

DOI : 10.11779/CJGE201507016

含半圆形凸起的直角域对平面 SH 波的地震动

齐 辉¹, 蔡立明¹, 潘向南^{1,2}, 高 春^{1,3}

(1. 哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100190;
3. 哈尔滨学院土木工程系, 黑龙江 哈尔滨 150086)

摘 要:按 Green 函数和积分方程方法, 分析了含半圆形凸起的直角域对平面 SH 波的稳态响应, 讨论了由凸起散射所造成的地震动。对含半圆形凸起的直角域做分区, 分为直角域和半圆域, 按镜像方法构造直角域的 Green 函数, 按 Graf 加法公式和波函数展开法构造半圆域的 Green 函数。对直角域和半圆域做契合, 在契合界面施加一组分布力, 使直角域和半圆域中的位移场和应力场满足契合界面上的连续性条件, 得到分布力的定解积分方程组。数值求解, 得到契合界面上的应力分布和地表位移幅值, 结果表明入射波的波数和角度以及凸起与直角域垂直边界的距离对凸起散射的影响。

关键词: SH 波; 散射; 半圆形凸起; Green 函数; 直角域

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2015)07-1294-06

作者简介:齐 辉(1963-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事弹性波动理论的研究与教学。E-mail: panxiangnan@hrbeu.edu.cn.

Ground motion of right-angle domain with a semi-circular cylindrical hill subjected to plane SH waves

QI Hui¹, CAI Li-ming¹, PAN Xiang-nan^{1,2}, GAO Chun^{1,3}

(1. College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; 2. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190; 3. Department of Civil Engineering, Harbin University, Harbin 150086, China)

Abstract: Steady state responses in a right-angle domain with a semi-circular cylindrical hill to plane SH waves are analyzed, and the ground motion caused by hill scattering is discussed by using the Green function method and the integral equation method. The right-angle domain with a semi-circular hill is divided into two domains: Domain is right-angle space and Domain is semi-circular space. Green functions for the two domains are established, respectively: the image method is employed in Domain, and the Graf addition formula and wave function expansion method are employed in Domain. The conjunction condition is introduced between Domain and Domain. Distributed forces along conjunctive interface are adopted to formulate displacement and stress fields in the two domains which are continuous on the interface, and an integral equation for unknown forces is presented. Distribution of stress on the conjunctive interface and displacement amplitude on the horizontal surface are numerically solved to present the effects of incident wave number, angle and distance between hill and vertical bound of the right-angle domain on SH wave scattering of hill.

Key words: SH wave; scattering; semi-circular hill; Green function; right-angle domain

0 引 言

弹性波的传播和散射问题一直备受数理科学家和工程师们的广泛关注。弹性波对局部地形的散射造成显著的场地效应, 岩土和地震工程界对此进行了大量的研究。

对于最为简单的弹性波模型, 反平面剪切波, 即 SH 波, 早在 20 世纪 70 年代, Trifunac^[1-2]和 Wong 等^[3-4]就分别研究了半空间中半圆形和半椭圆形凹陷对 SH

波的散射, 到了 20 世纪 90 年代, 袁晓铭等^[5-8]按波函数展开法分别研究了圆弧形凹陷和凸起对平面 SH 波的散射, 崔志刚等^[9]也对圆弧形凸起地形的 SH 波散射做了研究, 21 世纪以来, 曹欣荣^[10]等研究了任意形状凸起地形的 SH 波散射, 最近, 张郁山^[11]研究了圆

基金项目: 黑龙江省自然科学基金项目(A201307)

收稿日期: 2014-04-22

弧状沉积谷地对 SH 波的散射, Lee 等^[12]、Amornwongpaibun 等^[13]研究了半空间中的两类椭圆形凸起的 SH 波散射, 巴振宁等^[14]研究了层状饱和半空间中沉积谷地对 SH 波的三维散射。

