弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒①

——关于“对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷”的商榷

朱如曾

[中国科学院力学研究所;非线性国家重点实验室(LNM);
微重力国家实验室(NML)　北京　100190]

(收稿日期:2014 11 03)

摘　要:验证了一道中学生物理竞赛试题标准答案(弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒)的正确性,否定了“对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷”[1]的质疑,并指出其错误根源.

关键词:功能原理　轻质弹簧振子

2009年第26届全国中学生物理竞赛复赛试卷第三题第1小题的标准答案近来受到质疑,质疑文章[1]摆到了我的办公桌上.这些质疑无疑应当反驳,否则会浪费广大中学师生的精力.反驳此质疑,笔者宛如回到了高中时代,仿佛在回答我们敬爱的物理老师楼敏生先生给我出的思考题,我必须以楼老师一贯要求的数理思辨逻辑严格性标准和对问题多角度理解、多途径解决的风格认真回答.

1　问题的提出

2009年第26届全国中学生物理竞赛复赛试卷第三题第1小题是:一质量为 m 的小球与一劲度系数为 k 的弹簧相连组成一体系,置于光滑水平桌面(地面参考系 S)上,弹簧的另一端与固定墙面相连,小球做一维自由振动.试问在一沿此弹簧长度方向以速度 u 做匀速运动的参考系 S' 里观察,此体系的机械能是否守恒,并说明理由.

该题答案是,“否.原因是墙壁对于该体系而言是外界,墙壁对弹簧有作用力,在运动参考系 S' 里此力的作用点有位移,因而要对体系做功,从而会改变这一体系的机械能.”

答案与文献[2]的表述一致,其依据显然是功能原理,很清楚是正确的,而且与弹簧质量是否可以忽略无关 但是最近《物理通报》发表了一篇文章,对于该竞赛题,该文忽略了弹簧的质量,并命名为轻质弹簧(下文仍简称为弹簧),在 S' 系中对系统的弹性势能 E'_p 采用公式

$$dE'_p(t) = -f\,dx' \qquad (3^*)(见附录)$$

(式中,x' 和 f 分别是在 S' 系中观察到小球的位移和它所受到的弹簧作用力)进行推导(见本文附录),得到在运动参考系 S' 中,系统的机械能守恒的结论,并据此对该题答案提出了质疑[1].

十分清楚,该题答案是有根有据,完全正确的,本不存在什么澄清是非的问题,但是对文献[1]采用的基本公式究竟有什么错误还是应该分析指出的.本文将对在 S' 系中观察到的该轻质弹簧振子系统的机械能验证其不守恒,然后在此基础上剖析文献[1]的错误 为此,首先简述有关的伽利略变换关系.

2　参考系 S 与 S′ 之间的伽利略变换关系

图1是轻质弹簧振子系统的示意图,其中为了与文献[1]一致,把参考系 S' 用在地面上沿弹簧长度方向以速度 u 做匀速运动的小车来表示.如图1

所示，在地面惯性参考系 S 中，以轻质弹簧平衡时小球所处的位置 O 为 x 轴的坐标原点，记为 $x_o=0$. 小球的位置坐标 x 就是小球离开平衡点 $x_o=0$ 的位移，也即弹簧的伸长或压缩 $(x-x_o)$. 小球的一维速度、动能和受到的力分别记为 v, E_k 和 f.

图 1　轻质弹簧振子体系

在小车惯性参考系 S′ 中取与 x 轴重合的 x' 轴，其坐标原点 O′ 在 $t=t'=0$ 时刻与 x 轴上的坐标原点 O 重合，即初始时刻 x 轴的坐标原点 O 在小车系中的坐标 $x'_o(t'=0)$ 与在地面系的坐标都为零 $x'_o(t'=0)=x_o=0$. 小球的位置、速度、动能和受到的力分别记为 x', v', E'_k 和 f'. 本文后面将一直采用本段的这些约定. 于是两个参考系的伽利略变换关系为

$$t=t' \qquad x'=x-ut \qquad v'=v-u \qquad x'_o=x_o-ut=-ut \qquad (1)$$

因此，弹簧的无形变长度 l_0 和伸长 $(x-x_o)$ 以及质点的加速度均是伽利略不变量. 力学相对性原理保证同一质点静止于任何惯性系时，其静止质量相同；又经典的物质不灭定律保证质点的质量 m 与它的运动状态无关，所以质点的质量 m 是伽利略不变量. 根据加速度和质量 m 都是伽利略不变量，成立于所有惯性系的牛顿第二定律便保证力是伽利略不变量了. 因此弹簧对小球的作用力 f 和与其相连的墙壁对弹簧的约束力 $f_{墙}$ 是伽利略不变量

