载荷作用下的安全性和可靠性;在反应堆工作过程中也必须制定绝对安全的应急处理工艺规程。此时,分析作为裂纹扩展参数之一的应力强度因子随时间的变化过程就是一项必需的重要工作。

在机械载荷、热载荷联合冲击下应力强度因子过渡过程分析的主要困难之一是计算量非常大。原因在于机械载荷、热载荷联合冲击过程是一个非定常的过程,具有冲击时间短,温度梯度大,过程复杂,温度场、应力场随时间急剧变化等特点。目前解决此类问题主要采用热弹性力学法<sup>[20]</sup>和机械力学权函数法<sup>[21-23]</sup>。这两种方法的不足点在于两者都需要对冲击过程中的每个时间点进行反复的应力分析,然后根据得到的应力场或者位移场完成对应应力强度因子过渡过程的计算,致使计算量很大。

与上述两种方法不同,通用权函数(UWF)法<sup>[24]</sup>为求解机械、热冲击非定常问题提供了新的思路和方法。在通用权函数法中,通用权函数与时间、载荷无关,仅与裂纹体的几何形状有关,因此避免了冲击过程中每个时刻反复的应力场或位移场分析,计算效率得到提高。

针对转折裂纹体承受机械载荷、热载荷联合冲击的问题,在目前查阅的文献中,尚未提及运用通

用权函数法解决此类问题。鉴于工程实际对转折裂纹问题深入研究的需要,本文对通用权函数法<sup>[24]</sup>做了推广,利用 Betti 互易原理,推导出了二维转折裂纹问题通用权函数法的普遍表达式以及有限元格式。其中,Betti 互易原理作为弹性力学的经典性原理,指出在任一线性变形体系中,第一状态中的外力在第二状态中的位移上做的功,就等于第二状态中的外力在第一状态中的位移上所做的功,其只适用于线性变形体系,应用条件为:1)材料处于弹性阶段,应力与应变成正比;2)结构变形小,不影响力的作用<sup>[25]</sup>。通过实例计算比较,验证了此方法的可靠性和准确性,可以达到满意的工程应用精度。分析结果表明,通用权函数法可以极大地简化计算过程,大大减少了计算时间,具有极高的计算效率。在此基础上,应用此方法讨论了转折裂纹长度、转折角度对应应力强度因子过渡过程的影响。

## 1 通用权函数法的基本表达式

与机械权函数一样,二维转折裂纹体的通用权函数可以借助基本参考载荷系统的解来计算。图 1(a)和图 1(b)分别表示二维转折裂纹体的基本参考载荷系统(r)和待求载荷系统(p)。其中, $\phi$ 表示主裂纹的倾斜角; $a_0$ 表示主裂纹的长度; $\beta$ 表示转折裂纹的转折角度; $a_1$ 表示转折裂纹的长度; $\rho$ 表示考虑点到转折裂纹前缘的垂直距离; $XOY$ 表示转折裂纹体的主坐标系; $X'OY'$ 表示主裂纹的参考坐标系; $xoy$ 表示转折裂纹的参考坐标系。基本参考载荷系统(r)和待求载荷系统(p)都受到已知表面力 $t^*$ 、已知体积力 $f^*$ 、已知表面位移 $u^*$ 和已知盈余温度 $\Theta^*$ 的作用。在参考载荷系统(r)中,转折裂纹前缘处的应力强度因子 $K_I^{(r)}$ 、 $K_{II}^{(r)}$ 都是已知的;在待求载荷系统(p)中,转折裂纹前缘处的应力强度因子 $K_I^{(p)}$ 、 $K_{II}^{(p)}$ 都是待求解的。

根据 Betti 互易原理:

$$\begin{aligned} & \int_{S_t} t^{*(r)} \cdot u^{(p)} dS - \int_{S_u} u^{*(r)} \cdot t^{(p)} dS + \\ & \iint_A f^{*(r)} \cdot u^{(p)} dA + \iint_A \alpha \Theta^{*(r)} \cdot \sigma_{kk}^{(p)} dA = \\ & \int_{S_t} t^{*(p)} \cdot u^{(r)} dS - \int_{S_u} u^{*(p)} \cdot t^{(r)} dS + \\ & \iint_A f^{*(p)} \cdot u^{(r)} dA + \iint_A \alpha \Theta^{*(p)} \cdot \sigma_{kk}^{(r)} dA \quad (1) \end{aligned}$$

其中: $S_t$ 与 $S_u$ 分别为转折裂纹体已知表面力边界和已知位移边界; $S = S_t \cup S_u$ ; $\alpha$ 表示热膨胀系数; $A$ 为转折裂纹体边界 $S$ 所包围的面积; $\sigma_{kk}$ 为第一