半空间中的凸起对 SH 波的散射问题的研究较为丰富, 而 1/4 空间即直角域中的凸起对 SH 波的散射问题的相关研究还很匮乏。最近, 齐辉等^[15]根据分区契合思想按波函数展开法研究了直角域中非等腰三角形凸起对 SH 波的散射。

本文按照分区契合的思想, 构造 Green 函数, 运用积分方程方法, 研究了含半圆形凸起的直角域对平面 SH 波的稳态散射, 进行了数值计算, 并对结果做了误差分析, 给出凸起和直角域的契合面上的应力分布以及地表位移幅值。

1 数学物理模型

含半圆形凸起的直角域如图 1 所示, 凸起的圆心为 O_C , 其与直角域的垂直边界的距离为 d , 半径为 R 。直角域为弹性、均匀、各向同性, 其剪切模量为 μ , 质量密度为 ρ 。以弹性直角域的角点 O 为原点, 建立直角坐标系 (O, x, y) , 直角域和凸起中的质点的反平面位移 w 满足波动方程:

$$\mu \Delta w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

入射波是稳态 SH 平面波, 其反平面位移 w_i 为

$$w_i = w_i(z) \exp(-i\omega t)$$

$$= W \exp[ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)] \exp(-i\omega t) \quad (2)$$

$$k = \omega \sqrt{\rho / \mu} \quad (3)$$

式中, W 为位移的振幅, α 为入射角, ω 为入射波的圆频率, k 为波数。

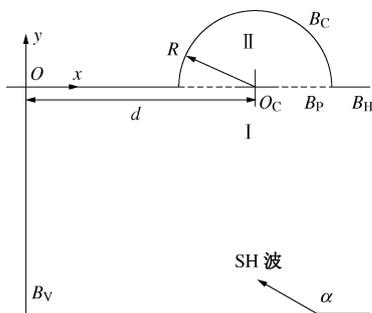


图 1 模型示意图

Fig. 1 Sketch of model

按分量变量法, 考虑稳态响应, 略去时间谐和因子 $\exp(-i\omega t)$, 得到反平面位移 w 关于空间变量的 Helmholtz 方程 构成本文对应的数学物理定解问题的泛定方程:

$$\Delta w + k^2 w = 0 \quad (4)$$

对含半圆形凸起的直角域做分区, 得到一个直角域 和一个半圆域 。在它们各自区域的边界上剪应力为零, 即直角域的垂直边界 B_V 和水平边界 B_H , 以及半圆域的圆柱边界 B_C 和契合边界 B_P , 均为自由边界。考虑契合条件, 要求 和 的位移和应力在契合边界 B_P 平面上连续。以上构成本文对应的数学物理定解问题的边界条件。

2 Green 函数

2.1 中的 Green 函数

按 Green 函数方法求解 构建直角域 中的 Green 函数, 如图 2 所示。引入复变量 $z = x + iy$, 在契合边界 B_P 平面上的 x_0 点处施加稳态的点源荷载, 其分离时间变量形式为 $\delta(z - x_0)$, $\delta(\square)$ 是 Dirac 函数。按镜像方法, 中的 Green 函数, 即点源荷载产生的稳态位移函数, $G_I(z, x_0)$ 可写作式 (5), $H_0^{(1)}(\square)$ 是 0 阶第 1 种 Hankel 函数。

$$G_I(z, x_0) = \frac{i}{2\mu} [H_0^{(1)}(k|z - x_0|) + H_0^{(1)}(k|z + x_0|)] \quad (5)$$

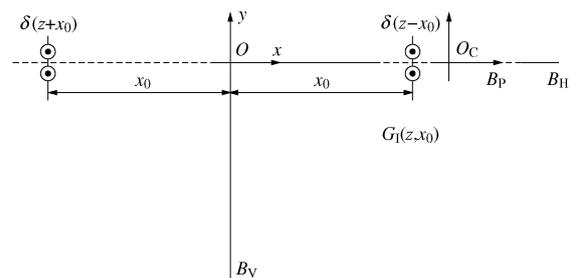


图 2 中的 Green 函数

Fig. 2 Green function in

按照式 (5) 构造的 Green 函数的位移场关于水平边界 B_H 和垂直边界 B_V 镜面对称, 其对应的应力场满足 B_H 和 B_V 平面上的应力自由条件, 即 的边界条件。

