

HU Kaixin, HE Meng, CHEN Qisheng. Theoretical analysis for the elastic instability of thermocapillary liquid layers for upper convected Maxwell (UCM) fluid (in Chinese). *Chin. J. Space Sci.*, 2016, **36**(4): 487-491. DOI:10.11728/cjss2016.04.487

# 上随体 Maxwell(UCM) 流体热毛细 液层弹性失稳的理论分析<sup>\*</sup>

胡开鑫 何蒙 陈启生

(中国科学院力学研究所 微重力重点实验室 北京 100190)

**摘要** 通过对上随体 Maxwell (UCM) 流体热毛细液层线性稳定性的研究分析, 发现流场会发生弹性失稳. 扰动的增长速率随波数的增加而增加. 与牛顿流体不同, UCM 流体不存在临界 Marangoni 数, 当波数达到某一临界值时会出现不稳定的弹性扰动波. 该临界波数随弹性数和 Marangoni 数的增加而减小, 当弹性数趋近于 0 时, 流体即变为牛顿流体, 而相应的临界波数趋于无穷. 不同波数及传播方向上, 弹性波的波速相同, 而其增长速率在特定方向上达到最大. 能量分析表明弹性波的扰动能量来自扰动应力做功.

**关键词** UCM 流体, 热毛细液层, 线性稳定性, 弹性失稳

**中图分类号** V 524

## Theoretical Analysis for the Elastic Instability of Thermocapillary Liquid Layers for Upper Convected Maxwell (UCM) Fluid

HU Kaixin HE Meng CHEN Qisheng

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

**Abstract** The linear stability of thermocapillary liquid layers for Upper Convected Maxwell (UCM) fluid is investigated. Elastic instability is found. The rate of perturbation growth increases with the wave number. For UCM fluid, the critical Marangoni number does not exist, which is different from Newtonian fluid. Instead, a critical wave number is found above which unstable elastic waves appear. The critical wave number decreases with elastic number and Marangoni number. When elastic number approaches zero, the fluid becomes Newtonian fluid with the critical wave number tending to infinity. The wave speed of elastic wave stays constant for different wave numbers and propagating directions. However, the growth rate reaches its maximum in a specific direction. Energy analysis shows the work done by perturbation stress contributes most to the perturbation energy of

\* 国家自然科学基金项目资助 (11272320, 11402271, 11532015)

2015-11-10 收到原稿, 2016-05-09 收到修定稿

E-mail: hukaixin@imech.ac.cn

elastic wave.

**Key words** UCM fluid, Thermocapillary liquid layers, Linear stability, Elastic instability

## 0 引言

热毛细流动是流体表面或界面由温度差产生表面张力梯度所引起的流动现象,在薄膜干燥<sup>[1-2]</sup>、熔焊<sup>[3-5]</sup>以及晶体生长<sup>[6]</sup>等空间材料加工中普遍存在且十分重要.目前已有许多关于热毛细流动的研究,包括理论分析<sup>[7]</sup>以及数值<sup>[8]</sup>和实验研究<sup>[9]</sup>.热毛细流动的稳定性会对材料产品质量产生重要影响.在稳定性研究中,热毛细液层<sup>[10]</sup>是一种简便的模型.对热毛细液层稳定性的理论分析可以得到扰动的失稳形式和物理机制,且与实验结果能够很好吻合<sup>[11]</sup>.

以往关于热毛细流动的研究主要集中在牛顿流体方面.然而许多实际应用中的流体是非牛顿流体,因此热毛细流动的研究已扩展到非牛顿流体,例如宾汉流体的无穷长液桥流动<sup>[12]</sup>、幂率流体的方腔流<sup>[13]</sup>和液层流动<sup>[14-15]</sup>.在一些工业应用例如塑料焊接<sup>[16-18]</sup>、薄膜干燥<sup>[1-2]</sup>、涂层<sup>[19]</sup>以及空间微重力环境下的聚合物加工<sup>[20]</sup>中,聚物流体表面受热不均会导致热毛细效应,进而驱动流体运动. Dee等<sup>[21]</sup>对聚物流体表面张力进行了综合性研究.目前对聚合物的热毛细流动研究不断深入. Toussaint等<sup>[2]</sup>对聚合物溶液干燥中的热毛细流进行了实验分析. Chen等<sup>[1]</sup>采用牛顿流体模型对聚合物溶液的热毛细流进行了数值模拟.然而聚物流体具有粘弹性,这使得其流动特性完全不同于牛顿流体<sup>[22]</sup>.聚物流体热毛细流动的研究应考虑弹性对流场及其稳定性的影响.

