一种中心型有限体积孔隙－裂隙渗流求解方法及其 OpenMP 并行化

王理想，李世海，马照松，冯 春
(中国科学院 力学研究所，北京 100190)

摘要：为高效求解单相孔隙－裂隙渗流问题，发展一种基于任意网格的三维中心型有限体积渗流求解算法，并对其进行 OpenMP 并行化。该算法将压力置于单元中心处；使用串联弹簧模型在空间域离散；使用显式差分格式在时间域离散；使用动态松弛求解技术，逐个单元求解。算例研究表明，该算法与有限元相比具有类似的精度，但求解效率更高。OpenMP 并行化使得该算法运算速度在 CPU i7－3770 上可提高至 4.0 倍，在 CPU i7－4770 上可提高至 4.2 倍；两台机器上的并行效率均高达 50%以上。

关键词：计算数学；三维中心型有限体积法；单相孔隙－裂隙耦合渗流；动态松弛技术；OpenMP 并行；离散裂隙网络

中图分类号：O 24 **文献标识码：**A **文章编号：**1000－6915(2015)05－0865－11

A CELL-CENTERED FINITE VOLUME METHOD FOR FLUID FLOW IN FRACTURED POROUS MEDIA AND ITS PARALLELIZATION WITH OPENMP

WANG Lixiang，LI Shihai，MA Zhaosong，FENG Chun
(*Institute of Mechanics*，*Chinese Academy of Sciences*，*Beijing* 100190，*China*)

Abstract：An efficient three-dimensional cell-centered finite volume method(ccFVM) on arbitrary grids was developed for single-phase fluid flow in fractured porous media. The method was parallelized with OpenMP. With that the pressure node was set at the center of the cell, the model of spring-in-series was employed for spatial discretization and the explicit difference scheme for temporal discretization. The dynamic relaxation technique was used for the element-by-element iteration. The numerical tests indicated that the ccFVM was as accurate as FEM, but more efficient. The parallel procedure obtained a speedup of 4.0 on the CPU i7－3770 and a speedup of 4.2 on the CPU i7－4770. High parallel efficiency of over 50% was achieved on both machines.

Key words：computational mathematics；three-dimensional cell-centered finite volume method；single-phase fluid flow in fractured porous media；dynamic relaxation technique；OpenMP-based parallelization；discrete fracture network

1 引 言

孔隙－裂隙耦合渗流现象广泛存在于节理化孔隙介质中。耦合渗流规律的研究对于石油天然气开采[1-2]、滑坡防治[3]、核废料处理[4]、地下水污染防治[5]、水电工程[6]、地热工程[7]等，都具有重要的实际意义。

收稿日期：2014－07－21；**修回日期：**2014－10－21
基金项目：国家重点基础研究发展规划(973)项目(2010CB731506)；中国科学院战略性先导科技专项(XDB10030303)；国家自然科学基金青年基金项目(11002146)
作者简介：王理想(1987－)，男，2010 年毕业于北京科技大学土木工程专业，现为博士研究生，主要从事渗流数值模拟与并行算法方面的研究工作。E-mail：omega168@163.com。通讯作者：李世海(1958－)，男，现任研究员、博士生导师。E-mail：shli@imech.ac.cn
DOI：10.13722/j.cnki.jrme.2014.1049

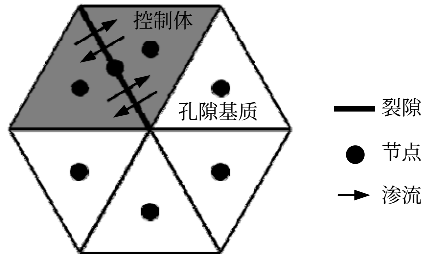
目前国内外对于孔隙－裂隙耦合渗流模型的研究，已经取得一定进展。在物理模型研究方面，G. I. Barenblatt 等[8]于 1960 年率先提出均质、各向同性的双重孔隙介质模型。该模型假定节理化孔隙介质是一种包含 2 种物性的连续介质，其几何区域是交叠的[9]。2 种介质之间的物质交换，以窜流项表示。1982 年，J. C. S. Long 等[10]将强节理化孔隙介质等效为一种连续介质来处理，提出等效连续介质模型。该模型中介质的渗透率和孔隙度通过平均化获得，这种简化使得等效连续介质模型中不包含裂隙，因此计算精度较低。1992 年，B. Dverstorp 等[11]通过提取介质中的主导裂隙，建立了离散裂隙网络模型。由于该模型的简化条件较少，因此该模型最为精确，但使用该模型将导致计算量巨大。

国内学者在离散裂隙网络渗流模型方面做了很多工作。于青春等[12]建立了岩体非连续裂隙网络三维面状渗流模型。李新强等[13]使用蒙特卡洛方法，随机生成了三维结构面网络模型，并进行了可视化处理。张 丽等[14]使用块体切割技术，建立了固体切割型随机裂隙网络模型。张奇华和邬爱清[15]发展了三维任意裂隙网络的渗流模型。

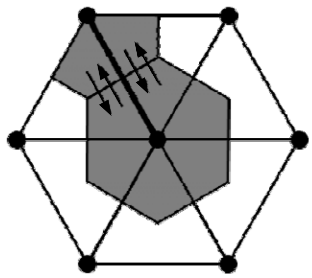
在数值模型研究方面，国内外学者在有限单元法[16-17]、有限差分法[18]、节点型有限体积法[19]、边界单元法[20]、混合方法[21]等方面做了很多卓有成效的工作。这些方法计算精度高，但计算量往往较大。中心型有限体积法创造性地把压力节点置于单元中心处，单元自身即为控制体(见图 1(a))，相比于控制体复杂的节点型有限体积法(见图 1(b))，可减少计算量，从而提高计算效率。

国外学者在中心型有限体积渗流算法研究方面取得较大进展。Y. Caillabet 等[22]提出二维单相孔隙－裂隙渗流求解模型，并用于求解大尺度渗流问题[23]。S. Granet 等[24]发展了二维双相孔隙－裂隙渗流求解模型，用于裂缝性油藏的渗流模拟。M. Karimi-Fard 等[25]提出三维双相孔隙－裂隙渗流求解模型。本文在此基础之上，发展了三维单相孔隙－裂隙渗流求解模型。

中心型有限体积法不仅效率高，而且在处理特殊问题时更加贴近物理实际。如图 2 所示，当流体从裂隙 AB，AC 向孔隙基质ΔABC 流动时，使用节点型有限体积法，得到的结果是：ΔABC 的 3 个节点 A，B，C 的压力值与裂隙 AB，AC 的节点压力值相等，基质ΔABC 立刻充满水。但实际过程并非如此，裂隙 AB 与 AC 有一个向基质ΔABC 渗透的过程，使用中心型有限体积法则可以捕捉到这一过程。



