

热毛细效应对细丝薄膜流动不稳定性的影响^{*}

刘 荣 刘秋生

(中国科学院力学研究所 微重力重点实验室 北京 100190)

摘 要 根据重力与热毛细力耦合作用薄膜在细丝上的流动情况, 采用长波近似推导了界面的演化方程. 通过色散关系分析热毛细作用对 Rayleigh-Plateau 稳定性的影响; 通过时空模式的稳定性分析, 研究了系统的绝对对流不稳定性特性; 通过直接数值模拟, 研究了薄膜破裂和绝对对流稳定性的关系.

关键词 热毛细效应, 薄膜, 绝对/对流不稳定性

中图分类号 V 524

Effect of Thermocapillary on the Absolute and Convective Stabilities of a Thin Film Flowing down a Fibre

LIU Rong LIU Qiusheng

(Key Laboratory of Microgravity, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

Abstract The dynamics of a viscous film flowing down a vertical fibre under the action of gravity and the thermocapillary is analyzed theoretically. This exterior coating flow is driven by a Rayleigh-Plateau mechanism modified by the presence of gravity as well as the variation of surface tension induced by temperature gradient along the interface. A temporal-spacial stability analysis is performed to investigate the influence of the thermocapillarity on the convective/absolute instability (CI/AI) of axisymmetric disturbances. The results show that the thermocapillary plays an important role in determining the CI/AI characteristics in different flow regimes.

Key words Effect of thermocapillary, Fibre flow, Convective/absolute stability

* 国家自然科学基金项目 (11532015), 载人航天工程空间应用系统天舟一号货运飞船科学实验项目和中国科学院空间科学战略性先导科技专项项目 (XDA04020202-02) 共同资助
2015-11-10 收到原稿, 2016-04-04 收到修定稿
E-mail: liurong@imech.ac.cn

0 引言

由重力引起的细丝薄膜流动在实际工程过程中具有重要应用,例如导线上的涂层工艺,管壁上的防护层等.具有自由表面的液体圆柱在射流过程中,由于表面张力引起的 Rayleigh-Plateau 机制会引起液体界面的失稳,从而使液体破碎成液滴^[1].

Quere^[2]对重力驱动下的细丝薄膜流动进行了实验研究.研究表明,由于重力引起的基态流动会对由表面张力驱动的不稳定性产生显著影响.在 Rayleigh-Plateau 作用下,细丝薄膜界面形成水滴状并在重力作用下流动,流动速度快的液滴会吞并流动速度慢的液滴,最后形成一系列下降液滴.对于液层细丝半径比较小的情况,这种界面破碎过程会被重力引起的基态流动所抑制.通过长波模型理论可以研究重力引起的基态流动对液滴形成的抑制作用^[3-5],在这类长波模型中细丝半径 R 远大于薄膜厚度 h .

Kliakhandler 等^[6]对 h 大于 R 的系统进行了实验研究^[3-5],其采用的模型假设不能满足 $R \gg h$,但在实验中发现不同流动区域存在丰富的动力学特性.文献 [6] 在三种不同流动区域观察了珠状液滴的形态,并在文献 [6] 的图 1 中给出三种不同区域 (a), (b), (c) 的界面形状.在区域 (a),界面呈快速运动的大滴状,此时对应的流量相对较大,液滴之间的液膜界面比较平,间距较大而且均匀.在区域 (b),液滴之间呈现高度的规则性,液滴流动速度小于区域 (a) 并且不随时间变化,此区域发生在较小的流量范围内.流动区域 (c) 发生在比 (b) 更小的范围内,此时液滴尺寸和速度比区域 (b) 的更大,大液滴的运动呈现出非稳态特性,经常会观察到液滴追赶小液滴合并成一个液滴的情况.文献 [6] 还推导了不依赖于长波近似的界面演化方程,此理论模型在预测低流量的界面变化时与实验结果符合得很好,但此模型不能有效捕捉到液滴间距很大的流动区域界面特性. Craster 等^[7]推导了类似于文献 [6] 的新物理模型,认为新模型能够预测出更接近实验观测结果.