本文对粘弹性热毛细液层的稳定性进行了理论分析.采用的是UCM流体模型,即上随体Maxwell流体模型,该模型是理论研究中广泛使用的一种非线

性粘弹性流体模型<sup>[22]</sup>.流动模型采用Smith等<sup>[10]</sup>的线性流和回流模型.研究表明流动易发生弹性失稳,其最不稳定的扰动模态为斜波.

## 1 控制方程

热毛细液层模型如图1所示,这里考虑线性流和回流两种流动<sup>[10]</sup>.无量纲控制方程组如下:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ Re \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{Q}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \frac{1}{Ma} \nabla^2 T. \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $T$  分别为速度、压强和温度;  $Re$  为 Reynolds 数;  $Ma$  为 Marangoni 数, 定义为  $Ma = Re \cdot Pr$ , 这里  $Pr$  为 Prandtl 数;  $\mathbf{Q}$  为应力张量. UCM 流体本构方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} + \lambda \frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta t} &= \mathbf{S}, \\ \frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta t} &= \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{Q} - (\mathbf{u} \nabla) \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot (\nabla \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\lambda$  为 Weissenberg 数,  $\mathbf{S}$  为应变率张量,  $\frac{\delta}{\delta t}$  为上随体导数.

对于 UCM 流体, 其基本流的解除流向方向的法向应力外, 其他均与牛顿流体相同<sup>[10]</sup>. 设基本流场叠加了一个正则小扰动, 有

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \exp[\sigma t + i(\alpha x + \beta y)],$$

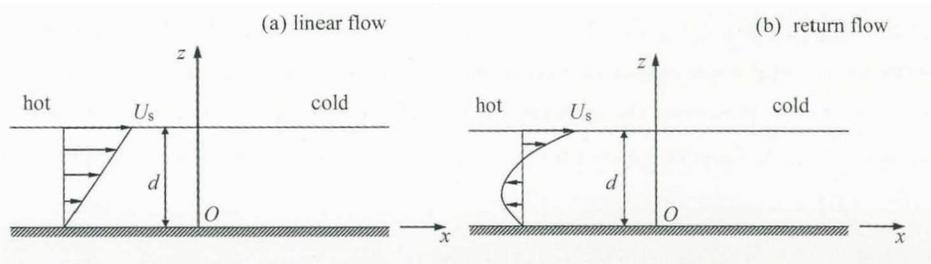


图1 热毛细液层模型

Fig. 1 Model of thermocapillary liquid layers

$$T = T_0 + \widehat{T} \exp[\sigma t + i(\alpha x + \beta y)],$$

$$P = P_0 + \widehat{P} \exp[\sigma t + i(\alpha x + \beta y)],$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \begin{bmatrix} e & r & f \\ r & q & g \\ f & g & h \end{bmatrix} \exp[\sigma t + i(\alpha x + \beta y)]. \quad (3)$$

其中:  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ , 这里  $\sigma_r$  和  $\sigma_i$  分别为小扰动的增长速率与频率;  $\alpha$  和  $\beta$  分别代表  $x$  与  $y$  轴方向上的波数. 式 (3) 线性方程组的特征值可采用 Chebyshev 配点法求解.

## 2 数值结果

分别定义  $Re$  与  $\lambda$  为

$$Re = \frac{\rho U d}{\mu},$$

$$\lambda = \frac{\mu U}{G d}.$$

其中:  $\rho, U, d, \mu, G$  分别为流体密度、特征速度、特征长度、粘性以及弹性模量;  $U$  的定义与牛顿流体相同<sup>[10]</sup>, 因此弹性数  $\varepsilon = \lambda/R$  与  $U$  无关, 用来表征 UCM 流体的弹性.