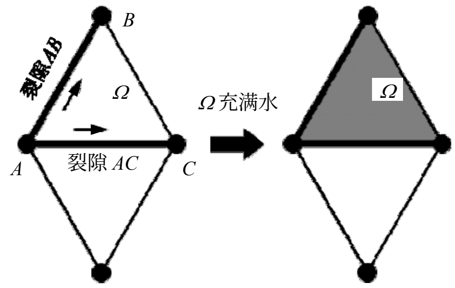
(a) 中心型有限体积法



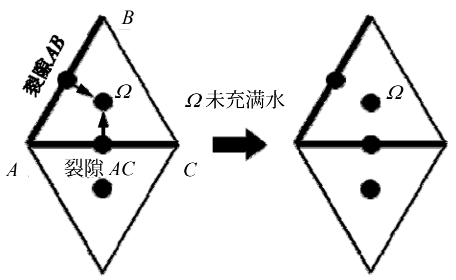
(b) 节点型有限体积法

图 1　2 种有限体积法控制体对比

Fig.1　Control volumes of the two FVMs



(a) 节点型有限体积法



(b) 中心型有限体积法

图 2　2 种有限体积法流体流动机制

Fig.2　Fluid flow mechanism of the two FVMs

近 10 a 来，随着计算机技术的发展，并行技术取得很大进展，各种并行算法得以实施。如刘耀儒等[26-27]使用 element-by-element 的并行策略，分别研究了基于双重孔隙介质模型的渗流－应力耦合问题和基于

统计模型的裂隙岩体渗流场问题。各种数值方法基本实现并行化，如有限元法[28]、离散元法[29]、有限差分法[30]、混合方法[31]、边界元法[32]等，但尚未有学者对中心型有限体积法进行并行化。鉴于此，本文使用 OpenMP 对三维中心型有限体积渗流算法进行并行处理，进一步提高计算效率。

2 中心型有限体积渗流算法

以下通过对耦合渗流的控制方程进行空间域和时间域离散，得到中心型有限体积耦合渗流算法。

2.1 控制方程

孔隙基质和裂隙中的渗流，都遵循达西定律，分别可表示为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} &= -\frac{K_{\mathrm{m}}}{\mu}\nabla p_{\mathrm{m}} \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{f}} &= -\frac{K_{\mathrm{f}}}{\mu}\nabla p_{\mathrm{f}} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}}$，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}$ 分别为孔隙渗流和裂隙渗流的流速；K_{m}，K_{f} 分别为孔隙基质和裂隙的渗透率；μ为流体的动力黏度；p_{m}，p_{f} 分别为孔隙基质和裂隙中的流体压力。

对于孔隙渗流和裂隙渗流，它们都遵循流量守恒方程。对于孔隙渗流，这个方程可表示为

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{m}} + q_{\mathrm{m}} = \phi_{\mathrm{m}} c\frac{\partial p_{\mathrm{m}}}{\partial t} \tag{2}$$

式中：t 为时间，q_{m} 为孔隙渗流的源汇项，ϕ_{m} 为孔隙基质的孔隙度，c 为流体压缩系数。

对于裂隙渗流，裂隙中只有流体，因此孔隙度 $\phi_{\mathrm{f}}=1$，裂隙渗流的流量守恒方程可表示为

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}} + q_{\mathrm{f}} = \phi_{\mathrm{f}} c\frac{\partial p_{\mathrm{f}}}{\partial t} \tag{3}$$

式中：q_{f} 为裂隙渗流的源汇项。

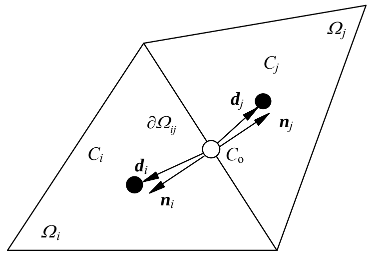
对于裂隙渗流，还需要确定裂隙的渗透率。D. T. Snow[33]在 1966 年通过试验给出流量与水力梯度之间的立方定律。通过 NS 方程推导[34]，可给出裂隙的渗透率：

$$K_{\mathrm{f}} = \frac{b^2}{12} \tag{4}$$

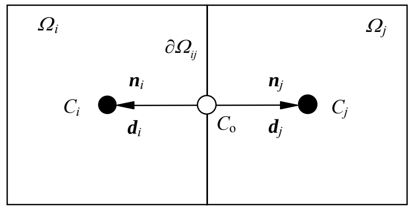
式中：b 为裂隙的开度。

2.2 串联弹簧算法

为了得到有限体积渗流计算公式，考虑任意 2 个相邻的有限体积单元 Ω_i 和 Ω_j，如图 3 所示。Ω_i 和 Ω_j 具有公共边(面) $\partial\Omega_{ij}=\Omega_i\cap\Omega_j$。$C_i$，$C_j$ 分别为 Ω_i 和 Ω_j 的中心，C_{o} 为 $\partial\Omega_{ij}$ 的中点。向量 $\boldsymbol{d}_i$，$\boldsymbol{d}_j$ 分别为 $C_{\mathrm{o}}C_i$，$C_{\mathrm{o}}C_j$ 的单位方向向量。向量 $\boldsymbol{n}_i$，$\boldsymbol{n}_j$ 分别为公共边 $\partial\Omega_{ij}$ 指向 Ω_i，Ω_j 单元的单位法向量。图 3(a)和(b)分别表示非结构化网格和结构化网格，下述推导过程表明该算法对任意网格均成立。



(a) 非结构化网格描述



(b) 结构化网格描述

图 3 相邻 2 个单元几何描述

Fig.3 Geometrical representation of two adjacent cells

根据图 3 所示的几何描述，推导通过边界 $\partial\Omega_{ij}$ 的流量 Q_{ij} 与单元 Ω_i，Ω_j 的流体压力 p_i，p_j 之间的关系。沿 C_iC_{o}，$C_{\mathrm{o}}C_j$ 方向的流速，根据式(1)可得

$$\boldsymbol{u}_{i\mathrm{o}} = -\frac{K_i}{\mu_i}\nabla p_{i\mathrm{o}} = -\frac{K_i}{\mu_i}\frac{p_{\mathrm{o}}-p_i}{D_i}(-\boldsymbol{d}_i) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{o}j} = -\frac{K_j}{\mu_j}\nabla p_{\mathrm{o}j} = -\frac{K_j}{\mu_j}\frac{p_j-p_{\mathrm{o}}}{D_j}\boldsymbol{d}_j \tag{6}$$

式中：p_{o}为 C_{o} 处的压力；D_i，D_j 分别为线段 C_iC_{o}，$C_{\mathrm{o}}C_j$ 的长度。

通过边界 $\partial\Omega_{ij}$ 的流量，可通过积分得到

$$Q_{ij} = Q_{i\mathrm{o}} = \int_{\partial\Omega_{ij}}\boldsymbol{u}_{i\mathrm{o}}\cdot(-\boldsymbol{n}_i)\mathrm{d}S = \frac{AK_i}{\mu_i}\frac{\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{n}_i}{D_i}(p_i-p_{\mathrm{o}}) \tag{7}$$

$$Q_{ij} = Q_{\mathrm{o}j} = \int_{\partial\Omega_{ij}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{o}j}\cdot\boldsymbol{n}_j\mathrm{d}S = \frac{AK_j}{\mu_j}\frac{\boldsymbol{d}_j\cdot\boldsymbol{n}_j}{D_j}(p_{\mathrm{o}}-p_j) \tag{8}$$