以上提到的模型忽略了惯性效应,因此其适用范围在 Re 为 1 的量级.近期 Ruyer-Quil 等^[8]利用加权余量法推导了关于厚度 h 和流量 q 的两方程模型来研究细丝薄膜流动.模型考虑了惯性效应,对各种比值范围的 h/R 都适用.此模型计算结果与实验结果符合较好. Duprat 等^[9]研究了细丝上下降薄

膜的绝对对流不稳定性,确定不同细丝直径和不同流量下的绝对对流特性.在液层厚度较大和较小的情况下,系统处于对流不稳定性状态,而在中间范围内系统处于绝对不稳定性状态.

以往研究主要集中于等温细丝薄膜的动力学特性,而有关热毛细效应对 Rayleigh-Plateau 机制影响的研究相对较少.本文重点分析细丝薄膜在重力与热毛细效应下的耦合机制对绝对对流不稳定性的影响,对物理问题进行描述,推导界面的非线性演化方程,进而采用时空模式的稳定性分析方法,研究系统的绝对对流不稳定性.

1 物理问题的数学描述

如图 1 所示,考虑牛顿流体薄膜半径为 a 的细丝上流动.液体动力学粘性系数为 μ ,密度为 ρ ,液面无扰动的半径为 R ,重力加速度为 g .假设液面扰动以后界面是轴对称的.界面处沿 z 方向的温度梯度 $dT/dz = b$, $b > 0$.流动的动力学特性由如下 Navier-Stokes 方程组,包括连续性方程、动量方程、能量方程决定:

$$u_r + u/r + w_z = 0,$$

$$u_t + uu_r + ww_z = -p_r/\rho + \mu(u_{rr} + u_r/r - u/r^2 + u_{zz})/\rho,$$

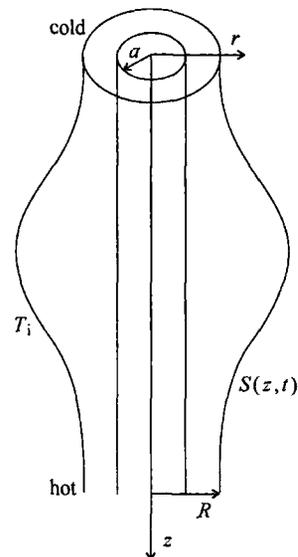


图 1 物理模型

Fig. 1 Physical model

$$w_t + uw_r + ww_z =$$

$$g - p_z/\rho + \mu(w_{rr} + w_r/r + w_{zz})/\rho,$$

$$T_t + uT_r + wT_z = \kappa(T_{rr} + T_r/r + T_{zz}).$$

其中, t 为时间, u 和 w 为径向 r 和轴向 z 的速度分量, p 为压力, T 为温度, κ 为热扩散系数. 所有下标均表示偏导数. 在细丝表面处 ($r = a$), 速度无穿透和无滑移条件为 $u = w = 0$, 假设细丝表面绝热 $T_r = 0$, 在薄膜自由面 $r = S(z, t)$, 粘性剪切应力与热毛细力平衡条件为 $t \cdot T \cdot n = t \cdot \nabla_s \sigma$, 法向应力平衡条件为 $n \cdot T \cdot n = 2\sigma H$. 这里 T 为粘性应力张量, n 和 t 为自由面的单位法向量和切向量, $2H$ 为表面平均曲率. 假设表面张力与温度存在线性关系 $\sigma = \sigma_0 - \gamma(T_i - T_0)$, 这里系数 γ 表示表面张力随温度的变化率, T_0 为参考温度. 界面动力学边界条件为 $S_t + wS_z - u = 0$. 界面处的能量平衡由牛顿冷却定律描述, 即 $-\chi n \cdot \nabla T = q(T - T_\infty)$, 这里 χ 为导热系数, q 为牛顿冷却系数 (对流传热表面传热系数), T_∞ 为远离界面处的环境温度.

采用下列无量纲变量 $r = Rr^*$, $z = Lz^*$, $p = \rho g L p^*$, $t = LV^{-1}t^*$, $w = Vw^*$, $u = \epsilon V u^*$, $T - T_\infty = bLT^*$, 其中星号表示无量纲变量, 速度尺度 $V = \rho g R^2/\mu$, 长度 L 为毛细尺度 $\sigma/(\rho g R)$. 假设界面半径 R 远远小于毛细尺度, 即 $\epsilon = R/L$ 为小量. Bond 数 $Bo = \rho g R^2/\sigma = \epsilon$. 利用控制方程和边界条件对 ϵ 进行展开, 采用长波近似可以得到关于 h 的演化方程. 关于长波演化方程的具体表达过程可参考文献 [10]. 这里给出的长波演化方程为