2.2 中的 Green 函数

按 Green 函数方法求解 构造半圆域 中的 Green 函数, 如图 3 所示。对 的圆柱边界 B_C 做延拓, 使之由半圆柱面延拓为整个圆柱面, 于是半圆域被延拓为圆域。按镜像方法, 由于契合界面 B_P 是延拓圆域的对称面, 界面上的点源荷载产生的 Green 函数满足契合边界 B_P 平面上的应力自由条件。这样, 在契合界面 B_P 上的 x_0 点处施加稳态的点源荷载 $\delta(z - x_0)$, 延拓圆域中的 Green 函数 $G_{II}(z, x_0)$ 满足式:

$$G_{II}(z, x_0) = \frac{i}{2\mu} H_0^{(1)}(k|z - x_0|) + w_s(z) \quad (6)$$

式中, $w_s(z)$ 是延拓圆域中驻波, 按 Fourier-Bessel 波函数展开法,

$$w_s(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n J_n(k|z-d|) \left(\frac{z-d}{|z-d|} \right)^n, \quad (7)$$

$J_n(\square)$ 为 n 阶 Bessel 函数, A_n 是波函数级数的待定系数。

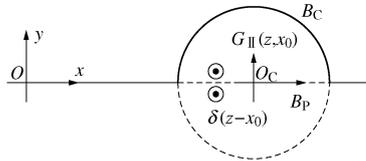


图3 中的 Green 函数
Fig. 3 Green function in

由延拓圆柱面 B_C 上的应力自由条件来确定波函数级数的待定系数 A_n 。如图 4 所示, 参照文献[5, 6] 的方法, 按照 Graf 加法公式, 对 $H_0^{(1)}(k|z-x_0|)$ 做级数展开, 得

$$H_0^{(1)}(kr_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(1)}(kr_C) J_n[k(x_0-d)] \left(\frac{z-d}{|z-d|} \right)^n, \quad (8)$$

式中, $r_0 = |z-x_0|$, $r_C = |z-d|$, $H_n^{(1)}(\square)$ 是 n 阶第 1 种 Hankel 函数。代入式(6), 得到 Green 函数 $G_{II}(z, x_0)$ 的表达式:

$$G_{II}(z, x_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n \left(\frac{z-d}{|z-d|} \right)^n, \quad (9)$$

式中,

$$G_n = \frac{i}{2\mu} H_n^{(1)}(kr_C) J_n[k(x_0-d)] + A_n J_n(kr_C), \quad (10)$$

根据应力和位移的关系, 得延拓圆柱面 B_C 上的应力表达式:

$$\tau_{rcz} = \mu \frac{\partial G_{II}(z, x_0)}{\partial r_C} = \mu \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_n}{\partial r_C} \left(\frac{z-d}{|z-d|} \right)^n, \quad (11)$$

式中, $r_C = R$, 由此, 得到待定系数 A_n 的表达式:

$$A_n = -\frac{i}{2\mu} J_n[k(x_0-d)] \frac{H_{n-1}^{(1)}(kR) - H_{n+1}^{(1)}(kR)}{J_{n-1}(kR) - J_{n+1}(kR)}. \quad (12)$$