令

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{AK_i}{\mu_i}\frac{\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{n}_i}{D_i} \\ \alpha_j &= \frac{AK_j}{\mu_j}\frac{\boldsymbol{d}_j\cdot\boldsymbol{n}_j}{D_j} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式(7)和(8)可化为

$$\left.\begin{aligned} Q_{ij} = Q_{io} = \alpha_i(p_i - p_o) \\ Q_{ij} = Q_{oj} = \alpha_j(p_o - p_j) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

类比串联弹簧模型(见图 4)，可得

$$Q_{ij} = T_{ij}(p_i - p_j) \tag{11}$$

式中：T_{ij} 为单元 i，j 之间的等效传递系数，类似于串联弹簧的等效劲度系数：

$$T_{ij} = \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j} \tag{12}$$

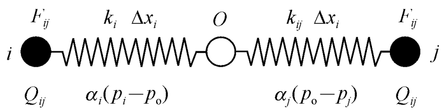


图 4　串联弹簧模型类比图

Fig.4　Analog chart of spring-in-series model

2.3　稳态/非稳态渗流算法

对于稳态渗流，有

$$\int_{\Omega_i} (-\nabla \cdot \boldsymbol{u} + q)\mathrm{d}V = 0 \tag{13}$$

根据高斯散度定理，并结合式(11)，考虑 i 单元周围所有相邻单元 j(见图 5)，通过求和得

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega_i} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \sum_j T_{ij}(p_i - p_j) \tag{14}$$

记 $Q_i = \int_{\Omega_i} q \mathrm{d}V$，则可得稳态渗流公式：

$$Q_i = \sum_j T_{ij}(p_i - p_j) \tag{15}$$

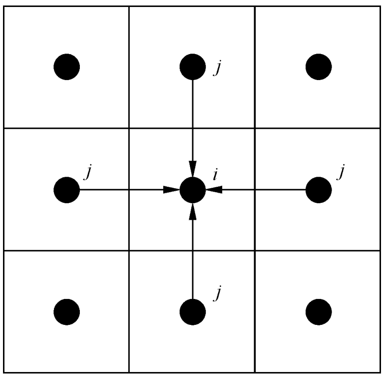


图 5　i 单元相邻的所有 j 单元

Fig.5　All cells j adjacent to cell i

对于非稳态渗流，对式(2)或(3)在时间域进行显式差分离散，并把式(15)代入其中，可得

$$\int_{\Omega_i} \phi c \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \mathrm{d}V = Q_i^n - \sum_j T_{ij}(p_i^n - p_j^n) \tag{16}$$

整理式(16)，得到压力随时间的更新公式：

$$p_i^{n+1} = p_i^n + \frac{\Delta t}{\phi_i c_i V_i}[Q_i^n - \sum_j T_{ij}(p_i^n - p_j^n)] \tag{17}$$

式中：p_i^n 为第 n 时步第 i 单元的压力，Q_i^n 为第 n 时步第 i 单元的源汇项流量，V_i 为第 i 单元体积。

式(17)既适用于孔隙渗流，又适用于裂隙渗流。需要指出的是，裂隙渗流可以看作是比孔隙渗流低一维度的渗流。

2.4　孔隙–裂隙耦合渗流算法

如图 6 所示，现针对孔隙单元 mi 和裂隙单元 fi 给出耦合渗流计算公式。图 6 中，孔隙单元 mi 周围既有其他孔隙单元 mk(图 6 中 k = 1，2，3)，也有裂隙单元 fi；裂隙单元 fi 周围既有孔隙单元 mi 和 mj，又有裂隙单元 fj(图 6 中 j = 1，2)。

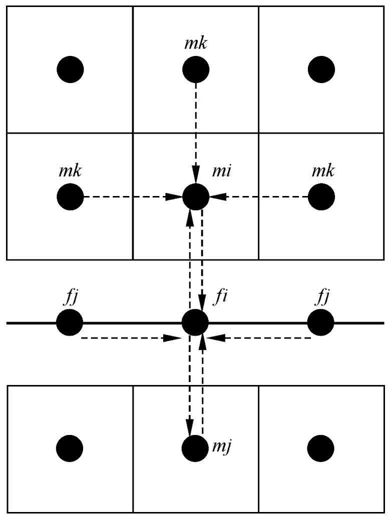


图 6　孔隙–裂隙耦合渗流

Fig.6　Fluid flow in matrix-fracture

应用式(17)，对单元 mi 同时进行空间域和时间域离散，可得

$$p_{mi}^{n+1} = p_{mi}^n + \frac{\Delta t}{\phi_{mi} c_{mi} V_{mi}}[Q_{mi}^n - \sum_{j=mk,\ fi} T_{mi,\ j}(p_{mi}^n - p_j^n)] \tag{18}$$

$$p_{fi}^{n+1} = p_{fi}^n + \frac{\Delta t}{\phi_{fi} c_{fi} V_{fi}}[Q_{fi}^n - \sum_{j=fj,\ mi,\ mj} T_{fi,\ j}(p_{fi}^n - p_j^n)] \tag{19}$$

式中：$T_{mi,\ j}$ 为孔隙单元 mi 与 j(j = fj，mi，mj)单元的等效传递系数，$T_{fi,\ j}$ 为裂隙单元 fi 与 j(j = fj，mi，mj)单元的等效传递系数。

2.5　边界处理

需要引入边界条件，才能进行计算。因为该方法中压力都置于单元中心处，为了保持算法一致性，

在边界面中心处或边界边中点处引入边界条件，如图 7 所示。

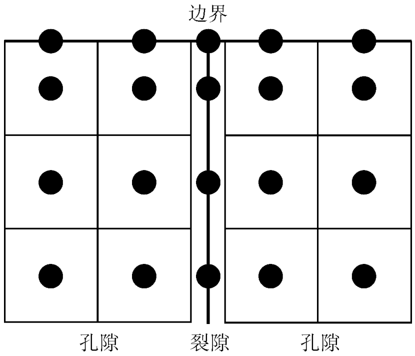


图 7　边界处理

Fig.7　Boundary treatment

边界条件可以是压力边界，也可以是流量边界；既可以在孔隙单元边界处引入，也可以在裂隙单元边界处引入。

在引入边界条件之后，上述公式在边界连接处同样成立。若在孔隙边界单元 i 上引入了压力边界 p_{b}，流量边界 Q_{b}，那么式(15)可以写为

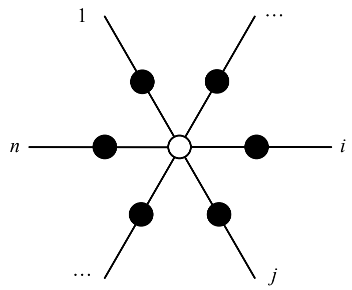
$$Q_i=\sum\nolimits_{j\neq \mathrm{b}}T_{ij}(p_i-p_j)+\alpha_{i\mathrm{b}}(p_i-p_{\mathrm{b}})+Q_{\mathrm{b}} \tag{20}$$