$$\partial_t S^2 + 2\partial_z Q(S) = 0,$$

$$Q(S) = (1 - p_z)[4S^4 \ln(S/a) +$$

$$(3S^2 - a^2)(a^2 - S^2)]/16 -$$

$$\epsilon Ma T i_z [2S^3 \ln(S/a) - S(S^2 - a^2)]/4,$$

$$p = 1/S - \epsilon^2 S_{zz}.$$

2 线性稳定性分析

分析线性稳定性问题. 基态解为 $S_0 = 1$. 利用正则模式分析, 扰动可以表示为

$$S = S_0 + S_1 \exp(\lambda t + i k z).$$

其中, λ 为时间增长因子, k 为波数. 对应色散关系

$$\lambda + k^2(k^2 \epsilon^2 - 1)[4 \ln(1/a) - a^4 + 4a^2 - 3]/16 +$$

$$i k(a^2 - 1 - 2 \ln a)/2 - i k \epsilon Ma [(a^2 - 1) -$$

$$6 \ln a]/4 = 0.$$

其中, λ 的实部与 Ma 数无关. 扰动波速 $c = -\text{Im}(\lambda)/k$. $c > 0$ 或 < 0 分别对应扰动向下游或上传播.

图 2 给出了时间增长率 $Re(\lambda)$ 与 k 的关系. 截止波长 $k_c = 1/\epsilon$. 最大时间增长率为

$$\lambda_m = [4 \ln(1/a) - a^4 + 4a^2 - 3]/(64\epsilon^2).$$

图 3 表明, $Ma = 0$ 时波的传播速度 c 为正, 且随 a 的增加而减小. 随着 Ma 数的增加, 波数 c 增大. 在较大 Ma 数下, 波的传播速度为负. 随着 Ma 数的进一步增加, 界面速度随热毛细效应的增长而不断增加.

3 绝对对流不稳定性

对于一般流体动力学稳定性问题, 波数和频率满足如下关系: $D(k, \omega) = 0$. 在时空模式稳定性分析中, 波数 k 与频率 ω 均为复数. 频率 ω 与时间增长因子的关系为 $\lambda = i\omega$. 定义具有群速度为 0 的复波数 k_0 满足

$$\partial \omega / \partial k = 0,$$

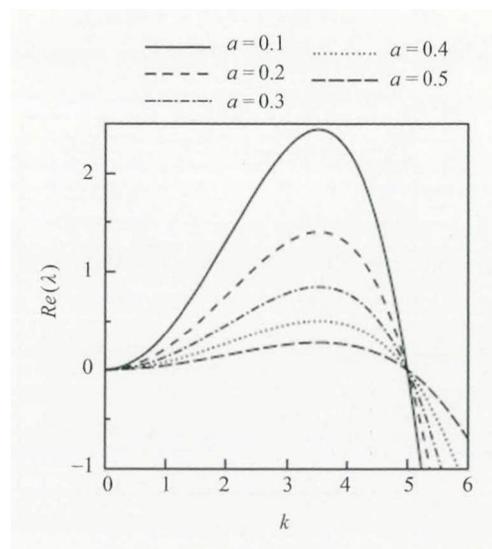


图 2 不同参数 a 下波数与时间增长因子之间的关系
Fig. 2 Relation between the wavenumber and the time growth rate

$\omega_0 = \omega(k_0)$ 为绝对增长频率. $\text{Im}(\omega_0) > 0$ 或 $\text{Im}(\omega_0) < 0$ 对应绝对对流或对流不稳定. 关于更多绝对对流不稳定性的介绍可参阅文献 [11—12].

图 4 给出了 a - Bo 参数平面上的绝对对流区域. 可以看出给定参数 a 随着 Bo 数的增加, 表面张力效应减弱. Rayleigh-Plateau 稳定性随着 Bo 数的增长而削弱. 随着 Bo 数进一步增加, 由重力引起的对流效应抑制住了 Rayleigh-Plateau 稳定性. 图 4 表明, 在给定 a 值下随着 Bo 数的增加, 稳定性特性由绝对对流变为对流不稳定性. 在大 Bo 数下, 稳定性特性均为对流不稳定的. 当 $Ma < 0.5$ 时, 随着 Ma 数的增加, 绝对对流不稳定性的边界向大 Bo 数区域移动, 原因是表面重力流动随着热毛细作用减弱. 当 Ma 数继续增大, 由热毛细力引起的向上游传播的波抑制住了 Rayleigh-Plateau 机制. 在给定 a 时,