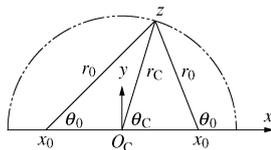


图4 Graf 加法公式
Fig. 4 Graf addition formula

3 定解积分方程

如图 5 所示, 按积分方程的方法处理契合边界 B_P 平面上位移和应力的连续性条件。含半圆形凸起的直角域的分区直角域 和半圆域, 被契合边界 B_P^+ 平面

和 B_P^- 平面剖开。分离稳态的时间变量, 略去谐和函数 $\exp(i\omega t)$, 考虑 和 的相互作用, 分别在 B_P^+ 平面和 B_P^- 平面上施加一组出入平面的分布力 $f(x_0)$, 按照上文求得的 Green 函数, 分别构造 和 中的位移场 w_I 和 w_{II} ,

$$w_I(z) = w_i(z) + w_r(z) + \int_{d-R}^{d+R} G_I(z, x_0) f(x_0) dx_0, \quad (13)$$

$$w_{II}(z) = -\int_{d-R}^{d+R} G_{II}(z, x_0) f(x_0) dx_0, \quad (14)$$

式中, w_r 是直角域中的反射波,

$$w_r(z) = W \exp[ik(x \cos \alpha - y \sin \alpha)] + W \exp[ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)] + W \exp[ik(-x \cos \alpha - y \sin \alpha)], \quad (15)$$

按照平面 SH 波的镜像方法^[16] 构造的位移场 w_I 和 w_{II} 满足契合边界 B_P^+ 平面和 B_P^- 平面上的剪应力自由条件, 显然也满足应力的连续性条件。

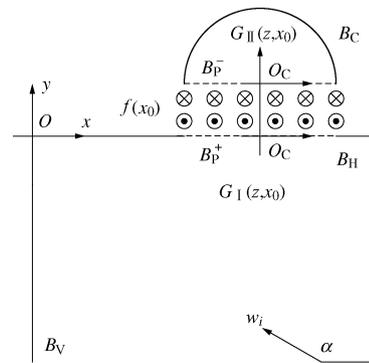


图5 契合条件

Fig. 5 Conjunction condition

这样, 契合边界 B_P 上的位移连续性条件就成为本文对应数学物理问题的定解条件, 得

$$w_i + w_r + \int_{d-R}^{d+R} [G_I(z, x_0) + G_{II}(z, x_0)] f(x_0) dx_0 = 0, \quad (16)$$

式中, $z = x \in [d-R, d+R]$ 。注意到 0 阶第一种 Hankel 函数 $H_0^{(1)}(\square)$ 在宗量 0 点的渐近性, 可知 Green 函数 $G_I(z, x_0)$ 和 $G_{II}(z, x_0)$ 在源点处的奇异性, 由此, 按照直接离散法, 定解积分方程(16), 求得契合边界 B_P 上的分布力 $f(x_0)$ 。这样, 本文以式(13) (14) 分区地确定了含凸起的直角域中的位移场, 得到了对应的数学物理定解问题的解析解。

4 数值算例

4.1 误差分析

在具体的数值计算中, 按照直接离散法求解积分方程, 所取的节点个数为 M , 按照波函数展开法构造的驻波, 取波函数级数的中间 $2N+1$ 项截断, 它们决定了数值计算的精度。

求解所得的半圆域 的位移场在圆柱边界 B_C 上

的应力分布可以用来校核数值结果的精度。如图 6 所示, 纵轴表示动应力集中因子 DSCF (dynamic stress concentrations factor) 的数值,

$$DSCF = \frac{|\tau|}{Wk\mu} \quad (17)$$

式中, τ 为对应的动应力, 其值为复数, $|\tau|$ 为它的模, 代表过某点的某截面上的应力的时间幅值。

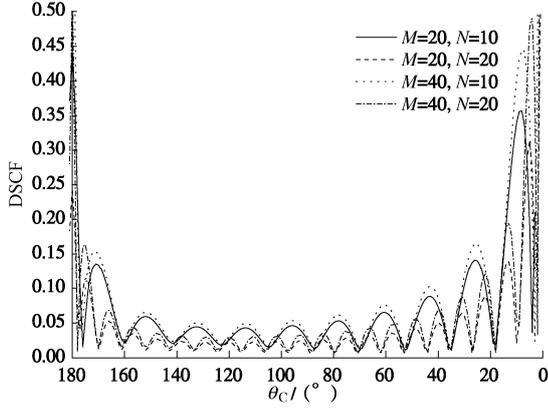


图 6 凸起柱面上的应力分布

Fig. 6 Distribution of DSCF on cylindrical surface of hill ($kR=2$, $\alpha=180^\circ$, $d=100R$)