应力张量不变量： $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ 。

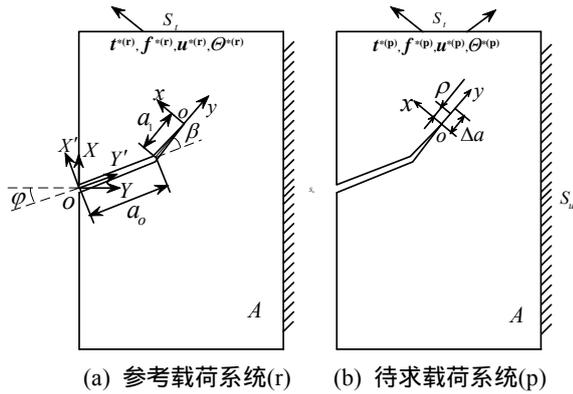


图 1 二维拐折裂纹示意图

Fig. 1 Configurations fundamental reference loading system (r) and loading system (p) to be solved

给待求载荷系统(p)一个虚拟裂纹扩展  $\Delta a$ 。值得注意的是，虚拟裂纹扩展方向应与拐折裂纹的拐折方向一致。对虚拟裂纹扩展后的待求载荷系统(p)重新运用 Betti 互易原理并进行 Taylor 展开，然后利用式(1)的微分，整理得：

$$-\frac{1}{\Delta a} \int_{\Sigma_{\Delta a}} \mathbf{t}^{*(r)} \cdot \mathbf{u}^{(p)} dS = \int_{S_i} \mathbf{t}^{*(p)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(r)}}{\partial a} dS - \int_{S_u} \mathbf{u}^{*(p)} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}^{(r)}}{\partial a} dS + \iint_A \mathbf{f}^{*(p)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(r)}}{\partial a} dA + \iint_A \alpha \Theta^{*(p)} \cdot \frac{\partial \sigma_{kk}^{(r)}}{\partial a} dA \quad (2)$$

其中： $a = a_0 + a_1$ ； $\Sigma_{\Delta a}$  表示待求载荷系统(p)进行虚拟裂纹扩展后的边界增加量。

利用拐折裂纹尖端附近应力场与位移场的渐进展开式，整理得：

$$\frac{2(K_I^{(r)} K_I^{(p)} + K_{II}^{(r)} K_{II}^{(p)})}{H} = I(r) \quad (3)$$

其中：对于平面应力问题  $H = E$ ，对于平面应变问题  $H = E/(1-\nu^2)$ ， $E$  为弹性模量， $\nu$  为泊松比；变量符号  $I(r)$  可以表示为：

$$I(r) = \int_{S_i} \mathbf{t}^{*(p)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(r)}}{\partial a} dS - \int_{S_u} \mathbf{u}^{*(p)} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}^{(r)}}{\partial a} dS + \iint_A \mathbf{f}^{*(p)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(r)}}{\partial a} dA + \iint_A \alpha \Theta^{*(p)} \cdot \frac{\partial \sigma_{kk}^{(r)}}{\partial a} dA \quad (4)$$

为了完成对应力强度因子  $K_I^{(p)}$ 、 $K_{II}^{(p)}$  的求解，需要引入两个基本参考载荷系统，即  $r = 1, 2$ 。由此，引入式(5)：

$$\frac{2(K_I^{(r)} K_I^{(p)} + K_{II}^{(r)} K_{II}^{(p)})}{H} = I(r), \quad r = 1, 2 \quad (5)$$

对式(5)进行求解，得：

$$K_I^{(p)} = \frac{H}{2K} (I(r_1) K_{II}^{(r_2)} - I(r_2) K_{II}^{(r_1)}), \quad (6)$$

$$K_{II}^{(p)} = \frac{H}{2K} (I(r_2) K_I^{(r_1)} - I(r_1) K_I^{(r_2)}).$$

其中， $K = K_I^{(r_1)} K_{II}^{(r_2)} - K_I^{(r_2)} K_{II}^{(r_1)}$ 。式(6)为二维拐折裂纹问题的通用权函数法的基本表达式。

## 2 通用权函数法的有限元格式

### 2.1 通用权函数法的基本计算公式

由于在裂纹尖端附近  $\sigma_{kk}$  对裂纹长度非常敏感，式(4)右端第 4 个积分项很难用于实际计算。对于平面问题：

$$\sigma_{kk} = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \text{平面应力} \\ \frac{E}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \text{平面应变} \end{cases} \quad (7)$$