$$f=f'=f_{墙}=f'_{墙} \qquad (2)$$

这与弹簧伸长的伽利略不变性一起给出劲度系数 κ 是伽利略不变量，即胡克定律的成立与弹簧是否正在做匀速运动无关. 因此在 S′ 系中观察，有平动速度的弹簧也遵从胡克定律

$$f'_{墙}=f'=-\kappa(x'-x'_o) \qquad (3)$$

3　参考系 S′ 中观察弹簧振子系统的机械能不守恒的验证

图 1 所示弹簧振子系统由弹簧和小球组成. 现在先在 S′ 系中计算弹簧的弹性势能与其端点坐标之间的关系. 弹簧受到的外力有两个，即墙壁作用于弹簧一端 (x'_o-l_0) 的力 $f'_{墙}$ 和小球作用于弹簧另一端 (x') 的力 $(-f')$. 两个外力在弹簧运动过程中对弹簧所做的总功为

$$dW'=f'_{墙}d(x'_o-l_0)-f'dx'=-f'd(x'-x'_o) \qquad (4)$$

由于忽略弹簧的质量和动能，弹簧的机械能 $E'_{弹簧}$ 就是弹簧的弹性势能，故根据功能原理，弹簧的弹性势能的增量为

$$dE'_{p弹簧}=dE'_{弹簧}=dW'=-f'd(x'-x'_o) \qquad (5)$$

将式(3)代入式(5)并积分，选择弹簧未变形状态下的弹性势能为零，得

$$E'_{p弹簧}=\frac{1}{2}\kappa(x'-x'_o)^2 \qquad (6)$$

在 S′ 系中，整个弹簧振子系统的机械能 E' 为弹簧的机械能 $E'_{弹簧}$（即弹簧的弹性势能 $E'_{p弹簧}$）与小球的机械能 $E'_{小球}$ $\left(即小球动能 \frac{1}{2}mv'^2\right)$ 之和

$$E'=\frac{1}{2}\kappa(x'-x'_o)^2+\frac{1}{2}mv'^2 \qquad (7)$$

将文献[1]选取的特解式(1*)及式(2*)(见附录)代入式(7)得

$$E'=\frac{1}{2}\kappa A^2\cos^2\omega t+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t)+m\omega uA\sin(\omega t)+\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}\kappa A^2+\frac{1}{2}mu^2+m\omega uA\sin(\omega t) \qquad (8)$$

此式验证了系统的机械能不守恒，从而验证了该题答案的正确性.

4　对文献[1]错误的讨论

文献[1]对选定的 x' 的一个特解式(*)得出该解所对应的机械能不随时间而变的错误结果，于是宣称系统相对于 S′ 系机械能守恒. 其错误根源在于文献[1]在论证中所用势能微分公式(3*)是错误的. 下面遵照楼老师对问题多角度理解的要求给出 3 种证明.

(1) 与正确的势能微分公式(5)相比较

与式(5)比较显见,式(3*)右边丢失了 $f'_{墙}\mathrm{d}x'_0$ 项 这是不允许的,因为文献[1]是按照他选定的特解式(1*),随着时间变化计算随体微分 $\mathrm{d}x'$ 的,因此 $\mathrm{d}t$ 一定不是零,式(1)最后一式表明 $\mathrm{d}x'_0$ 也就必不是零,所以 $f'_{墙}\mathrm{d}x'_0$ 决不可丢失 此丢失项就是在S系中看到移动着的墙壁对弹簧所做的功. 由于 $f_{墙}$ 是整个系统的唯一外力,由功能原理可知,$f'_{墙}\mathrm{d}x'_0$ 就是 $\mathrm{d}E'$ 所以这一丢失恰好导致该特解所具有的机械能不变的错误结论.

(2) 反证法证明

设想在图1中,小车上有一个钩子,钩住小球使之相对小车静止不动,另一端仍然固定在墙壁上. 按照文献[1]不计墙壁力的功的思想,式(3*)在此显然成立. 但是因为小车钩住小球,所以 $\mathrm{d}x'=0$,于是从式(3*)得到

$$\frac{\mathrm{d}E'_p(t)}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (9)$$

此式表明小球势能不随时间而变! 如果小球初始时刻处于平衡位置 $x'(0)=x_0=0$,势能将一直保持为零,动能又明显保持为零,于是机械能、势能、动能都保持为零. 可是实际情况是弹簧在不断地被拉伸,在小车上看这个系统的势能怎么能保持不变呢? 所以这一荒谬推论从反面证明了其出发点式(3*)确实不成立.