线性流中扰动波速  $c$  与  $Re$  及  $\lambda$  的关系如图 2 所示. 由图 2 可知,  $c \propto \frac{1}{\sqrt{Re}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ . 这与 Burgers 流体平面剪切流中的弹性波相似<sup>[23-24]</sup>. 令  $c = \frac{1}{\sqrt{Re\lambda}}h$ , 其中  $h$  为一常数. 将波速变为无量纲形式  $C = cU = \frac{U}{\sqrt{Re\lambda}}h = \sqrt{\frac{G}{\rho}}h$ , 由此可知这是一个弹性波的波速. 因此可以认为扰动为弹性波.

表 1 列出了不同传播方向上的弹性波波速. 可以发现波速在不同方向上几乎是相同的. 这类似于各向同性弹性体. 然而增长速率随着角度而变化, 在特定方向上 ( $\phi = 55^\circ$ ) 达到最大. 表 2 列出了不同波数下的特征值. 可以发现对于不同波数, 波速基本上是相同的. 然而增长速率随着波数的增加而迅速增大, 这

表 1 不同传播方向上的弹性波波速 ( $Ma = 1.71, \varepsilon = 0.5, k = 30, Pr = 100$ )

Table 1 Wave speeds for the elastic wave propagating in different direction ( $Ma = 1.71, \varepsilon = 0.5, k = 30, Pr = 100$ )

$\phi/(^\circ)$	0	30	55	60	90
$\sigma_r$	-58.48	-26.36	0.12	-0.87	-58.48
$\sigma_i$	-2509.86	-2511.24	-2515.64	-2513.79	-2510.81
$c$	-83.66	-83.71	-83.85	-83.79	-83.69

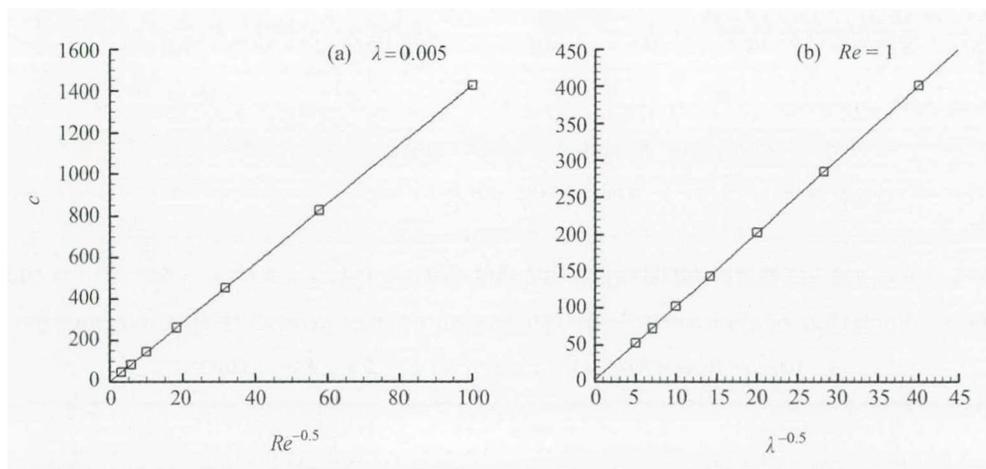


图 2 波速  $c$  与  $Re$  和  $\lambda$  的关系 ( $k = 40, \phi = 55^\circ, Pr = 100$ )

Fig. 2 Variation of wave speed  $c$  with  $Re$  and  $\lambda$  for  $k = 40, \phi = 55^\circ, Pr = 100$

不同于牛顿流体. 由于弹性波的增长速率总是随波数的增加而增加, 因此在波数足够大时, 增长速率总会大于零. 所以 UCM 流体不存在临界 Marangoni 数, 这也是其与牛顿流体的一大不同. UCM 流体存在一个临界波数  $k_c$ , 当波数超过  $k_c$  时, 流动会存在不稳定模态.

$k_c$  与  $\varepsilon$  及  $Ma$  的关系如图 3 所示. 可知  $k_c$  随  $Ma$  的增大而减小, 这意味着大  $Ma$  数下流动更不稳定. 同时  $k_c$  也随着  $\varepsilon$  的增大而减小, 这也说明弹性效应使得流动更易失稳. 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 流体变为牛顿流体, 而  $k_c$  趋近于无穷大. 因此对于牛顿流体, 弹性波的临界波数是不存在的.