其中， $u$ 、 $v$  分别表示整体坐标系下  $x$ 、 $y$  方向的位移。

将式(7)代入式(4)右端第 4 个积分项，交换微分次序，然后利用 Green 定理，整理得：

$$\iint_A \alpha \Theta^{*(p)} \cdot \frac{\partial \sigma_{kk}^{(r)}}{\partial a} dA = H' \left[ \oint_C \alpha \Theta^{*(p)} \left( \frac{\partial u^{(r)}}{\partial a} dy - \frac{\partial v^{(r)}}{\partial a} dx \right) - \iint_A \left( \frac{\partial(\alpha \Theta^{*(p)})}{\partial x} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial a} + \frac{\partial(\alpha \Theta^{*(p)})}{\partial y} \frac{\partial v^{(r)}}{\partial a} \right) dA \right] \quad (8)$$

其中，对于平面应力问题  $H' = E/1-\nu$ ，对于平面应变问题  $H' = E/(1-2\nu)$ 。

将变换后的式(4)代入式(6)便可得到通用权函数法的基本计算公式。

### 2.2 虚拟裂纹扩展技术以及刚度阵导数法

与机械力权函数法<sup>[21-23]</sup>不同，通用权函数法中不仅需要沿边界进行积分，还需要对整个拐折裂纹体本进行面积积分，因此很难求取通用权函数法的基本计算公式。鉴于此，本文借助虚拟裂纹扩展技术和刚度阵导数法完成对通用权函数法的基本计算公式中未知量的计算。为了模拟拐折裂纹尖端的奇异性，裂纹尖端采用二次奇异单元。如图 2 所示，在拐折方向上，即  $x$  方向上，给拐折裂纹尖端节点一个虚拟裂纹扩展，其扩展量为  $\Delta a$ ，根据几何关系，裂纹尖端周围 1/4 处的节点将沿相同方向移动

0.75Δa。由此可以得到：

$$\frac{dU}{da} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial U}{\partial a} \quad (9)$$

其中， $U = [u \ v]$ 。

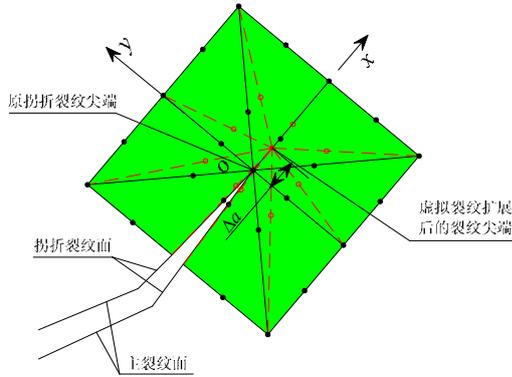


图2 二维拐折裂纹尖端虚拟裂纹扩展示意图

Fig.2 Virtual crack extension in the crack-tip vicinity

对于式(9)中全导数  $dU/da$  的求解,可以利用刚度阵导数法完成。利用有限元分析中的平衡方程,变换整理可得：

$$\frac{du_0}{da} = K^{-1} \left( \frac{dF}{da} - \frac{dK}{da} u_0 \right) \quad (10)$$

其中： $K$  表示拐折裂纹体的整体刚度矩阵； $F$  表示总载荷向量； $u_0$  表示总位移向量。

对于全导数  $dF/da$ 、 $dK/da$  的计算,可以利用虚拟裂纹扩展前后有限元软件分析得到的结果差值完成。单元内任意一点的全导数  $dU/da$  的求解可以通过对  $du_0/da$  进行适当插值得到。

对于式(8)中待求解量  $\partial\theta/\partial X$  以及式(9)的待求解量  $\partial U/\partial X$ 、 $dX/da$ ,可以借助有限元法中的等参单元来计算。其中， $X = [x \ y]$ 。

### 3 实例验证与讨论

本文将以含有边缘拐折裂纹的半无限大板为例(图3),利用作者自行开发的程序系统,验证上述方法的正确性。

#### 3.1 机械载荷作用下应力强度因子的计算与验证

在此算例中,含有边缘拐折裂纹的半无限大板上下边界受到大小为  $\sigma$  的拉应力作用。为了模拟半无限大板,拐折裂纹体的长和宽设为  $50(a_0 + a_1)$ 。图4表示拐折裂纹体的有限元网格具体剖分的示意图(有限元网格含有41008个单元,124045个节点)。在有限元计算过程中通过约束半无限大板上下面及右面中间点的方式对其进行约束,具体位移边界条件为:约束上下面中间点  $X$  方向的位移,约束右

面中间点  $Y$  方向的位移。由于拐折裂纹长度较短,因此分析过程中对裂纹尖端及边角区域的网格划分要求较高,研究发现若此处的网格划分过于稀疏,对计算结果将产生很大的影响,在本文研究过程中,图4(b)、图4(c)所示的拐折裂纹尖端及边角区域的正方形有限元网格宽度为拐折裂纹长度的1/15。本文将通用权函数法得到的结果与文献[16]中体积力法得到的结果进行了比较(图5)。