式中：$\alpha_{i\mathrm{b}}$ 为 i 单元中心到边界中心(中点)处的传递系数。相似地，可以把式(20)中的边界条件扩展到式(17)～(19)中，不再赘述。

2.6　离散裂隙网络渗流计算

多个裂隙相交的时候，式(15)同样成立。图 8 所示为 n 个裂隙相交的情形。可通过虚拟一个中心节点(空心点)，再通过流量守恒，导出 n 个裂隙两两之间的传导系数：

$$T_{ij}=\frac{\alpha_i\alpha_j}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k} \tag{21}$$



实心点代表真实压力节点，空心点代表虚拟压力节点

图 8　n 个相交裂隙

Fig.8　Intersecting of multiple fractures

离散裂隙网络中的裂隙，可分解为多组相交裂隙，由此可按式(21)所示的传导系数，代入式(18)或(19)进行计算。

3　OpenMP 并行化

3.1　OpenMP 简介

OpenMP(Open Multi-Processing)是一套支持跨平台共享内存方式的多线程并发的编程 API[35]，可以在大多数操作系统上运行，如 Windows，Linux，Mac OS 等；OpenMP 支持的编程语言包括 C 语言、C++和 Fortran；支持 OpenMP 的编译器包括 Sun Compiler，GNU Compiler 和 Intel Compiler 等。本文使用 C++作为编程语言，程序在 Windows 系统上运行。

OpenMP 提供了对并行算法的高层的抽象描述，这降低了并行编程的难度和复杂度。只需通过在源代码中加入专用的 Pragma 来指明意图，由此编译器可自动将程序进行并行化，但在必要之处需加入同步互斥以及通信，以避免并行冲突。

3.2　OpenMP 并行化

渗流算法流程如图 9 所示，在求解之前需要进行前处理，包括寻找拓扑关系和求解传递系数。之后进行动态求解迭代，包括流量场的求解和压力场的求解。在这个过程中，可以进行并行处理的求解环节包括：传递系数求解；孔隙渗流、裂隙渗流流量求解；孔隙渗流、裂隙渗流压力求解。

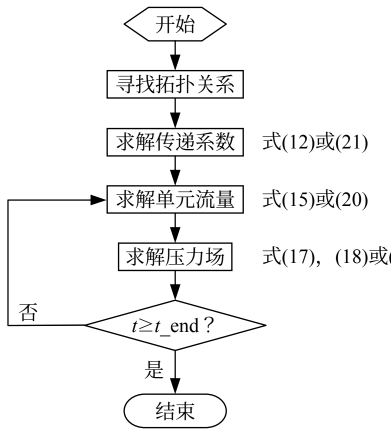


图 9　本算法流程

Fig.9　Flow chart of the algorithm

在整个求解过程中，都是以单元为求解单位，不形成总体的传递系数矩阵，并且使用动态方法求解静态或动态问题，该方法为动态松弛法。这 3 个

求解环节，都是逐个单元求解，符合并行化要求。所对应的需并行化的 5 个求解函数如表 1 所示。

表 1　5 个并行函数

Table 1　Five parallel functions

待并行函数	功能
int CalcTransmissivity( )；	//传递系数求解
int DoPressureP(iter)；	//孔隙渗流压力求解
int DoPressureF(iter)；	//裂隙渗流压力求解
int DoQuantityP(TimeStep)；	//孔隙渗流流量求解
int DoQuantityF(TimeStep)；	//裂隙渗流流量求解

打开 Visual Studio 中的 OpenMP 并行开关，并使用下列语句，对上述函数中的单元循环进行并行化处理。图 10 为孔隙渗流压力计算的并行化处理，类似地可以对其他 4 个函数进行并行化处理。

并行函数示例

```
int DoPressureF(iter)
{
    #ifdef _OPENMP
    #pragma omp parallel for
    #endif
    for ( int i = 0； i < nElems； i ++ )
    {
        //单元压力计算
    }
    return 0；
}
```

图 10　孔隙渗流压力计算的并行化处理

Fig.10　Parallel processing for pore seepage pressure calculation

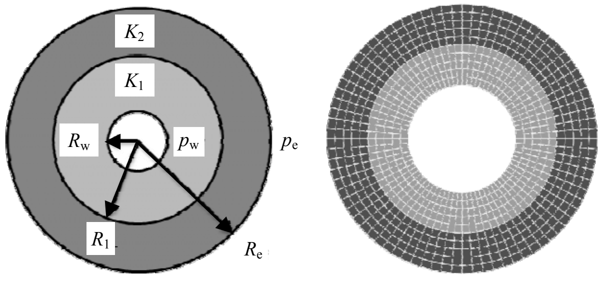
需要指出的是，“ for ”循环中的循环变量应为“ int ”型，不能为“ size_t ”，否则无法并行化。

上述并行算法建立在逐个单元计算基础之上，如果采用相同类型的单元，那么每个单元的计算量基本一致。在并行求解的时候，就会减少因不同单元计算量不同所导致的负载不平衡现象，进而提高运行效率。

4 算　例

4.1 稳态孔隙渗流算例验证

采用图 11 所示模型，边界条件为 $p_\mathrm{e} = 50$ kPa，$p_\mathrm{w} = 20$ kPa；模型尺寸为 $R_\mathrm{e} = 5.0$ m，$R_\mathrm{w} = 2.0$ m，$R_1 = 3.5$ m；渗透率 K_1，K_2 采用 3 种模式：(1) $K_1 = K_2 = K$，(2) $K_1 = K < K_2 = 2K$，(3) $K_1 = 2K > K_2 = K$，其中 $K = 1.0\times10^{-13}$ m^2；动力黏度 $\mu = 1.0\times10^{-3}$ Pa · s。



(a) 边界条件　　(b) 计算网格

图 11　稳态孔隙渗流计算模型

Fig.11　Model for steady flow in matrix

该算例存在理论解，令

$$\alpha_K = \frac{\dfrac{\mu}{K_1}\ln\left(\dfrac{R_1}{R_\mathrm{w}}\right)}{\dfrac{\mu}{K_1}\ln\left(\dfrac{R_1}{R_\mathrm{w}}\right) + \dfrac{\mu}{K_2}\ln\left(\dfrac{R_\mathrm{e}}{R_1}\right)},\quad \alpha_R = \frac{\ln\left(\dfrac{r}{R_\mathrm{w}}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_1}{R_\mathrm{w}}\right)}$$

$$\beta_K = \frac{\dfrac{\mu}{K_2}\ln\left(\dfrac{R_\mathrm{e}}{R_1}\right)}{\dfrac{\mu}{K_1}\ln\left(\dfrac{R_1}{R_\mathrm{w}}\right) + \dfrac{\mu}{K_2}\ln\left(\dfrac{R_\mathrm{e}}{R_1}\right)},\quad \beta_R = \frac{\ln\left(\dfrac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_\mathrm{e}}{R_1}\right)}$$

则理论解为

$$p(r) = \begin{cases} p_\mathrm{w} + \alpha_K\alpha_R(p_\mathrm{e} - p_\mathrm{w}) & (R_\mathrm{w} < r \leq R_1) \\ p_\mathrm{w} + (\alpha_K + \beta_K\beta_R)(p_\mathrm{e} - p_\mathrm{w}) & (R_1 < r < R_\mathrm{e}) \end{cases} \tag{22}$$

