

DOI: 10.7511/jslx201604027

SPH 方法 Delaunay 三角剖分与自由液面重构

杨秀峰^{1,2}, 刘谋斌^{*3}

(1. 中国科学院力学研究所, 流固耦合系统力学重点实验室, 北京 100190;

2. 爱荷华州立大学 机械工程系, 爱荷华州埃姆斯 50011, 美国; 3. 北京大学 工学院, 北京 100871)

摘要:光滑粒子法(SPH)作为一种拉格朗日型无网格方法,兼具欧拉网格方法和拉格朗日网格方法的优势,已经成功应用于科学和工程的众多领域。SPH 方法后处理一般基于无规则分布的粒子,不如网格类方法后处理简便、直接。另外,SPH 方法模拟自由液面流动等问题时,通过粒子位置难以重构自由液面的准确位置。发展一种基于 Delaunay 三角剖分的 SPH 后处理方法,即先基于 SPH 粒子位置利用 Delaunay 三角剖分建立三角网格,然后将粒子信息转化成网格单元/节点信息,从而可以在三角网格上进行后处理,实现基于网格方法的后处理功能,并可以在三角网格上直接提取或重构自由液面。将本文的方法应用到液滴碰撞和溃坝流 SPH 模拟结果的后处理中,得到了非常好的结果,表明本文的方法有效可靠。

关键词:SPH; Delaunay 三角剖分; 自由表面; 后处理

中图分类号:O35; O242.21

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2016)04-0594-05

1 引言

光滑粒子法 SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)作为一种拉格朗日型粒子方法,也是最早的无网格方法^[1-3]。其基本思想是将连续物质离散成可以运动的粒子,再利用核函数把相邻的粒子关联起来,并在粒子上建立控制方程的离散形式,然后通过求解离散形式的控制方程来更新粒子的位置和其他物理量。SPH 方法兼具欧拉网格方法和拉格朗日网格方法的优势,能够处理大变形问题,方便追踪运动界面和自由表面。经过几十年的发展,SPH 方法在天体物理学、流体力学、水下爆炸和高速碰撞等方面都得到了广泛的应用^[3-6]。

与其他无网格粒子方法类似,SPH 方法的后处理基于无规则分布,且没有固定关联的粒子,因此 SPH 方法的后处理不如网格类方法的后处理简便直接。现有的后处理软件一般都是基于网格的,不能直接根据粒子位置和信息画出流场的流线、等值线和自由表面等。这是因为在计算流体与计算固体力学问题中^[7],广泛应用的数值模拟方法大多是基于网格建立离散格式。所以对于 SPH 等粒子

方法而言,一种可能的途径是基于 SPH 粒子建立合适的网格,并将粒子的相关信息转换成网格的相关信息,然后就可以直接使用现有的后处理软件的各种网格处理功能。

另外,SPH 方法在模拟自由液面流动问题时,为了严格实施自由液面条件(如在完全不可压 SPH 模型中)和表面张力模型(SPH 方法模拟微尺度流动问题时),需要精确定位自由液面的位置。传统通过粒子位置确定自由液面的方法一般比较粗糙,与真实的自由液面位置有一定偏差。

Delaunay 三角剖分是计算几何中的一种严格的三角形网格生成方法^[8,9],能够把散点集转换成以散点为顶点的三角形网格,且生成的网格具有整体最优的优点。因此,可以利用 Delaunay 三角剖分将 SPH 粒子转换成网格进行后处理^[10],也可以利用 Delaunay 三角剖分对其他无网格粒子方法的计算结果进行后处理^[11,12]。在应用 SPH 方法模拟涉及运动、翻卷、乃至破碎的自由液面流动时,可以基于 Delaunay 三角网格精确重构自由液面,为实施自由液面条件和表面张力模型提供依据。

本文发展了以 Delaunay 三角剖分为基础的 SPH 后处理方法与程序,利用 Delaunay 三角剖分将 SPH 粒子转化成三角形网格,基于 Delaunay 三角网格重构自由液面。通过液滴碰撞和溃坝两个典型的算例验证了这一基于 SPH 粒子位置的 Delaunay 三角剖分与自由液面重构方法的有效性。

收稿日期:2016-05-08;修改稿收到日期:2016-06-10.

基金项目:国家自然科学基金(11302237,11172306)资助项目.

作者简介:刘谋斌*(1970-),男,博士,研究员

(E-mail:mbliu@pku.edu.cn);

杨秀峰(1985-),男,博士,助理研究员.