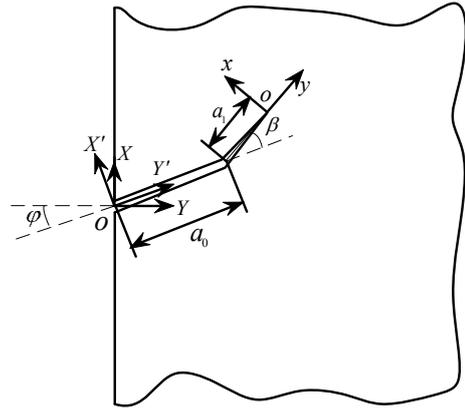
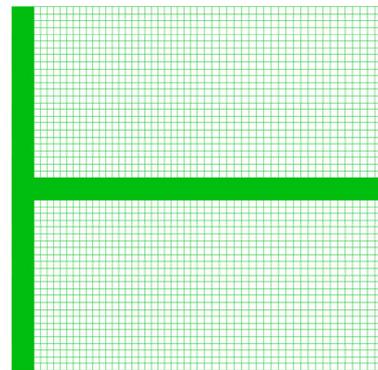
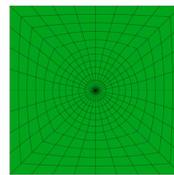


图3 含有边缘拐折裂纹的半无限大板示意图

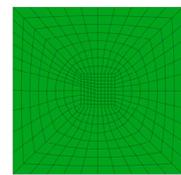
Fig.3 Schematic representation of a semi-infinite plate with kinked edge crack



(a) 拐折裂纹体的整体网格划分示意图



(b) 拐折裂纹尖端的有限元网格



(c) 主裂纹与拐折裂纹间边角区域的有限元网格

图4 半无限大拐折裂纹体的有限元网格

Fig.4 FE meshes for a semi-infinite plate with kinked edge crack

其中：

$$C_2 = a_1 \cos \beta \quad C_1 = a_0 \cos \varphi + C_2, \\ K_1^* = K_1^{(p)} / \sigma \sqrt{\pi C_1 / \cos \beta},$$

$$K_{II}^* = K_{II}^{(p)} / \sigma \sqrt{\pi C_1 / \cos \beta} \quad (11)$$

与通用权函数法相比, 体积力法以迭加原理为基础, 利用无限板或半无限板的基本应力场作为问

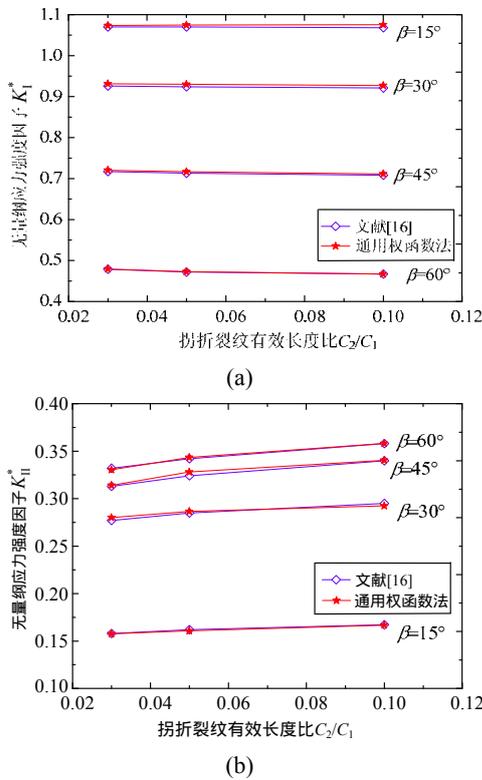


图5 型、型无量纲化应力强度因子随拐折角度、拐折裂纹长度的变化曲线以及不同计算方法结果比较

Fig. 5 Variation of normalized stress intensity factors for different kinked crack lengths and inclination angles of the kinked crack, and comparison of normalized stress intensity factors obtained from body force method and UWF method

题的基本解, 通过解线性方程组求解相关参量, 进而获得应力强度因子, 针对机械载荷作用下的拐折裂纹问题, 此方法是一种有效的高精度的计算方法, 但应用此方法处理热冲击问题时, 仍然不可避免对冲击过程中的每个时间点进行反复的应力分析, 致使计算效率下降。

根据两种计算方法得出的结果,  $K_I$  偏差控制在 0.7% 以下,  $K_{II}$  偏差控制在 2% 以下, 计算精度可以达到工程应用标准。由图 5(a)、图 5(b) 可知, 当拐折角度不变时, 随着拐折裂纹长度的增加, 应力强度因子  $K_I$  不断减小, 应力强度因子  $K_{II}$  不断增大; 当拐折裂纹长度不变时, 随着拐折角度的增加, 应力强度因子  $K_I$  不断减小, 应力强度因子  $K_{II}$  呈现先增后减的趋势, 当  $\beta = 45^\circ$  时  $K_{II}$  到达最大值。