该算例的数值解与理论解的对比如图 12 所示，由图可知数值解与理论解符合较好，验证了本文算法求解稳态孔隙渗流的正确性。

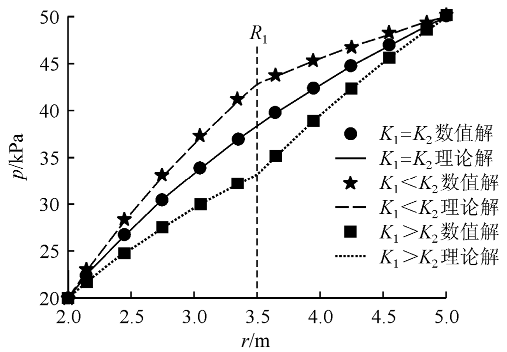


图 12　稳态孔隙渗流数值解与理论解对比

Fig.12　Comparison between numerical and analytical results of steady flow in matrix

4.2 非稳态孔隙渗流算例验证

建立如图 13 所示数值模型，模型长 $L = 10$ m，

宽 1 m。模型左、右侧均为压力边界条件，左侧压力为 10 kPa，右侧压力为 0 kPa，不考虑重力。流体压缩系数为 $c = 5.0\times10^{-9}$ Pa^{-1}，孔隙度$\phi = 0.2$，渗透率 $K = 1.0\times10^{-13}$ m^2，动力黏度 $\mu = 1.0\times10^{-3}$ Pa · s。该算例的理论解为

$$p(x,\ t) = p_{\mathrm{e}}\left[1-\frac{x}{L}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\chi\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{23}$$

其中，

$$\chi = K/(\mu\phi c)$$

本算例中 $\chi = 0.1$ m^2/s。

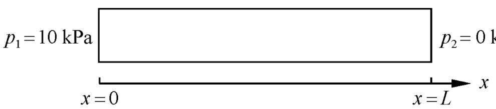


图 13　非稳态孔隙渗流计算模型

Fig.13　Model for unsteady flow in matrix

观测 $x = 2.5$，5.5 和 8.5 m 处孔隙压力随着时间的变化，得到数值解与理论解的对比如图 14 所示。由图 14 可知，数值解与理论解保持一致，验证了本文算法求解非稳态孔隙渗流的正确性。

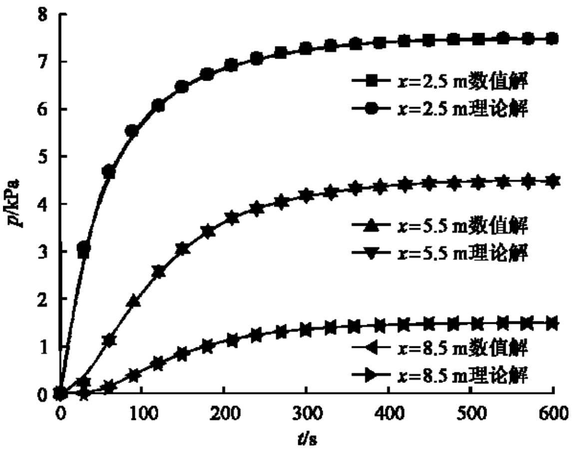
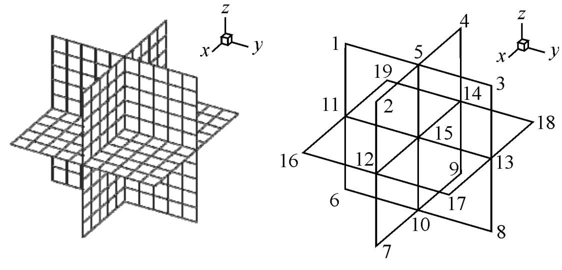


图 14　非稳态孔隙渗流数值解与理论解对比

Fig.14　Comparison between numerical and analytical results of unsteady flow in matrix

4.3 裂隙渗流算例验证

本算例计算 3 组正交裂隙组成的裂隙网络，计算模型如图 15 所示。每个裂隙面都是边长为 100 m 的正方形，且裂隙隙宽都为 0.001 m，没有被填充。每个裂隙面剖分为 10×10 个四边形单元。边界条件为：上边界点 1～5 水头 $H_{1\sim5} = 200$ m，下边界点 6～10 水头 $H_{6\sim10} = 100$ m。上边界水头 $H_{1\sim5}$下降速度为 1 m/d，下边界 $H_{6\sim10}$水头不变。流体压缩系数 $c = 7.0\times10^{-9}$ Pa^{-1}，动力黏度 $\mu = 1.0\times10^{-3}$ Pa · s，密度 $\rho = 1.0\times10^3$ kg/m^3，重力加速度 $g = 9.8$ m/s^2。从图 15 中取点 11～19 作为数据观测点，本文解与何 杨等[36]的解对比见表 2。80 d 时水头分布见图 16。



(a) 计算网格　　(b) 节点编号

图 15　裂隙网络计算模型

Fig.15　Calculation model of a discrete fracture network

从表 2 的计算结果可以看出，本文数值解与文献解误差平均值为 2%，说明本文算法与何 杨等[36]的有限元算法具有同等精度。

4.4 孔隙－裂隙耦合渗流标准算例验证

采用 A. Tatomir[37]中标准算例进行验证，计算模型如图 17 所示。模型上边界为压力边界，左、右、下三边为无流量边界。模型尺寸以及孔隙、裂隙渗透系数如图 17 所示。

本文压力计算结果云图如图 18 所示，将压力按照下式转换为水头：

$$h = \frac{p}{\rho g} \tag{24}$$

表 2　本文解和何 杨等[36]的解计算水头对比

Table 2　Comparison between presented and reference heads　　10^2 m

节点编号	初始		20 d		40 d		60 d		80 d	
	数值解	何 杨等[36]的解	数值解	何 杨等[36]的解	数值解	何 杨等[36]的解	数值解	何 杨等[36]的解	数值解	何 杨等[36]的解
11	1.50	1.49	1.40	1.39	1.30	1.29	1.20	1.20	1.10	1.10
12	1.50	1.44	1.40	1.35	1.30	1.27	1.20	1.18	1.10	1.09
13	1.50	1.49	1.40	1.39	1.30	1.29	1.20	1.20	1.10	1.10
14	1.50	1.44	1.40	1.35	1.30	1.27	1.20	1.18	1.10	1.09
15	1.50	1.47	1.40	1.37	1.30	1.28	1.20	1.19	1.10	1.09
16	1.50	1.47	1.40	1.37	1.30	1.28	1.20	1.19	1.10	1.09
17	1.50	1.47	1.40	1.37	1.30	1.28	1.20	1.19	1.10	1.09