2 Delaunay 三角剖分

Delaunay 三角剖分是一种具有严格的计算几何基础的三角形网格生成方法,具有两个重要的性质,空外接圆性和最小角最大性。空外接圆性是指在 Delaunay 三角形网中任一三角形的外接圆内不会有其他点存在。最小角最大性是指在散点集可能形成的各种三角剖分中,Delaunay 三角剖分所形成的三角形的最小角最大。因此,Delaunay 三角网格是最接近于规则化的三角网格,即在两个相邻的三角形构成凸四边形的对角线,在相互交换后,六个内角的最小角不再增大。由于具有空外接圆和最小角最大的性质,Delaunay 三角剖分公认为是一种优异的三角剖分,在实际中也得到广泛的应用,如科学计算可视化、有限元分析以及地学分析等。

构建 Delaunay 三角网的算法主要有逐点插入法、分治法和生长法。逐点插入法的优点是实现简单和占用内存较少,但时间复杂度较大。分治法的时间复杂度较小,但占用内存较多。生长法效率较低,很少采用。本文采用相对简单的逐点插入法。

逐点插入法最早是由 Lawson^[9]提出来的,基本思路是先构建一个能够包围所有离散点的辅助三角形,然后逐个插入离散点,生成新的三角形,并进行局部优化,直到所有点插入完毕,最后再删除辅助三角形以及与辅助三角形公用顶点的三角形。具体步骤如下。

(1) 构造一个足够大的辅助三角形,包围所有离散点,即所有离散点都处在辅助三角形内部。

(2) 将点集中的点依次插入,在三角形链表中找出其外接圆包含插入点的三角形(称为该点的影响三角形),删除影响三角形的公共边,将插入点同影响三角形的全部顶点连接起来,如图 1 所示,从

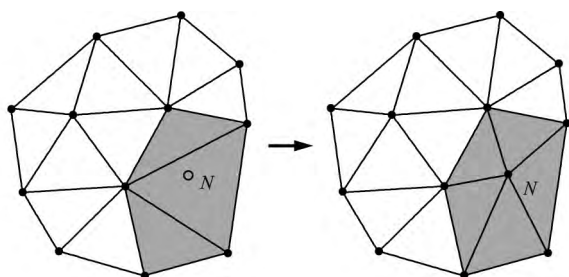


图 1 在网格中插入一个新点时,会影响局部网格并生成新的网格

Fig. 1 When a new point is added to the mesh, it will change the local mesh and generate new mesh

而完成一个点在 Delaunay 三角形链表中的插入。

(3) 根据优化准则对局部新形成的三角形进行优化。具体做法是先将两个具有共同边的三角形合成一个四边形;再以最大空外接圆准则作检查,看其中一个三角形的不在公共边上的那个顶点是否在另一个三角形的外接圆之内;如果在,则将对角线对调,即边翻转,如图 2 所示。

(4) 循环执行上述第(2)步和第(3)步,直到所有离散点插入完毕。

(5) 删除辅助三角形,以及所有以辅助三角形的顶点为顶点的三角形。

上述基于散点的构网算法理论严密且唯一性好,网格满足空圆特性,较为理想。由其逐点插入的构网过程可知,遇到非 Delaunay 边时,通过删除调整,可以构造形成新的 Delaunay 边。在完成构网后,增加新点时,无需对所有的点进行重新构网,只需对新点的影响三角形范围进行局部调整,且局部调整的方法简单易行。同样,点的删除和移动也可快速动态地进行。

在实际应用中,这种构网算法当点集较大时速度较慢,如果点集范围是非凸区域或者存在内环,则会产生不合理三角形,又叫非法三角形。因此需要采取适当的方法删除非法三角形。

3 基于 SPH 粒子的三角剖分

在使用 Delaunay 三角剖分将 SPH 粒子数据转化成网格数据时,需要考虑具体的物理意义。有些网格可能是不合理的或不需要的,这就需要在生成网格时进行相应的调整或修改。

图 3 是直接使用第 2 节所述方法生成的 Delaunay 三角网格。可以看出,网格的节点正是粒子的位置。需要注意的是,粒子分布中间的孔也生成了网格,这部分网格是不合理的,需要删除。由于 SPH 粒子是大致均匀分布的,可以通过限制