当采用机械力权函数法<sup>[21-23]</sup>解决算例 1 中的问题时, 需要对两种形体进行有限元分析。首先需

对含有拐折裂纹的形体进行有限元分析, 完成对机械权函数的计算; 然后还需对不含拐折裂纹的形体的进行有限元分析, 求出待引入拐折裂纹位置处的应力分布; 最后将得到的应力分布与机械权函数相乘并沿裂纹面积分来计算应力强度因子。过程繁琐。运用通用权函数法解决此类问题时, 避免了对不含裂纹的形体进行应力分析, 只需将机械载荷与相应的权函数相乘积分即可, 简化了分析步骤, 进而提高了计算效率。

### 3.2 机械、热冲击载荷共同作用下应力强度因子的计算与验证

以泰山核电站 300MW 机组为例<sup>[26]</sup>, 反应堆压力容器的正常工作时处于恒压状态, 其工作压力为 15.2MPa。当遇到紧急情况需要停堆时, 常需要在反应堆压力容器中注入冷却剂, 这会使得压力容器内壁上承受上百摄氏度的热冲击作用。当反应堆压力容器表面出现微小的拐折裂纹且受到上述热冲击载荷作用时, 拐折裂纹有可能发生裂纹扩展, 进而影响压力容器的使用安全性。

为了模拟上述工作环境, 在此算例中依旧采用算例 1 中的计算模型, 将其边界条件设为: 拐折裂纹体左边界受到 15.2MPa 的压应力以及  $T = -100$  热冲击载荷的共同作用。材料常数如表 1 所示。

表 1 材料常数

Table 1 Material properties

参量	单位	数值
弹性模量 $E$	MPa	$2.1 \times 10^5$
泊松比 $\nu$		0.3
比热 $c$	J/(kg · )	3611
热膨胀系数 $\alpha$	1/( )	$0.125 \times 10^{-4}$
密度 $\rho$	kg/mm <sup>3</sup>	$7.85 \times 10^{-6}$
导热系数 $\lambda$	W/(mm · )	42

本文在微机(CPU 为 Core2, 主频为 2.66GHz, 内存 1GB, 操作系统为 Windows XP 2002)上运用通用权函数法完成了对拐折裂纹尖端应力强度因子随时间的变化过程的分析计算, 并与裂纹面张开位移法(COD 法)<sup>[27]</sup>计算结果进行了比较(图 6)。其中:

$$F_I = \frac{K_I}{K_O}, F_{II} = \frac{K_{II}}{K_O}, K_O = \frac{\alpha ET}{1-\nu} \sqrt{\pi a} \quad (12)$$

根据两种计算方法得出的结果,  $K_I$  偏差控制在 0.6% 左右,  $K_{II}$  偏差控制在 1.5% 以下, 计算精度可以达到工程应用精度。由图 6(a)~图 6(f) 可知, 随着时间的变化, 应力强度因子  $K_I$ 、 $K_{II}$  都呈现先增后减的变化趋势, 最大值出现的时间点并没有随着拐

折角度以及拐折裂纹长度的变化而变化,最大值出现的时间点约为 0.966s。当拐折裂纹长度不变时,随着拐折角度的增加,应力强度因子  $K_I$  不断减小,应力强度因子  $K_{II}$  呈现先增后减的趋势,当  $\beta = 75^\circ$  时  $K_{II}$  到达最大值。当拐折角度不变时,随之拐折裂纹长度的变化,应力强度因子  $K_I$ 、 $K_{II}$  仅有很小的变化,说明拐折裂纹长度的变化对  $K_I$ 、 $K_{II}$  的影响不显著。在此基础上,本文通过改变边界条件的方式,包括改变机械、热载荷的大小、载荷施加部位、载荷类型以及热载荷施加过程中的换热边界条件等,验证了该理论的计算精度。其应力强度因子的计算偏差随着边界条件的改变,  $K_I$  偏差控制在 1.0% 左右,  $K_{II}$  偏差控制在 2.0% 以内,计算精度受影响不大,进一步验证了理论的正确性。