求解所得的直角域的位移场和半圆域的位移场在契合边界 B_p 平面上的位移差同样用来校核数值结果的精度。如图 7 所示, 纵轴表示位移差 Δw ,

$$\Delta w = \frac{|w_I - w_{II}|}{W} \quad (18)$$

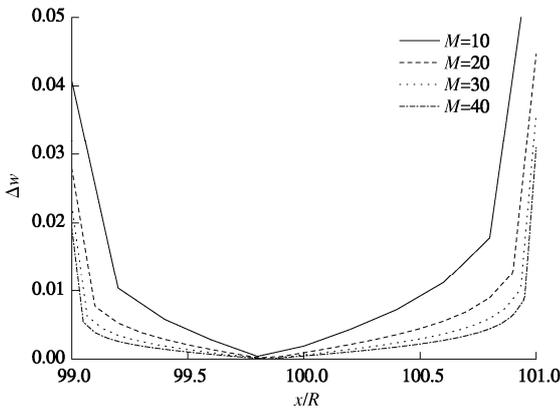


图 7 契合面上的位移差

Fig. 7 Displacement difference on conjunctive interface ($kR=0.1$, $\alpha=180^\circ$, $d=100R$)

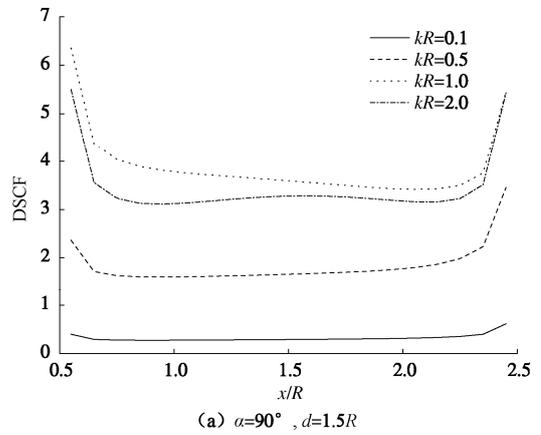
观察图 6 可知: 随着 N 的增大, 圆柱边界 B_c 上的动应力集中因子 DSCF 迅速地减小, 虽然在半圆形凸起的两端, DSCF 仍有较大的数值, 这反映了凸起角点处的应力奇异性。观察图 7 可知: 随着 M 的增大, 契合边界 B_p 上的位移差 Δw 迅速地减小, 虽然在契合边界的两端, Δw 仍有较大的数值, 这同样反映了凸起角点处的应力奇异性。由此推知, 适当地选取参数