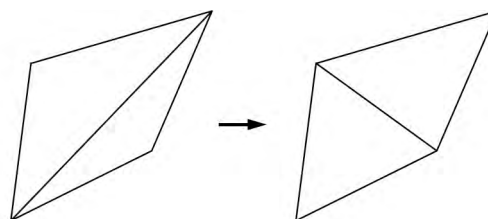


图 2 边翻转操作
Fig. 2 Flip operation

三角形的边长来生成合理的三角网格。具体做法是,先给出允许的最大边长 B_{max} ,当三角形的某个边长大于 B_{max} 时,就把该三角形删除。需要注意的是,如果 B_{max} 的取值过大,会残留一些不合理三角形;如果 B_{max} 的取值过小,则会删除原本合理的三角形。本文取 B_{max} 为 2 倍粒子间距。图 4 是删除不合理三角形后的网格,中间的孔中不再有网格。

SPH 粒子本身是有属性的,比如在模拟流体问题时,可能包含流体粒子和壁面粒子或虚粒子。在生成网格时,我们可能并不需要那些三个顶点都是壁面粒子或虚粒子的三角形,这时也可以把它们删除。

图 5 是把中间三层粒子当作壁面粒子或虚粒子时生成的网格。有两种方法,一种是先以所有粒子为基础生成网格,再删除顶点全是壁面粒子或虚粒子的网格;另一种是先删除不需要的粒子,然后

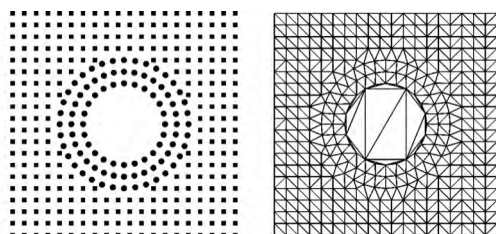


图 3 粒子分布(左)与对应的 Delaunay 三角网格(右)
Fig. 3 Particle distribution (left) and the corresponding Delaunay triangular mesh (right)

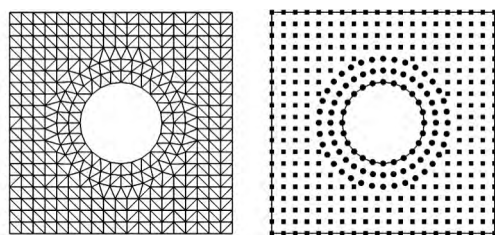


图 4 删除不合理三角形后的三角网格(左)和边界(右)
Fig. 4 Triangular mesh (left) and boundary mesh (right) without unreasonable triangles

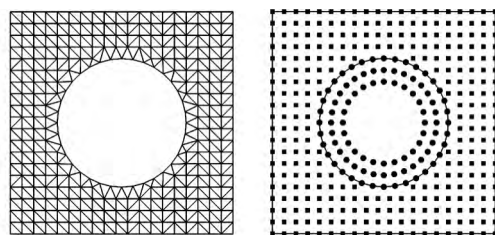


图 5 限制内层边界粒子时生成的三角网格(左)和边界(右)
Fig. 5 Triangular mesh (left) and boundary mesh (right) without considering the inner boundary particles

生成网格。两种方法得到的结果相同,但后一种方法效率更高,耗时更少。

4 应用算例

将上述基于 Delaunay 三角剖分的 SPH 后处理方法应用于两个流体力学的典型算例,以检验本文方法的有效性和可靠性。对于每一个算例,先用 SPH 方法对算例进行模拟,得到每一时刻的 SPH 粒子的分布结果;然后利用 Delaunay 三角剖分方法将粒子转换成对应的网格。

4.1 液滴碰撞

两个相距一段距离的相同大小的液滴,以大小相等、方向相反的初速度相互靠近。当两个液滴碰撞时会先逐渐接触,形成一个液桥,经过一系列振荡,最后融合成一个大液滴^[13]。先用 SPH 方法模拟,然后将 SPH 粒子结果转化成 Delaunay 三角网格。图 6 是生成的三个不同时刻的网格以及局部放大的网格。可以看出,所生成的三角网格非常均匀。因为网格节点位置即为粒子所在的位置。

4.2 溃坝

溃坝流涉及复杂的自由表面运动,包括自由液面的变形、破碎和融合等。使用网格法模拟这类问题时,往往很难捕捉液面的复杂变化。SPH 等无网格粒子类方法很适合模拟这类问题^[14-16],但是在后处理时难以直接从粒子数据中重构或提取出自由液面。