运用通用权函数法解决冲击类问题的最大优越性在于它具有很高的计算效率。如图 6 所示的问题中,如果全部用热弹性力学法来计算,在求得温

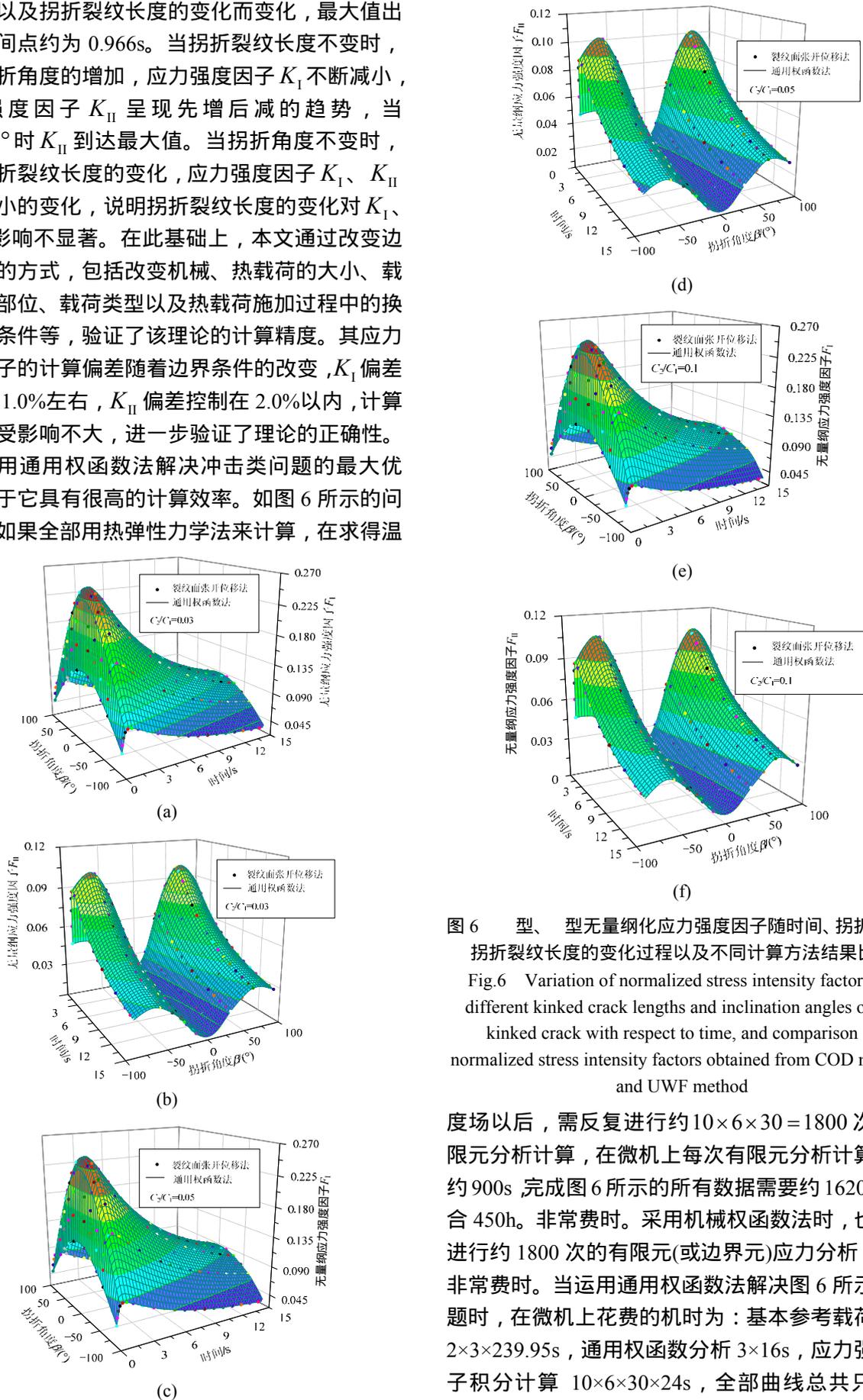


图 6 型、型无量纲化应力强度因子随时间、拐折角度、拐折裂纹长度的变化过程以及不同计算方法结果比较  
Fig.6 Variation of normalized stress intensity factors for different kinked crack lengths and inclination angles of the kinked crack with respect to time, and comparison of normalized stress intensity factors obtained from COD method and UWF method

度场以后,需反复进行约  $10 \times 6 \times 30 = 1800$  次的有限元分析计算,在微机上每次有限元分析计算需要约 900s,完成图 6 所示的所有数据需要约 1620000s,合 450h。非常费时。采用机械权函数法时,也需要进行约 1800 次的有限元(或边界元)应力分析,同样非常费时。当运用通用权函数法解决图 6 所示的问题时,在微机上花费的机时为:基本参考载荷分析  $2 \times 3 \times 239.95s$ ,通用权函数分析  $3 \times 16s$ ,应力强度因子积分计算  $10 \times 6 \times 30 \times 24s$ ,全部曲线总共只花费