### 3 能量分析

扰动能量的变化率可写为

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial t} = -\frac{1}{2Re} \int (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}) d^3r + \frac{1}{Re} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} d^2r - \int \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0] d^3r = -N + M + I. \quad (4)$$

其中,  $N$  表示扰动应力做功,  $M$  表示 Marangoni 力在自由面上所做的功,  $I$  表示扰动流与基本流间的相互作用. 扰动由下式归一化:

$$\int \mathbf{u}^2 d^3r = 1. \quad (5)$$

表 3 列出了不同波数下线性流扰动能量增长中

表 2 不同波数下的特征值 ( $Ma = 1, \varepsilon = 0.5, \phi = 60^\circ, Pr = 100$ )

Table 2 Variation of eigenvalue with wave number ( $Ma = 1, \varepsilon = 0.5, \phi = 60^\circ, Pr = 100$ )

$k$	20	30	40	50	60	80	100
$\sigma_r$	-74.21	-41.39	17.66	114.56	235.81	555.66	978.13
$\sigma_i$	-2870.95	-4279.81	-5723.22	-7149.60	-8582.48	-11451.70	-14 329.00
$c$	143.55	142.66	143.08	142.99	143.04	143.15	143.29

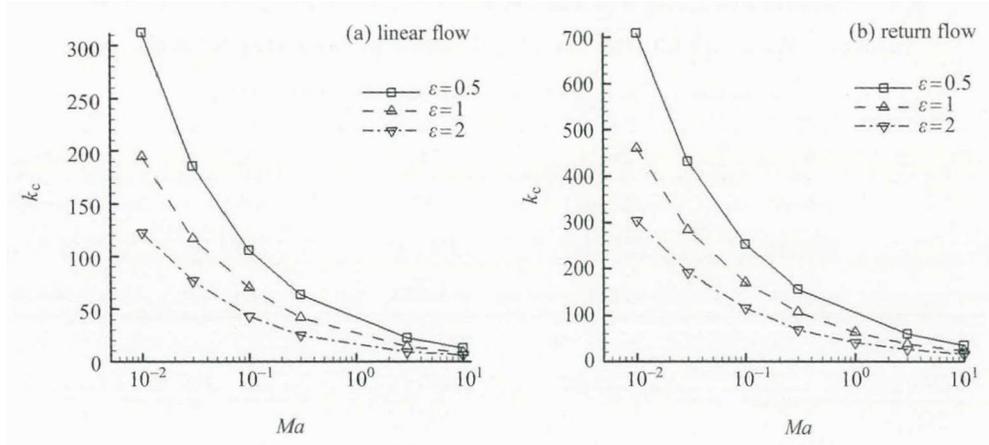


图 3 临界波数  $k_c$  与弹性数  $\varepsilon$  和  $Ma$  的关系 ( $\phi = 55^\circ, Pr = 100$ )

Fig. 3 Variation of critical wave number  $k_c$  with elastic number  $\varepsilon$  and Marangoni number  $Ma$  ( $\phi = 55^\circ, Pr = 100$ )

表 3 不同波数下线性流扰动能量增长中的各项值 ( $Ma = 0.1, \varepsilon = 0.5, \phi = 55^\circ, Pr = 100$ )

Table 3 Variation of each term in perturbation energy growth with wave number for linear flow ( $Ma = 0.1, \varepsilon = 0.5, \phi = 55^\circ, Pr = 100$ )

$k$	$\sigma/k$	$-N$	$M$	$I$
100	$-1.26 - 1417.32i$	-126.06	0.0051	-0.0530
110	$0.98 - 1417.36i$	107.71	0.0045	-0.0530
120	$3.10 - 1417.38i$	372.47	0.0045	-0.0530

的各项值. 可以发现相对于第一项  $N$ , 后两项  $M$  和  $I$  可以忽略不计. 因此扰动能量的变化主要取决于扰动应力做功.

## 4 结论

根据以上对 UCM 流体热毛细液层线性稳定性特征的分析, 可以得出如下结论.

(1) UCM 流体中的扰动波具有弹性不稳定性, 这使其与牛顿流体有很大不同. 弹性波的波速正比于  $1/\sqrt{Re}$ ,  $1/\sqrt{\lambda}$ , 且其不受波数与传播方向的影响.

(2) UCM 流体弹性波的增长速率随波数的增大而增大, 其不存在临界  $Ma$  数, 扰动波数达到某一临界值  $k_c$  时即会出现失稳模态.  $k_c$  随  $\varepsilon$  与  $Ma$  的增大而减小.