本算例先使用 Delaunay 三角剖分将 SPH 粒子数据转化成网格数据,然后从网格中提取出液面

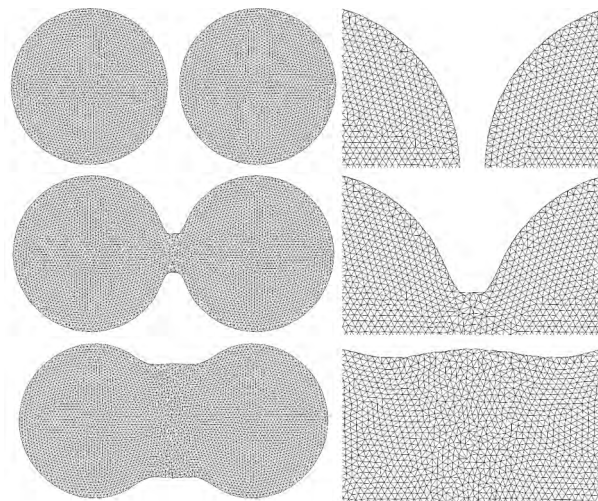


图 6 液滴碰撞过程中三个典型时刻的 SPH 模拟结果的三角网格(左)及局部放大情况(右)
Fig. 6 Triangular mesh (left) and partial enlarge detail (right) generated from SPH results of drop collision at three typical time instants

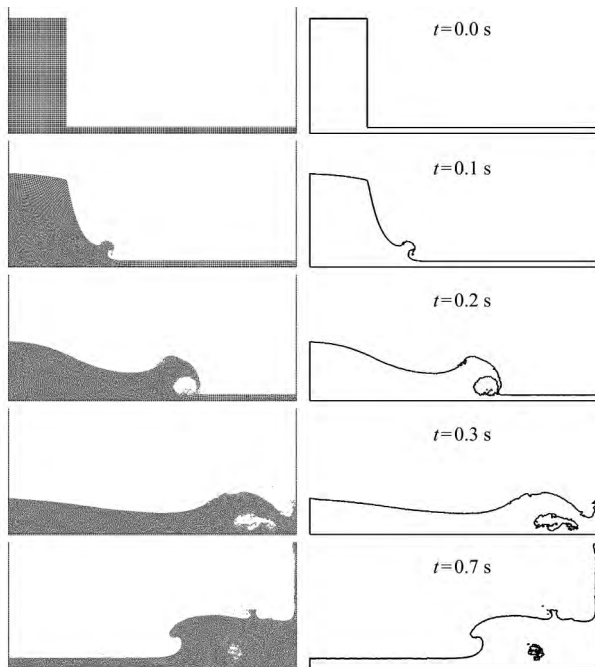


图7 SPH 模拟溃坝流动过程的粒子分布(左)和基于 Delaunay 三角剖分提取的自由液面(右)

Fig. 7 Particle distribution of SPH simulation of dam-break (left) and the corresponding free surface from Delaunay triangulation (right)

数据。图7是溃坝冲向浅水区,而后遇到竖直壁面时的液面变化情况。可以看出,在溃坝前沿,液面先拱起,形成蘑菇状突起,而后翻卷,形成空腔;遇到右侧壁面时,液面沿壁面爬升、回落,最后向左回卷。结果表明,本文基于 Delaunay 三角剖分的 SPH 后处理方法能够很好地提取溃坝流整个运动过程中的自由液面。

5 结 论

本文发展了一种基于 SPH 粒子位置的 Delaunay 三角剖分与自由液面重构方法。通过将 SPH 粒子转换成网格,再对网格进行相应的处理,可以实现与网格法相同的后处理,也可以基于网格重构或提取自由液面。根据具体问题的需要,还可以删除或提取特定的网格。通过液滴碰撞和溃坝两个典型算例验证了本文方法的有效性和可靠性。对于其他无网格粒子方法,本文的方法也适用。

参考文献(References):

[1] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis [J]. *The Astronomical Journal*, 1977, **82**:1013-1024.
 [2] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical

stars[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, **181**(3):375-389.