M 和 N 的大小, 就可以保证数值算例足够的精度。

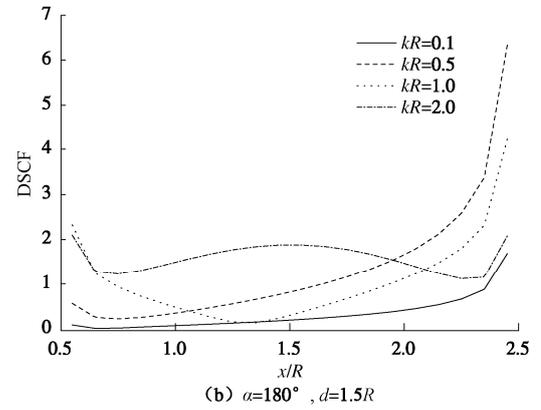
4.2 契合面应力分布

以半圆形凸起的半径 R 为参考长度, 分别计算契合边界 B_p 平面上的动应力分布, 如图 8 所示, 纵轴是动应力集中因子 DSCF 的数值。

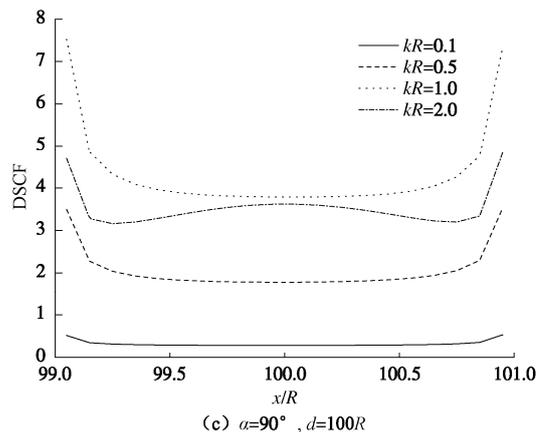
由图可知: 随着入射波的波数 k 的增加, 契合面上的动应力也逐渐增加, 当波数 k 达到某个阈值时, 随着波数 k 的增加, 契合面上的动应力反而减小, 最终趋于稳定。SH 波的入射角 α 很大程度地影响了契合面上动应力的大小和分布。契合面上的动应力还与凸起的圆心 O_c 与垂直边界 B_v 的距离 d 有关, 一般而言, 距离 d 的影响较波数 k 和入射角 α 的影响要小。



(a) $\alpha=90^\circ$, $d=1.5R$



(b) $\alpha=180^\circ$, $d=1.5R$



(c) $\alpha=90^\circ$, $d=100R$

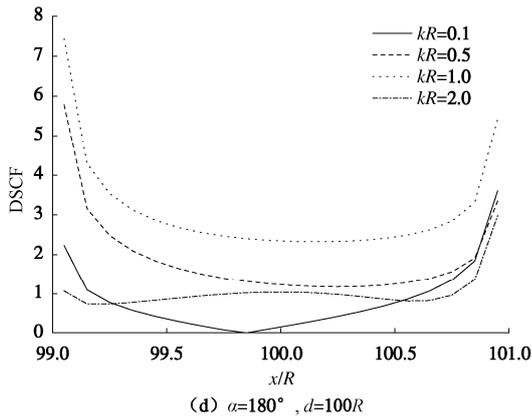


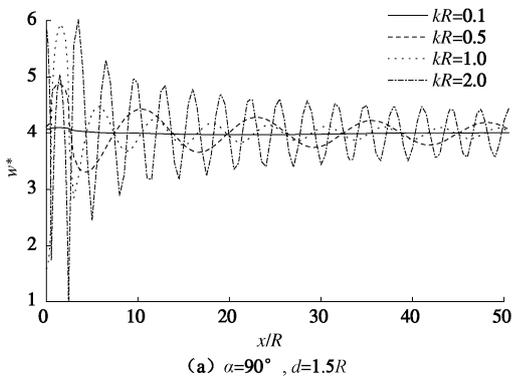
图 8 契合面上的应力分布

Fig. 8 Distribution of DSCF on conjunctive interface

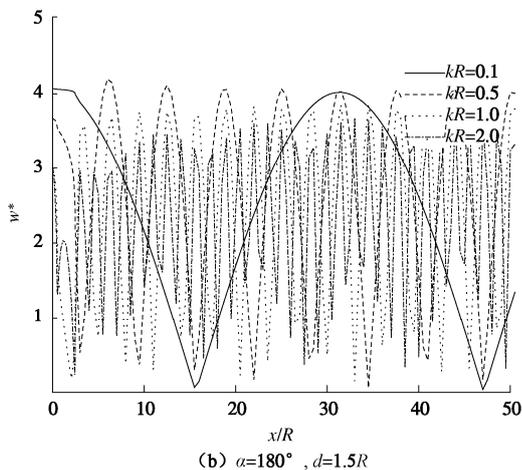
4.3 地表位移幅值

按式(19),计算地表位移幅值 w^* ,如图9所示,图中,纵轴是 w^* 的数值。图9(a)~(d)分别给出入射角 $\alpha=90^\circ, 180^\circ$, 距离 $d=1.5R, 100R$ 时,不同的无量纲波数 $kR=0.1, 0.5, 1, 2$ 下,含凸起的直角域的上地表位移幅值的分布。