(3) 能量分析表明, 弹性波的扰动能量主要来自扰动应力做功, 热毛细力做功及扰动与基本流间的相互作用项可忽略不计.

## 参考文献

- [1] CHEN J J, LIN J D. Thermocapillary effect on drying of a polymer solution under non-uniform radiant heating [J]. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 2000, **43**(12): 2155-2175
- [2] TOUSSAINT G, BODIGUEL H, DOUMENC F, et al. Experimental characterization of buoyancy and surface tension-driven convection during the drying of a polymer solution [J]. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 2008, **51**(17): 4228-4237
- [3] DEBROY T, DAVID S A. Physical processes in fusion welding [J]. *Rev. Mod. Phys.*, 1995, **67**(1): 85-112
- [4] MILLS K C, KEENE B J, BROOKS R F, et al. Marangoni effects in welding [J]. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1998, **356**: 911-925
- [5] PIERCE S W, BURGARDT P, OLSON D L. Thermocapillary and arc phenomena in stainless steel welding [J]. *Weld. J.*, 1999, **78**: 45-52
- [6] DUFFAR T. Crystal Growth Processes Based on Capillarity: Czochralski, Floating Zone, Shaping and Crucible Techniques [M]. West Sussex: John Wiley & Sons, 2010
- [7] OSTRACH S. Low-gravity fluid flows [J]. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1982, **14**(1): 313-345
- [8] DAVIS S H. Thermocapillary instabilities [J]. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1987, **19**(1): 403-435
- [9] SCHATZ M F, Neitzel G P. Experiments on thermocapillary instabilities [J]. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 2001, **33**(1): 93-127
- [10] SMITH M K, DAVIS S H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers Part 1. Convective instabilities [J]. *J. Fluid Mech.*, 1983, **132**: 119-144
- [11] CHAN C L, CHEN C F. Effect of gravity on the stability of thermocapillary convection in a horizontal fluid layer [J]. *J. Fluid Mech.*, 2010, **647**: 91-103
- [12] BAUER F. Heat transport in an infinitely long Non-Newtonian liquid bridge due to Marangoni convection [J]. *Heat Mass Trans.*, 1982, **16**(4): 229-235
- [13] NAÏ MI M, HASNAOUI M, PLATTEN J K. Marangoni convection of non-Newtonian power law fluids in a shallow rectangular cavity [J]. *Eng. Comput.*, 2000, **17**(6): 638-668
- [14] CHEN C H. Marangoni effects on forced convection of power-law liquids in a thin film over a stretching surface [J]. *Phys. Lett.: A*, 2007, **370**(1): 51-57
- [15] ALLOUI Z, VASSEUR P. Onset of Marangoni convection and multiple solutions in a power-law fluid layer under a zero gravity environment [J]. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 2013, **58**(1): 43-52
- [16] TROUGHTON M J. Handbook of Plastics Joining: A Practical Guide [M]. New York: William Andrew, 2008
- [17] ROTHEISER J. Joining of Plastics [M]. Munich: Hanser, 1999
- [18] GREWELL D, BENATAR A. Welding of plastics: Fundamentals and new developments [J]. *Int. Polym. Proc.*, 2007, **22**(1): 43-60
- [19] YAMAMURA M, WAJIMA S, MAWATARI Y, et al. Nonuniform thinning of polymeric coatings under Marangoni stress [J]. *J. Chem. Eng. Jpn.*, 2010, **43**(1): 40-45
- [20] DOWNEY J P, POJMAN J A. Polymer Research in Microgravity: Polymerization and Processing [M]. Washington D C: American Chemical Society, 2001
- [21] DEE G T, SAUER B B. The surface tension of polymer liquids [J]. *Adv. Phys.*, 1998, **47**(2): 161-205
- [22] BIRD R B, ARMSTRONG R C, HASSAGER O. Dynamics of Polymeric Liquids Vol. 1: Fluid Mechanics [M]. New York: John Wiley & Sons, 1987
- [23] HU K X, PENG J, ZHU K Q. The linear stability of plane Poiseuille flow of Burgers fluid at very low Reynolds numbers [J]. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 2012, **167-168**: 87-94
- [24] HU K X, PENG J, ZHU K Q. Linear stability of plane creeping Couette flow for Burgers fluid [J]. *Acta Mech. Sin.*, 2013, **29**: 12-23