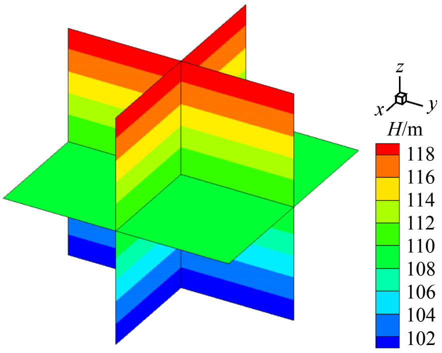


图 16　80 d 时水头分布图

Fig.16　Distribution of water head at 80 d

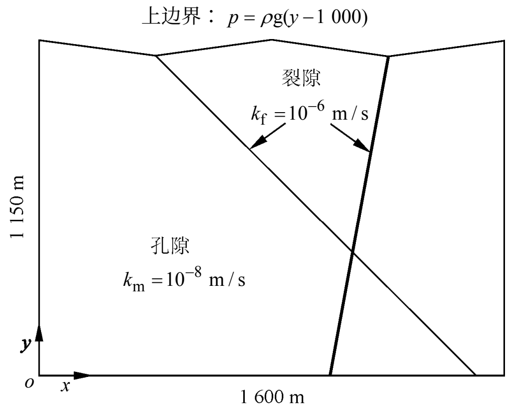


图 17　标准算例模型图

Fig.17　Model for benchmark test

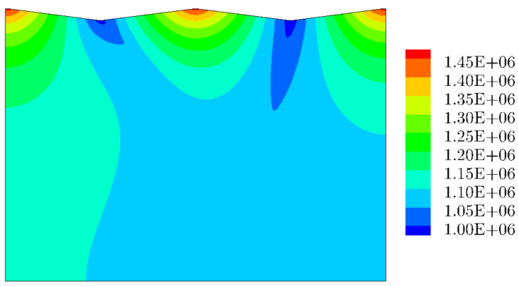


图 18　标准算例压力云图(单位：Pa)

Fig.18　Pressure contour of the benchmark test(unit：Pa)

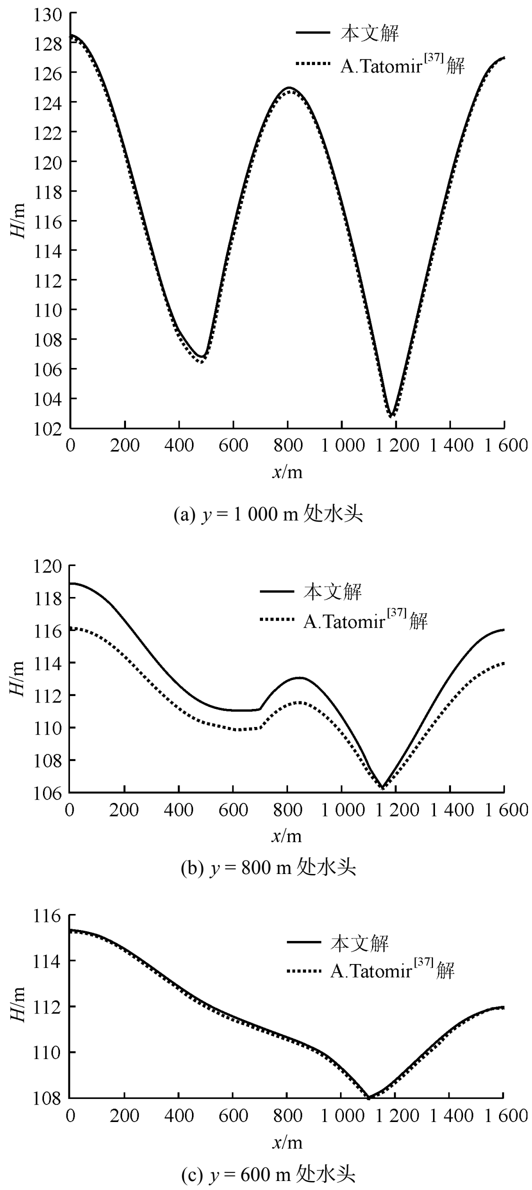


图 19　本文解与 A. Tatomir[37]解对比

Fig.19　Calculated results compared with the ones from A. Tatomir[37]

本算列中取水的密度 $\rho=1.0\times10^3$ kg/m^3，重力加速度 $g=9.8$ m/s^2。

分别取 $y=1\ 000$，800 和 600 m 处水头，与 A. Tatomir[37]结果对比，如图 19 所示。

通过与 A. Tatomir[37]的有限元计算结果对比可知(见图 19)，本文计算结果与其高度吻合。该标准算例一方面验证了本算法在计算孔隙–裂隙耦合渗流问题上的准确性；另一方面也说明了中心型有限体积法与有限元法相比，也具有足够高的精度。

4.5　算法效率研究

通过计算节 4.4 的标准算例，分别研究串行程序和 OpenMP 并行程序的运算效率，计算条件如表 3 所示。

表 3　计算条件

Table 3　Calculation conditions

网格信息		迭代信息	
单元类型	单元数目	迭代步数	时间步长
五面体	14 997	1 000 000	0.35 s

(1) 串行程序效率研究

采用表 3 中的计算条件，分别使用中心型有限体积渗流程序和显式有限元渗流程序进行求解。两者均使用单线程进行计算，计算平台均为 Intel(R) Core(TM) i7－3770 CPU @ 3.40 GHz 3.40 GHz (CPU 3770)。程序运行时间如表 4 所示。

表 4　计算时间对比

Table 4　Comparison of the running time

数值方法	计算时间/s
中心型有限体积法	808
有限单元法	6 603

从表 4 可以看出，在相同计算条件下，使用同一计算机计算，中心型有限体积法与有限元法运算效率之比为 6 603 / 808 ≈ 8，这说明中心型有限体积法效率远远高于有限元法。

(2) OpenMP 并行程序效率研究

采用表 3 中的计算条件，分别使用两台计算机：Intel(R) Core(TM) i7–3770 CPU @ 3.40 GHz 3.40 GHz (CPU 3770)和 Intel(R) Core(TM) i7–4770 CPU @ 3.40 GHz 3.40 GHz (CPU 4770)进行并行计算。CPU 3770 和 CPU 4770 均具有 4 个核心 8 个线程。并行化计算过程如下：

① 使用下列命令设置线程数：omp_set_num_threads(4)；其中，括号内数字为线程数；对于 CPU 3770 和 CPU 4770，分别取线程数为 1～8 个。

② 统计计算时间。

③ 计算加速比和并行效率，两者的计算公式分别为[38]

$$S_{\mathrm{p}} = T_{\mathrm{s}} / T_{\mathrm{p}} \tag{25}$$

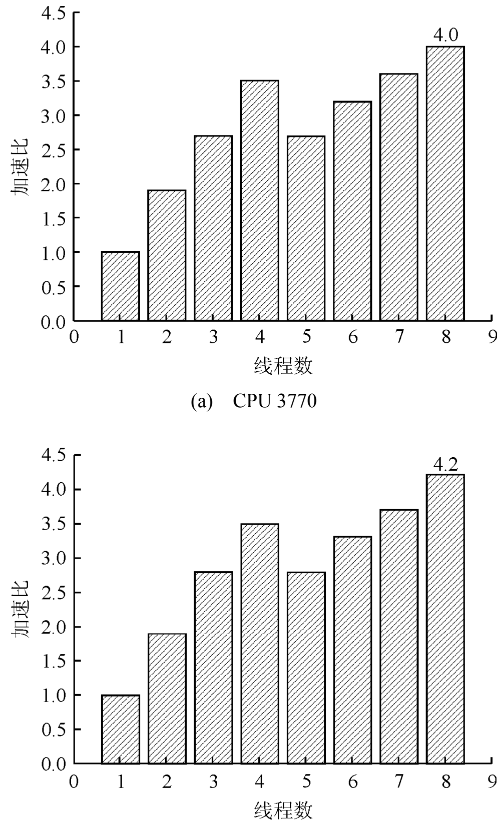
$$e_{\mathrm{f}} = S_{\mathrm{p}} / p \tag{26}$$