- [3] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics[J]. *Reports on Progress in Physics*, 2005, **68**(8):1703-1759.
 [4] Liu M B, Liu G R. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments[J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2010, **17**(1):25-76.
 [5] Liu G R, Liu M B. *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*[M]. World Scientific, Singapore, 2003.
 [6] 杨秀峰,刘谋斌.光滑粒子动力学 SPH 方法应力不稳定性的一种改进方案[J]. *物理学报*, 2012, **61**(22):255-262. (YANG Xiu-feng, LIU Mou-bin. Improvement on stress instability in smoothed particle hydrodynamics[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(22):255-262. (in Chinese))
 [7] 钱令希.谈计算力学[J]. *力学与实践*, 1995, **17**(4):2-3.
 [8] de Berg M D, Cheong O, Kreveld M, et al. *Computational geometry: algorithms and applications*[A]. 3rd ed[C]. Springer, 2008.
 [9] Lawson C L. Software for C¹ interpolation, in: J. R. Rice (Ed.) *Symposium on Mathematical Software* [C]. Academic Press, University of Wisconsin, Madison, Wisc. US, 1977, 161-194.
 [10] 郑俊,于开平,魏英杰,等. SPH 后处理研究[J]. *计算物理*, 2011, **28**(2):213-218. (ZHENG Jun, YU Kai-ping, WEI Ying-jie, et al. A general study on post-processing of smoothed particle hydrodynamics[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2011, **28**(2):213-218. (in Chinese))
 [11] 文建波,周进雄,张红艳,等.基于 Delaunay 三角化的无网格法计算结果后处理[J]. *应用力学学报*, 2003, **20**(4):105-107. (WEN Jian-bo, ZHOU Jin-xiong, ZHANG Hong-yan, et al. A realistic technique based on Delaunay triangulation for post-processing of meshless numerical results[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2003, **20**(4):105-107. (in Chinese))
 [12] 史宝军,袁明武,陈永强.无网格方法数值结果的可视化方法与实现[J]. *工程力学*, 2004, **21**(6):51-55. (SHI Bao-jun, YUAN Ming-wu, CHEN Yong-qiang. Visualization of numerical results of meshless method and its realization[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(6):51-55. (in Chinese))

- [13] Zhang M. Simulation of surface tension in 2D and 3D with smoothed particle hydrodynamics method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, **229**(19): 7238-7259.
- [14] 韩旭, 杨刚, 龙述尧. SPH方法在两相流动问题中的典型应用[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2007, **34**(1): 28-32. (HAN Xu, YANG Gang, LONG Shu-yao. Typical application of SPH method to two-phase flow problems [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2007, **34**(1): 28-32. (in Chinese))
- [15] 韩亚伟, 强洪夫. 改进的物理粘性 SPH 方法及其在溃坝问题中的应用[J]. 计算物理, 2012, **29**(5): 693-699. (HAN Ya-wei, QIANG Hong-fu. An improved SPH method with physical viscosity and application in dam-break problem[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2012, **29**(5): 693-699. (in Chinese))
- [16] 荣少山, 陈斌. 模拟自由表面问题的移动粒子半隐式模拟方法[J]. 西安交通大学学报, 2010, **44**(11): 109-112. (RONG Shao-shan, CHEN Bin. Simulating free surface problem with moving particle semi-implicit method [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2010, **44**(11): 109-112. (in Chinese))

Delaunay triangulation and free surface extraction for SPH method

YANG Xiu-feng^{1,2}, LIU Mou-bin^{*3}

(1. Key Laboratory for Mechanics in Fluid Solid Coupling Systems, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. Department of Mechanical Engineering, Iowa State University, Ames, IA 50011, USA;

3. School of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Smoothed particle hydrodynamics (SPH) is a meshfree, Lagrangian particle method, which combines the best features of Eulerian and Lagrangian grid-based methods, and has been successfully applied to different areas in sciences and engineering. The post-processing of SPH is not as straight forward and convenient as the grid-based methods since the information is based on irregularly distributed particles rather than on a grid system. Moreover, free surfaces are usually difficult to be reconstructed or extracted based simply on SPH particles. In this paper, a Delaunay triangulation is developed, in which a triangular mesh is generated from SPH particles through Delaunay triangulation, and the related information on SPH particles is converted to the triangular mesh. The SPH post-processing can then be conducted on the triangular mesh rather than on the SPH particles. Also free surfaces can be extracted from the generated Delaunay mesh. Two typical examples, the head-on collision of two liquid drops and dam collapse have been simulated. The obtained results with precisely extracted free surfaces demonstrate the effectiveness of the approach of Delaunay triangulation and free surface extraction for SPH method.

Key words: smoothed particle hydrodynamics (SPH); Delaunay triangulation; free surface extraction; post-processing