(3) 从式(3*)的实质证明其错误

根据动能定理,文献[1]式(3*)右边实际上表示的是小球动能微分 $\mathrm{d}E'_k(t')$ 的相反数,因此式(3*)应订正为

$$-\mathrm{d}E'_k(t')=-f\,\mathrm{d}x' \qquad (10)$$

其中的 $\mathrm{d}E'_k(t')$ 和 $\mathrm{d}x'$ 都是随体微分. 式(3*)相当于将系统动能的随体减少误解为势能的随体增加,这样导出的所谓"势能",实际上与负动能只差一个常数,由此导出的所谓"机械能"当然保持不变了,可是它与系统的真实机械能无关! 文献[1]中还有一些以其错误结论为基础的其他明显错误的说法,限于篇幅,本文不予评论.

致谢:加拿大乔治亚学院曹广军教授就质量的伽利略不变性问题与作者进行过有益讨论,仅致谢忱!

参考文献

1 李学生,师教民 对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷. 物理通报,2014(9):119～120

2 赵凯华,罗蔚茵. 新概念物理教程. 北京:高等教育出版社,2004

附录:文献[1]摘录

设在小车参考系上观察(即以小车参考系为静止系)时,小球的位移、速度、加速度、受到的力、动能、势能分别为 x', v', a', f, $E'_k(t)$, $E'_p(t)$,则有

$$x'=x-ut=A\cos(\omega t)-ut$$

$$v'=-\omega A\sin(\omega t)-u \qquad (1^*)$$

$$f=-m\omega^2A\cos(\omega t)$$

$$E'_k(t)=\frac{1}{2}mv'^2=\frac{1}{2}\kappa A^2\sin^2(\omega t)+ m\omega uA\sin(\omega t)+\frac{1}{2}mu^2 \qquad (2^*)$$

$$\mathrm{d}E'_p(t)=-f\,\mathrm{d}x' \qquad (3^*)$$

即

$$\mathrm{d}E'_p(t)=\kappa x\,\mathrm{d}(x-ut)=\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\kappa A^2\cos^2\omega t-m\omega uA\sin(\omega t)\right]$$

又因为 $t=0$ 时

$$E'_p(0)=E_p(0)=\frac{1}{2}\kappa A^2$$

所以

$$E'_p(t)=\frac{1}{2}\kappa A^2\cos^2\omega t-m\omega uA\sin(\omega t) \qquad (4^*)$$

$$E'(t)=E'_p(t)+E'_k(t)=\frac{1}{2}\kappa A^2+\frac{1}{2}mu^2=\text{常数} \qquad (5^*)$$

所以,在小车参考系上观察时,弹簧振子体系(或小球)的机械能仍然守恒,守恒值为 $\frac{1}{2}\kappa A^2+\frac{1}{2}mu^2$.

微元法求解线状相交物系交叉点的速度

施美玲

（东北师范大学物理学院　吉林 长春　130024）

（收稿日期：2014　10　20）

1　简述微元法

处理物理问题时，从对事物的极小部分分析入手，达到解决事物整体的方法，叫做微元法. 微元法的灵魂是无限分割与逼近　用微元法解决物理问题的特点是“大处着眼，小处着手”，对事物作整体观察后，必须取出该事件的某一个小单元即微元进行分析，通过对微元构造“低细节”的物理描述，最终解决整体问题. 微元法解决物理问题的两要诀就是取微元 —— 无限分割以及对微元做低细节描述 —— 逼近　对物理问题的无限分割，可以分割一段时间或过程，得到“时间元”、“元过程”. 用微元法处理各种物理问题，可以发现这里借助于合理而必要的取舍和近似，将微元表征物理本质的主部取出，使之成为

体的等值变化等等. 对这样的微元，运用相应的物理概念与规律，借助于数学工具，使所求问题最终得以解决.

2　相交物系交叉点的速度

相交物系交叉点的速度的特征是什么呢？可以看如图 1 所示交叉的两条直线 l_1 和 l_2.

图 1

当直线 l_1 不动，直线 l_2 沿自身方向运动时，交叉点 P 并不移动，而当 l_2 沿着直线 l_1 的方向移动时，交叉点 P 便沿着直线 l_1 移动，因交叉点 P 亦是直线 l_2 上的一点，故与直线 l_2 具有相同的沿 l_1

平移速度. 同理，若 l_2 固定，l_1 移动，交叉点 P

The Mechanical Energy of a Spring Oscillator Relative to Moving Inertial Frame is not Conserved

——Comment on " Discussion on the answer of a middle school student′s contest question"

Zhu Ruzeng

(State Key Laboratory of Nonlinear Mechenics(LNM) and Key Laboratory of Microgravity;

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing　100190)

Abstract: For a middle school student′s physics contest, the standard answer that the mechanical energy of a spring oscillator relative to moving inertial frame is not conserved is verified. The opposite conclusion given by the paper titled Discussion on the answer of a middle school student′s contest question is dismissed and the error sources are pointed out.

Key words: Work　energy theorem; the light spring oscillator