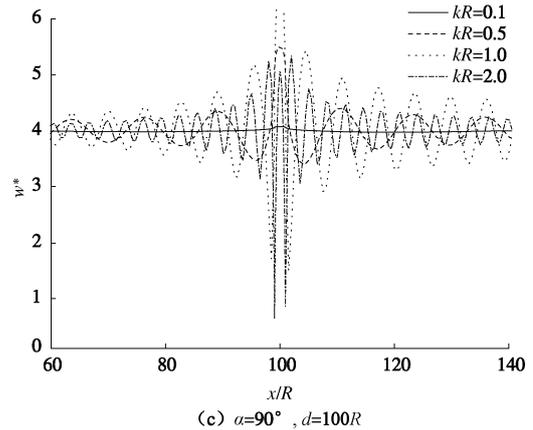
$$w^* = \begin{cases} \frac{|w_I(z)|}{W} & (z \in I) \\ \frac{|w_{II}(z)|}{W} & (z \in II) \end{cases} \quad (19)$$



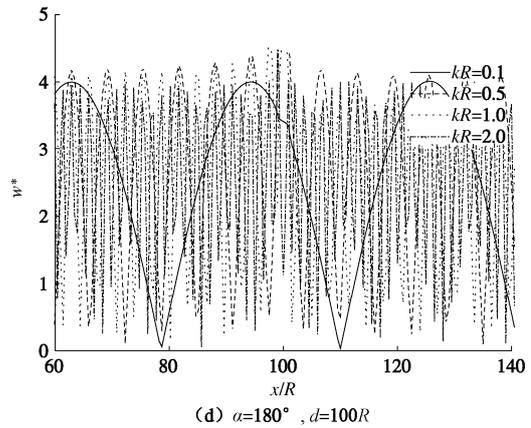
(a) $\alpha=90^\circ, d=1.5R$



(b) $\alpha=180^\circ, d=1.5R$



(c) $\alpha=90^\circ, d=100R$



(d) $\alpha=180^\circ, d=100R$

图 9 地表位移幅值的分布

Fig. 9 Distribution of displacement amplitude on surface

由图可知：随着入射波的波数 k 的增大，地表位移幅值也逐步增大，直至趋于稳定。在半圆形凸起附近，地表位移幅值有较大的波动，这种波动随着波数 k 的增大而增大，一般而言，地表位移幅值的最大值也在凸起上。地表位移幅值的大小和分布还与入射角 α 和距离 d 有关， 90° 入射时凸起散射所造成的位移幅值要远大于 180° 入射时；当距离 d 较小时凸起散射所造成的位移幅值略大于 d 较大时。

5 结 语

本文所用的分区契合方法，不仅适用于直角域中 SH 波散射的半圆形凸起问题，还可以应用于其他形状的柱型凸起问题，结合积分方程方法，可以获得较高的精度，这种方法对于弹性动力学反平面运动的数学物理问题的求解具有一定的价值。数值算例所给出的凸起半圆域和直角域的契合面上的应力分布以及地表位移幅值与入射波波数和角度以及凸起与垂直边界的距离的关系，对于具体的工程应用有一定的意义。