44687.7s, 约合 12.41h。与热弹性力学法、机械权函数法相比, 节省了大量的计算时间, 原因在于通用权函数与时间和载荷无关, 仅需将机械载荷和温度场与相应的权函数相乘并积分, 便可以得到应力强度因子随时间的变化过程, 因此避免了每个时间点反复的应力分析, 计算效率得到很大提高。

### 3 结论

承受热机载荷共同作用的线弹性裂纹体, 在裂纹扩展的过程中, 裂纹发生拐折是常见的现象。通用权函数与时间、载荷无关, 在求解复杂冲击载荷作用下应力强度因子随时间的变化过程时, 可以避免反复的应力场或位移场分析, 为更加高效地解决此类问题提供了新的思路和方法。本文在前人研究的基础之上, 对通用权函数法做了推广, 推导出了二维拐折裂纹问题通用权函数法的普遍表达式以及有限元格式。本文对典型实例进行了计算, 验证了此方法的可靠性和准确性。通过与其他方法得到的结果进行比较分析, 表明通用权函数法可以达到满意的工程应用精度, 同时节省了计算时间, 计算效率得到很大提高。最后, 应用此方法讨论了拐折裂纹长度、拐折角度对应力强度因子过渡过程的影响。

#### 参考文献:

- [1] 张晓东, 丁勇, 任旭春. 混凝土裂纹扩展过程模拟的扩展有限元法研究[J]. 工程力学, 2013, 30(7): 14-27.  
Zhang Xiaodong, Ding Yong, Ren Xuchun. Simulations of the concrete crack propagation progress with the extended finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(7): 14-27. (in Chinese)
- [2] 丁振宇, 王效贵, 高增梁. 加载历史和裂纹闭合对疲劳裂纹扩展行为影响的数值模拟[J]. 工程力学, 2013, 30(8): 244-250.  
Ding Zhenyu, Wang Xiaogui, Gao Zengliang. Numerical simulation of the effect of loading history and crack closure on crack propagation behavior [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(8): 244-250. (in Chinese)
- [3] 刘园, 陆凯良, 张卫国, 宓为建. 多板交汇复杂板壳结构应力分布仿真和裂纹扩展原因分析[J]. 工程力学, 2013, 30(增刊): 19-24.  
Liu Yuan, Lu Kailiang, Zhang Weiguo, Mi Weijian. Stress distribution simulation for section with multiple planes and investigation on crack propagation in the section[J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(Suppl): 19-24. (in Chinese)
- [4] 李强, 张力霆, 齐清兰, 等. 压缩载荷下闭合裂纹的曲线分支裂纹模型研究[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 294

300.

- Li qiang, Zhang Liting, Qi Qinglan, et al. Study of the curve branch crack model for the closed flaw under compressive loading [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(4): 294-300. (in Chinese)
- [5] Fett T, Munz D. Kinked cracks and Richard fracture criterion [J]. International Journal of Fracture, 2002, 115(4): L69-L73.
- [6] Richard H A, Fulland M, Sander M. Theoretical crack path prediction [J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2005, 28(1/2): 3-12.
- [7] Lei J, Wang Y S, Gross D. Two dimensional numerical simulation of crack kinking from an interface under dynamic loading by time domain boundary element method [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(3/4): 996-1012.
- [8] Lados D A, Apelian D. Relationships between microstructure and fatigue crack propagation paths in Al-Si-Mg cast alloys [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75(3/4): 821-832.
- [9] Benedetti M, Beghini M, Fontanari V, Monelli B D. Fatigue cracks emanating from sharp notches in high-strength aluminium alloys: The effect of loading direction, kinking, notch geometry and microstructure [J]. International Journal of Fatigue, 2009, 31(11/12): 1996-2005.
- [10] He Q L, Wu L Z, Li M, Yu H J. Prediction of mode I crack growth resistance based on a comparative investigation of J-integral and energy dissipation rate concept [J]. Acta Mechanica, 2010, 215(1): 175-191.
- [11] Wang Z Y, Ma L, Wu L Z, Yu H J. Numerical simulation of crack growth in brittle matrix of particle reinforced composites using the xfem technique [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2012, 25(1): 9-21.
- [12] Marsavina L, Sadowski T, Kneč M. Crack propagation paths in four point bend Aluminium-PMMA specimens [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2013, 108: 139-151.
- [13] Pandya Y, Parey A. Simulation of crack propagation in spur gear tooth for different gear parameter and its influence on mesh stiffness [J]. Engineering Failure Analysis, 2013, 30: 124-137.
- [14] Dong W, Wu Z M, Zhou X M. Calculating crack extension resistance of concrete based on a new crack propagation criterion [J]. Construction and Building Materials, 2013, 38: 879-889.
- [15] Theocaris P S, Makrakis G N. The kinked crack solved by Mellin transform [J]. Journal of Elasticity, 1986, 16(4): 393-411.
- [16] Noda N A, Oda K. Numerical solutions of the singular integral equations in the crack analysis using the body force method [J]. International Journal of Fracture, 1992, 58(4): 285-304.