式中：T_{s}，T_{p} 分别为串行程序和并行程序计算时间；p 为线程数。

计算结果如图 20 所示。从图 20 可以看出，CPU 3770 的最大加速比为 4.0；CPU 4770 的最大加速比为 4.2。并行程序加速 4 倍以上，表明 OpenMP 并行效果显著。两者取得最大加速比时的线程数均为 8 个，为线程数的上限值。这说明，当使用并行机进行 OpenMP 并行计算时，一定计算规模的情况下，应设置线程数为其上限，才能取得最速效果。

CPU 3770 的并行效率为 4.0/8×100% = 50%；CPU 4770 的并行效率为 4.2/8×100% = 53%。并行程序在两台计算机上的并行效率均超过 50%，达到预期效果，表明并行算法的有效性。

从图 20 还可以看出，当线程数为 1～4 时，随着线程数的增加，加速比随之上升；当线程数超过 4 时，加速比反而下降；当线程数为 5～8 时，随着线程数的增加，加速比又随之上升。



(a)　CPU 3770

(b)　CPU 4770

图 20　加速比与线程数关系

Fig.20　Relationships between the speedup and the number of threads

决定程序计算时间(进而决定加速比)的因素包括多个，如线程数目、线程间切换开销、负载平衡等，是所有因素共同博弈的结果。当线程数分别为 1～4 和 5～8 时，线程数目起到主导作用，表现为：线程数目增加，加速比随之上升。线程数目由 4 变为 5，出现加速比下降的反常现象，主要是由于 Intel 芯片采用超线程技术所导致。线程数由 4 变为 5 时，线程数目超过了 CPU 核心数目，线程间切换开销增大，负载不平衡，所以计算时间上升，导致加速比下降。

5　结　论

本文发展了一种基于任意网格的三维中心型有限体积孔隙–裂隙渗流求解算法，并对其进行 OpenMP 并行化。主要结论如下：

(1) 算法核心

中心型有限体积法将未知量(即压力)置于单元中心处，以此减少计算量。使用串联弹簧模型在空间域进行离散，使用显式差分格式在时间域离散，

分别给出了稳态/非稳态孔隙渗流、裂隙渗流、孔隙－裂隙耦合渗流的计算公式。此外，还对边界和离散裂隙网络进行特殊处理，分别给出了边界处理公式和传递系数公式。该算法求解时使用动态松弛技术，逐个单元求解，适合并行化。

(2) 算例验证

算例验证表明，该算法在求解孔隙渗流、裂隙渗流、孔隙－裂隙耦合渗流时，与理论解或有限元解保持一致，说明了算法的正确性。与有限元法对比表明，该方法与有限元具有类似的精度，但是计算效率为显式有限元法的 8 倍。

(3) OpenMP 并行研究

OpenMP 并行研究表明，OpenMP 并行化使得该算法运算速度在 CPU i7－3770 下可提高至 4.0 倍，在 CPU i7－4770 下可提高至 4.2 倍；两台机器上的并行效率均高达 50%以上。

当使用并行机进行 OpenMP 并行计算时，一定计算规模的情况下，应设置线程数为其上限，才能取得最速效果。

使用 4 核 8 线程机器时：当线程数在 1～4 和 5～8 范围时，由于线程数目的主导作用，随着线程数目的增加，加速比随之上升；当线程数由 4 变为 5 时，加速比下降，主要是由于 Intel 芯片采用超线程技术所导致。

综上所述，本文所发展的三维中心型有限体积孔隙－裂隙渗流算法的优点是：① 可在任意网格上运行；② 能保证足够高的计算精度；③ 计算效率高；④ 适合并行化。

参考文献(References)：

[1] KAZEMI H，MERRILL L S，PORTERFIELD K L，et al. Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs[J]. SPE Journal，1976，16(6)：317－326.

[2] CIPOLLA C L，LOLON E P，ERDLE J C，et al. Reservoir modeling in shale-gas reservoirs[J]. SPE Reservoir Evaluation and Engineering，2010，13(4)：638－653.

[3] 刘　洋，李世海，刘晓宇. 基于连续介质离散元的双重介质渗流应力耦合模型[J]. 岩石力学与工程学报，2011，30(5)：951－959.(LIU Yang，LI Shihai，LIU Xiaoyu. Coupled fluid flow and stress computation model of dual media based on continuum-medium distinct element method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2011，30(5)：951－959.(in Chinese))

[4] SHEN B, STEPHANSSON O, RINNE M, et al. A fracture propagation code and its applications to nuclear waste disposal[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences，2004，41(Supp.1)：472－477.

[5] BLESSENT D，THERRIEN R，GABLE C W. Large-scale numerical simulation of groundwater flow and solute transport in discretely-fractured crystalline bedrock[J]. Advances in Water Resources，2011，34(12)：1 539－1 552.

[6] 李世海，周　东，王　杰，等. 水电能源开发中的关键工程地质体力学问题[J]. 中国科学：物理学 · 力学 · 天文学，2013，43(12)：1 602－1 616.(LI Shihai，ZHOU Dong，WANG Jie，et al. Key problem of engineering geomechanics in hydroelectric energy exploitation[J]. Scientia Sinica Physica，Mechanica and Astronomica，2013，43(12)：1 602－1 616.(in Chinese))

[7] GRANT M A，BIXLEY P F. Geothermal reservoir engineering[M]. 2nd ed. [S. l.]：Elsevier，2011：201－217.

[8] BARENBLATT G I，ZHELTOV I P，KOCHINA I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics，1960，24(5)：852－864.

[9] SAMARDZIOSKA T，POPOV V. Numerical comparison of the equivalent continuum, non-homogeneous and dual porosity models for flow and transport in fractured porous media[J]. Advances in Water Resources，2005，28(3)：235－255.

[10] LONG J C S，REMER J S，WILSON C R，et al. Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures[J]. Water Resources Research，1982，18(3)：645－658.

[11] DVERSTORP B, ANDERSSON J, NORDQVIST W. Discrete fracture network interpretation of field tracer migration in sparsely fractured rock[J]. Water Resources Research，1992，28(9)：2 327－2 343.