参考文献：

[1] TRIFUNAC M D. Surface motion of a semi-cylindrical

- alluvial valley for incident plane SH waves[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1971, **61**(6): 1755 – 1770.
- [2] TRIFUNAC M D. Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon[J]. Earth Engineering and Structural Dynamics, 1973, **1**: 267 – 281.
- [3] WONG H L, TRIFUNAC M D. Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1974, **64**(5): 1389 – 1403.
- [4] WONG H L, TRIFUNAC M D. Scattering of plane SH waves by a semi-elliptical canyon[J]. Earth Engineering and Structural Dynamics, 1974, **3**: 157 – 169.
- [5] 袁晓铭, 廖振鹏. 圆弧形凹陷地形对平面SH波散射问题的级数解答[J]. 地震工程与工程振动, 1993, **13**(2): 1 – 11. (YUAN Xiao-ming, LIAO Zhen-peng. Series solution for scattering of plane SH waves by a canyon of circular-arc cross section[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1993, **13**(2): 1 – 11. (in Chinese))
- [6] YUAN X, LIAO Z P. Scattering of plane SH waves by a cylindrical canyon of circular-arc cross-section[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1994, **13**(6): 407 – 412.
- [7] 袁晓铭, 廖振鹏. 任意圆弧形凸起地形对平面SH波的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1996, **16**(2): 1 – 13. (YUAN Xiao-ming, LIAO Zhen-peng. Scattering of plane SH waves by a cylindrical hill of circular-arc cross section[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1996, **16**(2): 1 – 13. (in Chinese))
- [8] YUAN X, LIAO Z P. Surface motion of a cylindrical hill of circular-arc cross-section for incident plane SH waves[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1996, **15**(3): 189 – 199.
- [9] 崔志刚, 邹永超, 刘殿魁. SH波对圆弧形凸起地形的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1998, **18**(4): 8 – 14. (CUI Zhi-gang, ZHOU Yong-chao, LIU Dian-kui. Scattering of plane SH wave by a cylindrical hill of circular arc cross section[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1998, **18**(4): 8 – 14. (in Chinese))
- [10] 曹欣荣, 宋天舒, 刘殿魁. 任意形状凸起地形对平面SH波的散射[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(9): 976 – 982. (CAO Xin-rong, SONG Tian-shu, LIU Dian-kui. Scattering of plane SH wave by a cylindrical hill of arbitrary shape[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, **22**(9): 976 – 982. (in Chinese))
- [11] 张郁山. 圆弧状沉积谷地在平面SH波入射下的动力响应[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(1): 1 – 6. (ZHANG Yu-shan. Dynamic response of arc-layered alluvial valley under incidence of plane SH waves[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(1): 1 – 6. (in Chinese))
- [12] LEE V W, AMORNWONGPAIBUN A. Scattering of anti-plane (SH) waves by a semi-elliptical hill: — Shallow hill[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2013, **52**: 116 – 125.
- [13] AMORNWONGPAIBUN A, LEE V W. Scattering of anti-plane (SH) waves by a semi-elliptical hill: — deep hill[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2013, **52**: 126 – 137.
- [14] 巴振宁, 梁建文, 梅雄一. 斜入射平面SH波在层状饱和半空间中沉积谷地周围的三维散射[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(3): 476 – 486. (BA Zhen-ning, LIANG Jian-wen, MEI Xiong-yi. Three-dimensional scattering of obliquely incident plane SH waves in alluvial valley embedded in layered saturated half-space[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(3): 476 – 486. (in Chinese))
- [15] 齐辉, 郭晶, 杨杰. 直角域非等腰三角形凸起对SH波的散射与地震动[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(18): 157 – 162. (QI Hui, GUO Jing, YANG Jie. Scattering of SH-wave and ground motion induced by scalene triangular hill on a right-angle field[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, **31**(18): 157 – 162. (in Chinese))
- [16] 折勇, 齐辉, 杨在林. SH波对直角平面区域内圆形孔洞的散射与地震动[J]. 应用力学学报, 2008, **25**(3): 392 – 398. (SHI Yong, QI Hui, YANG Zai-lin. Scattering of SH-wave by circular cavity in right-angle plane and seismic ground motion[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2008, **25**(3): 392 – 398. (in Chinese))