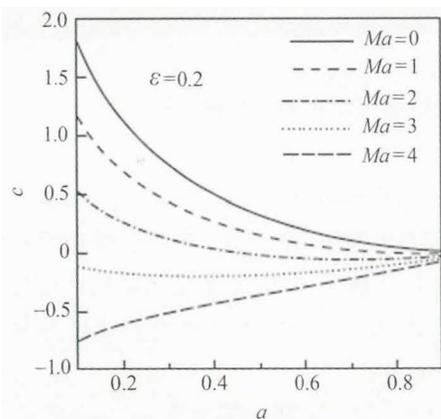


图 3 最不不稳定模式的波传播速度

Fig. 3 Wave speed variation of the most unstable mode

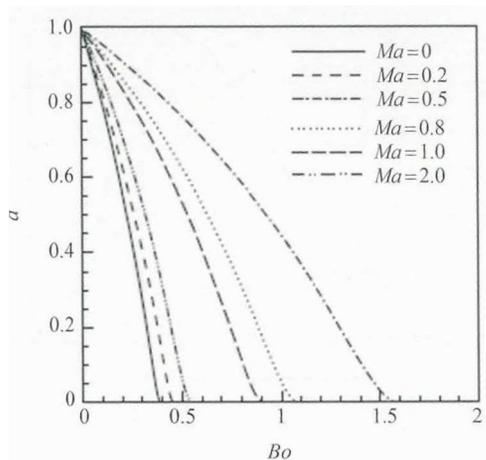


图 4 a - Bo 平面内绝对对流不稳定性边界

Fig. 4 Boundary between convective and absolute instability in the a - Bo plane

绝对对流边界随着 Ma 数的增加向小 Bo 方向移动.

4 结论

根据热毛细效应对重力驱动下的下降薄膜在细丝上流动的动力学特性理论分析, 研究了热毛细效应对线性稳定性的影响. 结果表明, 热毛细效应并不影响扰动的时间增长率, 但是会对扰动波的频率产生影响. 通过进一步对绝对对流不稳定性的影响分析发现, 热毛细效应会引起向上游传播的扰动. 在不同流动区域, 热毛细效应对系统的绝对对流不稳定性特性具有非常明显的作用.

参考文献

- [1] RAYLEIGH L. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force [J]. *Phil. Mag.*, 1892, **34**: 145-154
- [2] QUERE D. Fluid coating on a fiber [J]. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1999, **31**: 347-384.
- [3] QUERE D. Thin films flowing on vertical fibers [J]. *Europhys. Lett.*, 1990, **13**(8): 347-384.
- [4] FRENKEL A L. Nonlinear theory of strongly undulating thin films flowing down vertical cylinders [J]. *Europhys. Lett.*, 1992, **18**(7): 583-588
- [5] KALLIADASIS S, CHANG H C. Drop formation during coating of vertical fibres [J]. *J. Fluid Mech.*, 1994, **261**: 135-168
- [6] KLIAKHANDLER I L, DAVIS S H, BANKOFF S G. Viscous beads on vertical fibre [J]. *J. Fluid Mech.*, 2001, **429**: 381-390
- [7] CRASTER R V, MATAR O K. On viscous beads flowing down a vertical fibre [J]. *J. Fluid Mech.*, 2006, **553**: 85-105
- [8] RUYER-QUIL C, TREVELEYAN P, GIORGIUTTI-DAUPHINE F, et al. Modelling film flows down a fibre [J]. *J. Fluid Mech.*, 2008, **603**: 431-462
- [9] DUPRAT C, RUYER-QUIL C, KALLIADASIS S, GIORGIUTTI-DAUPHINE F. Absolute and convective instabilities of a viscous film flowing down a vertical fiber [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **82**: 244502
- [10] LIU R, LIU Q S. Thermocapillary effect on the dynamics of viscous beads on vertical fiber [J]. *Phys. Rev.: E*, 2014, **90**: 033005
- [11] HUERRE P, MONKEWITZ P A. Local and global instabilities in spatially developing flows [J]. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1990, **22**: 473-537
- [12] BERS A. Space-time Evolution of Plasma Instabilities-absolute and Convective, *Handbook of Plasma Physics* [M]. Amsterdam: North-Holland, 1983