(参考文献[17] [27]转第 53 页)

- Chinese)
- [5] Folland G B. Fourier Analysis and Its Applications [M]. Beijing: China Machine Press, 2005: 281 286.
- [6] 拉夫连季耶夫 M A, 沙巴特 B B. 复变函数论方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 448.  
Lavrentieff M A, Shabat B V. Methods of functions of a complex variable [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006: 448. (in Chinese)
- [7] Luo X B, Aref A J, Dargush G F. Analysis and optimal design of layered structures subjected to impulsive loading [J]. Computers and Structures, 2009, 87(9): 543 551.
- [8] 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 405 418.  
Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics [M]. Beijing: Science Press, 2011: 405 418. (in Chinese)
- [9] Mikusinski. Operational Calculus [M]. New York: Pergamon Press, 1959: 508.
- [10] Asmar N H. Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Fourier Series, 2/E [M]. Beijing: China Machine Press, 2012: 481.
- [11] Palka B P. An Introduction to Complex Function Theory [M]. Beijing: World Publishing Corporation, 2012: 251.
- [12] 扈培础. 复变函数教程[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 62.  
Hu Peichu. Complex Function Tutorial [M]. Beijing: Science Press, 2008, 62. (in Chinese)
- [13] 赵建丛, 黄文亮. 复变函数与积分变换[M]. 上海: 华东理工大学出版社, 2008: 159 163.  
Zhao Jiancong, Huang Wenliang. Complex function and integral transform [M]. Shanghai: East China University of Science and Technology Press, 2008: 159 163. (in Chinese)
- [14] 谢定义. 土动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 409 422.  
Xie Dingyi. Soil dynamics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011: 409 422. (in Chinese)
- [15] 刘晶波, 王文晖, 赵冬冬. 地下结构横截面地震反应拟静力计算方法对比研究[J]. 工程力学, 2013, 30(1): 105 111.  
Liu Jingbo, Wang Wenhui, Zhao Dongdong. Comparison of the pseudo-static methods for seismic analysis of the underground structures [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(1): 105 111. (in Chinese)
- [16] 马宏伟, 吴斌. 弹性动力学及其数值方法[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2000: 24 27.  
Ma Hongwei, Wu Bin. Elastic dynamics and its numerical method [M]. Beijing: China Building Materials Press, 2000: 24 27. (in Chinese)

---

(上接第 21 页)

- [17] Dutta B K, Kakodkar A. Two singular points finite elements in the analysis of kinked cracks [J]. Computational Mechanics, 1991, 7(5/6): 329 339.
- [18] Nisitani H. Stress intensity factor for the tension of a semi-infinite plate having an oblique or a bent edge crack [J]. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1975, 41(344): 1103 1110.
- [19] Cotterell B, Rice J R. Slightly curved or kinked cracks [J]. International Journal of Fracture, 1980, 16(2): 155 169.
- [20] Lee S, Choi S T, Earmme Y Y. Stress intensity factors and kink angle of a crack interacting with a circular inclusion under remote mechanical and thermal loadings [J]. KSME International Journal, 2003, 17(8): 1120 1132.
- [21] Fett T, Pham V B, Bahr H A. Weight functions for kinked semi-infinite cracks [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2004, 71(13/14): 1987 1995.
- [22] Beghini M, Benedetti M, Fontanari V, Monelli B D. A general weight function for inclined kinked edge cracks in a semi-plane [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2010, 77(11): 1631 1643
- [23] Beghini M, Benedetti M, Fontanari V, Monelli B D. Stress intensity factors of inclined kinked edge cracks: A simplified approach [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2012, 81: 120 129.
- [24] 周国斌, 卢炎麟. 热和机械载荷联合作用下的通用权函数法及应用[J]. 机械工程学报, 2007, 43(6): 116 121.  
Zhou Guobin, Lu Yanlin. Universal weight function method for mechanical and thermal loading and its application [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(6): 116 121. (in Chinese)
- [25] 龙驭球, 包世华. 结构力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 287 288.  
Long Yuqiu, Bao Shihua. Structural Mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 287 288. (in Chinese)
- [26] He Y B, Isozaki T. Fracture mechanics analysis and evaluation for the RPV of the Chinese Qinshan 300MW NPP under PTS [J]. Nuclear Engineering and Design, 2000, 201(2/3): 121 137.
- [27] Lu Y L. A practical procedure for evaluating SIFs along fronts of semi-elliptical surface cracks at weld toes in complex stress fields [J]. International Journal of Fatigue, 1996, 18(2): 127 135.