[12] 于青春，刘丰收，大西有三. 岩体非连续裂隙网络三维面状渗流模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(4)：662－668.(YU Qingchun，LIU Fengshou，OHNISHI Yuzo. Three-dimensional planar model for fluid flow in discrete fracture network of rock masses[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2005，24(4)：662－668.(in Chinese))

[13] 李新强，杨松青，汪小刚. 岩体随机结构面三维网络的生成和可视化技术[J]. 岩石力学与工程学报，2007，26(12)：2 564－2 569.(LI Xinqiang，YANG Songqing，WANG Xiaogang. Generation and visualization technologies of three-dimensional network of rock mass stochastic structural plane[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2007，26(12)：2 564－2 569.(in Chinese))

[14] 张　丽，刘晓宇，李世海. 裂隙岩体稳定/非稳定渗流数值模拟[J]. 岩石力学与工程学报，2009，28(增 2)：3 409－3 416.(ZHANG Li，LIU Xiaoyu，LI Shihai. Numerical simulation of steady/unsteady flow in fractured rock masses[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2009，28(Supp.2)：3 409－3 416.(in Chinese))

[15] 张奇华，邬爱清. 三维任意裂隙网络渗流模型及其解法[J]. 岩石力学与工程学报，2010，29(4)：720－730.(ZHANG Qihua，WU Aiqing. Three-dimensional arbitrary fracture network seepage model and its solution[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2010，29(4)：720－730.(in Chinese))

[16] KIM J G，DEO M D. Finite element，discrete-fracture model for

multiphase flow in porous media[J]. AIChE Journal，2000，46(6)：1 120－1 130.

[17] 张社荣，杨璐玲，钟登华. 裂隙岩体渗流场分析及其三维有限元程序设计[J]. 岩土力学，2005，26(1)：46－49.(ZHANG Sherong，YANG Luling，ZHONG Denghua. Analysis of the seepage field in fractured rocks and the design of 3-D finite element analyzing program[J]. Rock and Soil Mechanics，2005，26(1)：46－49.(in Chinese))

[18] 刘 洋，李世海，刘继棠. 裂隙岩体非稳态渗流数值模型及其应用[J]. 力学与实践，2011，33(6)：23－29.(LIU Yang，LI Shihai，LIU Jitang. Numerical model of unsteady fluid flow in fractured rock and its application[J]. Mechanics and Engineering，2011，33(6)：23－29.(in Chinese))

[19] 吕心瑞，姚 军，黄朝琴，等. 基于有限体积法的离散裂缝模型两相流动模拟[J]. 西南石油大学学报：自然科学版，2012，34(6)：123－130.(LU Xinrui，YAO Jun，HUANG Zhaoqin，et al. Study on discrete fracture model two-phase flow simulation based on finite volume method[J]. Journal of Southwest Petroleum University：Science and Technology，2012，34(6)：123－130.(in Chinese))

[20] 宋晓晨，徐卫亚. 裂隙岩体渗流模拟的三维离散裂隙网络数值模型(II)：裂隙网络的随机生成[J]. 岩石力学与工程学报，2004，23(12)：2 021－2 026.(SONG Xiaochen，XU Weiya. Numerical model of three-dimensional discrete fracture network for seepage in fractured rocks(II)：computation of steady flow[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2004，23(12)：2 021－2 026.(in Chinese))

[21] NICK H M，MATTHÄI S K. Comparison of three FE-FV numerical schemes for single- and two-phase flow simulation of fractured porous media[J]. Transport in Porous Media，2011，90(2)：421－444.

[22] CAILLABET Y，FABRIE P，LANDEREAU P，et al. Implementation of a finite-volume method for the determination of effective parameters in fissured porous media[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations，2000，16(2)：237－263.

[23] CAILLABET Y，FABRIE P，LASSEUX D，et al. Computation of large-scale parameters for dispersion in fissured porous medium using finite-volume method[J]. Computational Geosciences，2001，5(2)：121－150.

[24] GRANET S，FABRIE P，LEMONNIER P，et al. A two-phase flow simulation of a fractured reservoir using a new fissure element method[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering，2001，32(1)：35－52.

[25] KARIMI-FARD M，DURLOFSKY L J，AZIZ K. An efficient discrete-fracture model applicable for general-purpose reservoir simulators[J]. SPE Journal，2004，9(2)：227－236.

[26] 刘耀儒，杨 强，黄岩松，等. 基于双重孔隙介质模型的渗流－应力耦合并行数值分析[J]. 岩石力学与工程学报，2007，26(4)：705－711.(LIU Yaoru，YANG Qiang，HUANG Yansong，et al. Parallel numerical analysis of coupled fluid flow and stress based on dual porosity media model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2007，26(4)：705－711.(in Chinese))

[27] 刘耀儒，杨 强，覃振朝. 基于统计模型的裂隙岩体渗流场的并行数值模拟[J]. 岩石力学与工程学报，2008，27(4)：736－742.(LIU Yaoru，YANG Qiang，QIN Zhenchao. Parallel numerical simulation of fractured rock mass based on statistic model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2008，27(4)：736－742.(in Chinese))

[28] ZHANG L，ZHANG G X，WANG L X，et al. A comparative study on different parallel solvers for nonlinear analysis of complex structures[J]. Mathematical Problems in Engineering，2013：764237.

[29] MA Z S，FENG C，LIU T P，et al. A GPU accelerated continuous-based discrete element method for elastodynamics analysis[J]. Advanced Materials Research，2011，320：329－334.

[30] LIU J T，MA Z S，LI S H，et al. A GPU accelerated red-black SOR algorithm for computational fluid dynamics problems[J]. Advanced Materials Research，2011，320：335－340.

[31] WANG L X，LI S H，ZHANG G X，et al. A GPU-based parallel procedure for nonlinear analysis of complex structures using a coupled FEM/DEM approach[J]. Mathematical Problems in Engineering，2013，618980：1－15.

[32] TAKAHASHI T，HAMADA T. GPU-accelerated boundary element method for Helmholtz′ equation in three dimensions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2009，80(10)：1 295－1 321.

[33] SNOW D T. A parallel plate model of fractured permeable media[Ph. D. Thesis][D]. Berkeley：University of California，1965.

[34] 仵彦卿，张倬元. 岩体水力学导论[M]. 成都：西南交通大学出版社，1995：45－48.(WU Yanqing，ZHANG Zhuoyuan. An introduction to rock mass hydraulics[M]. Chengdu：Southwest Jiaotong University Press，1995：45－48.(in Chinese))

[35] WIKIPEDIA. OpenMP[EB/OL]. http：//zh.wikipedia.org/wiki/OpenMP. 2014.

[36] 何 杨，柴军瑞，唐志立，等. 三维裂隙网络非稳定渗流数值分析[J]. 水动力学研究与进展：A 辑，2007，22(3)：338－344.(HE Yang，CHAI Junrui，TANG Zhili，et al. Numerical analysis of 3D unsteady seepage through fracture network in rock mass[J]. Journal of Hydrodynamics：Series A，2007，22(3)：338－344.(in Chinese)).

[37] TATOMIR A. Numerical investigations of flow through fractured porous media[M. S. Thesis][D]. Stuttgart：University of Stuttgart，2007.

[38] LEI Z，ROUGIER E，KNIGHT E E，et al. A framework for grand scale parallelization of the combined finite discrete element method in 2D[J]. Computational Particle Mechanics，2014，1(3)：307－319.